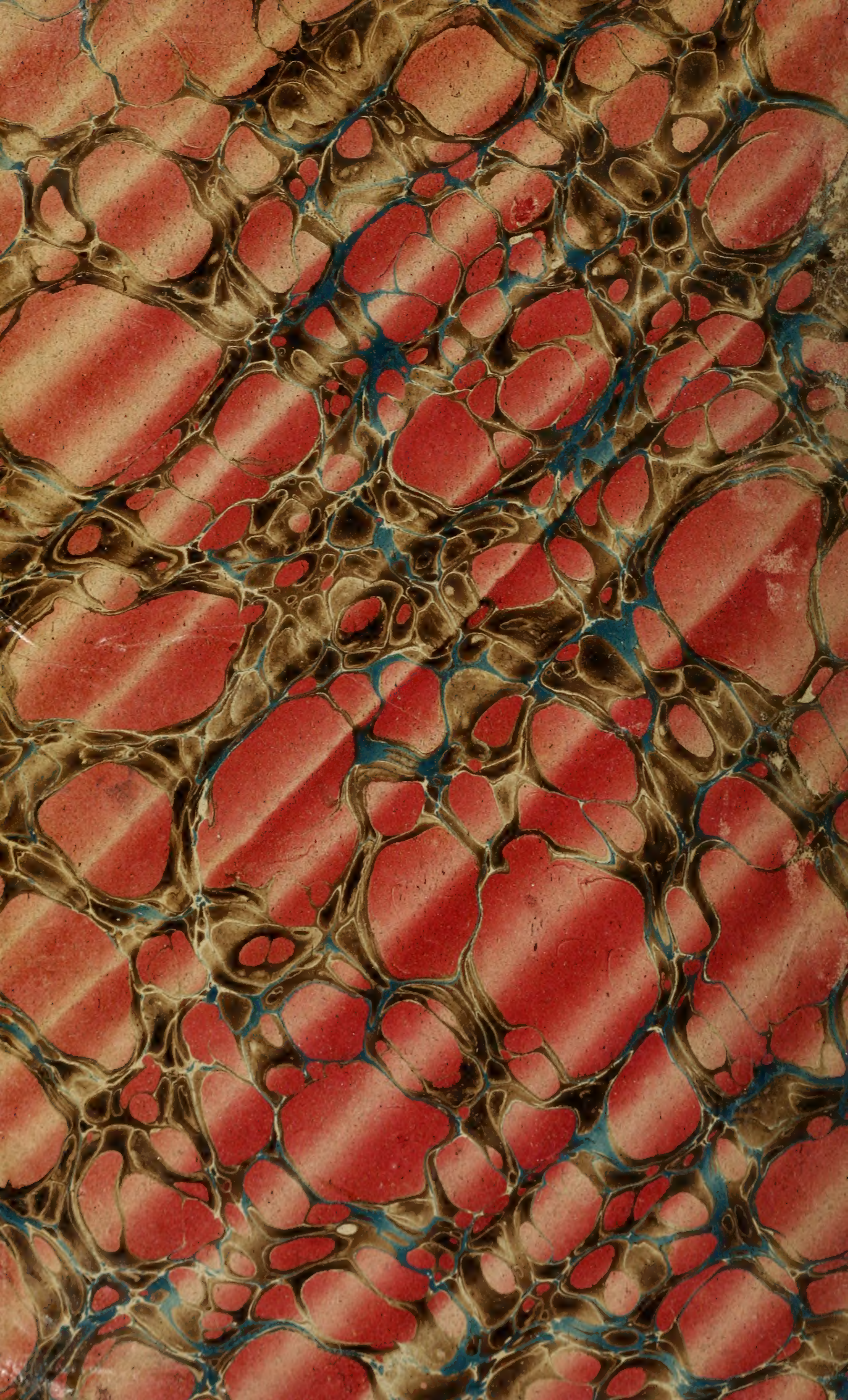
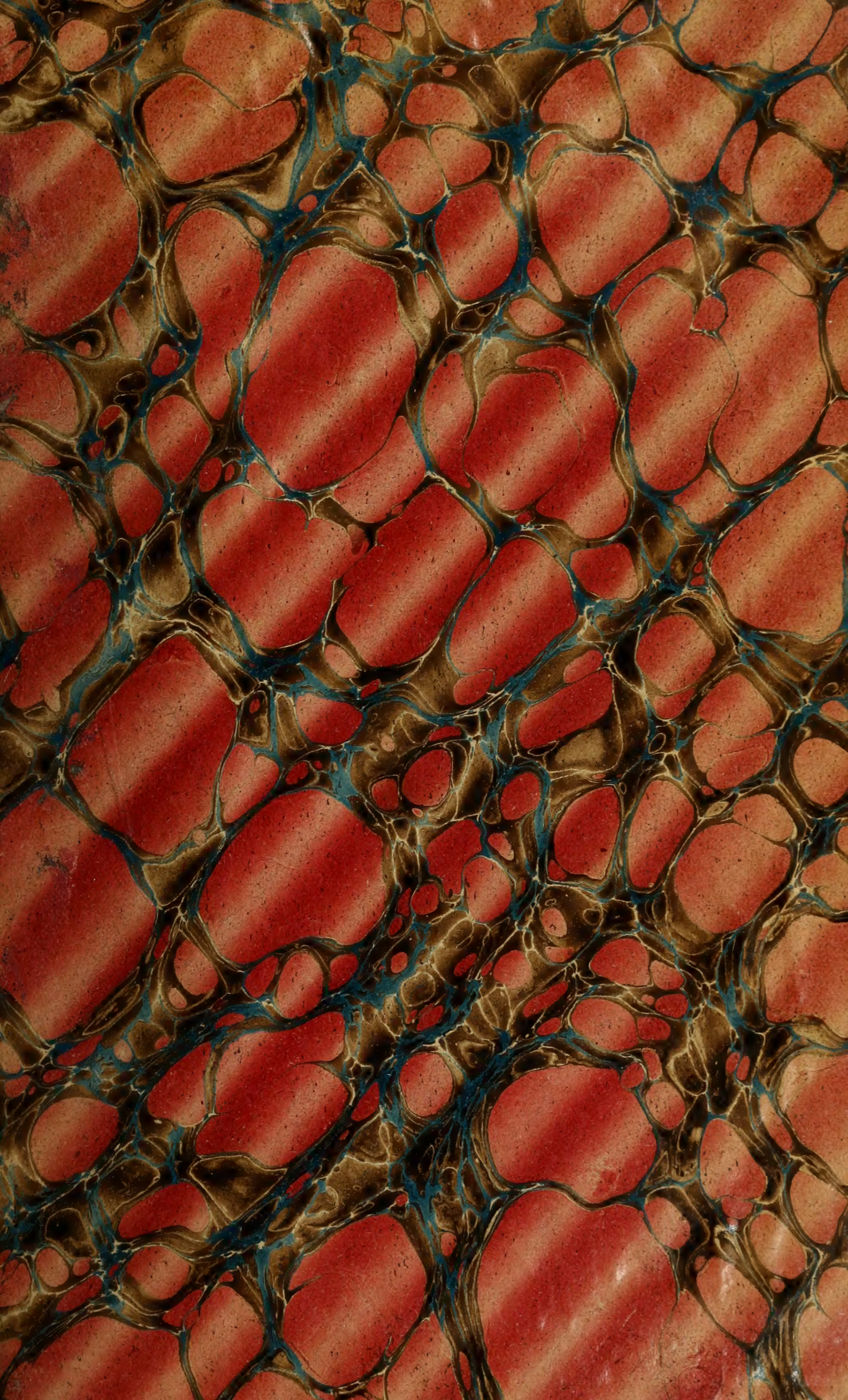






BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *J. Hoüel,* Secrétaire de la rédaction, Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux, cours d'Aquitaine, 66.

7911 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAÏEF, BROCARD, LAISANT, LAMPE,
LESPIAULT, MANSION, POTOCKI, RADAU, RAYET, WEYR, ETC.,

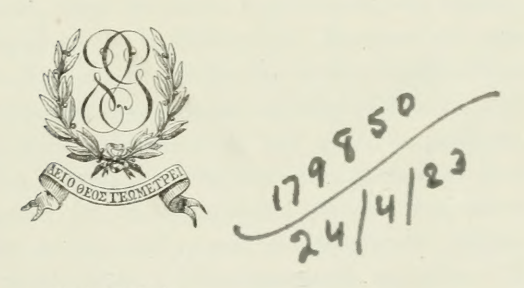
SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME VI. — ANNÉE 1882.

(TOME XVII DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1882

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Catalogue de modèles pour l'enseignement des Mathématiques supérieures, en vente chez L. Brill, à Darmstadt, 1881.

Cette collection, contenant 86 numéros, renferme 106 modèles, destinés à l'enseignement, dans les écoles supérieures, des Mathématiques, de la Physique et de la Mécanique. Souvent on s'est demandé s'il était utile d'employer des dessins et des modèles dans l'enseignement mathématique. La réponse est bien différente suivant le degré que l'on veut atteindre et le but qu'on se propose. De plus, cette question n'avait jusqu'ici aucune signification pratique, en ce qui concerne les Mathématiques supérieures, parce que, en Allemagne du moins, il n'y avait pas de grandes collections mathématiques appropriées à l'enseignement supérieur. Et pourtant toute personne, quelle que soit son opinion sur la question posée précédemment, voudra bien convenir que le modèle fournit non seulement à l'élève, mais aussi au professeur, un élément plein de vie, saisissant, alors qu'après un calcul pénible ou après une discussion ardue le résultat peut être présenté sous une

forme réelle, concrète et élégante. Même pour le travailleur, le modèle peut soulever maintes questions, qui, sans une représentation plastique, ne se seraient pas présentées.

C'est cette certitude qui a engagé l'Institut Mathématique de l'École Technique supérieure de Munich, d'abord sous la direction de MM. Klein et Brill, maintenant sous celle de M. Brill seulement, à faire construire par les étudiants les modèles des différentes surfaces qui se présentaient dans les problèmes dont on s'occupait dans le séminaire. Comme nous le disions en publiant notre première série : « En faisant construire ces modèles, l'idée principale était d'exciter les étudiants qui assistaient aux conférences de Mathématiques à pousser jusqu'au bout la discussion de chacun des problèmes qui se présentaient et par là même à aller plus avant dans l'étude de ces questions. Les questions auxquelles se rattachent les modèles sont prises à différents cours faits à l'École Technique supérieure. On reconnaîtra certainement qu'il était utile de publier une telle collection, que c'était rendre un service que de la répandre partout. De plus, ces modèles offrent, en bien des cas, beaucoup de particularités nouvelles et intéressantes ; les notes qui y sont ajoutées présentent maintes fois des recherches originales. »

C'est ainsi que cinq séries de modèles préparés à l'École Technique supérieure de Munich se trouvent maintenant dans le catalogue de l'éditeur. Parmi les séries qui ont une autre origine, nous avons à citer la belle et riche collection des types des surfaces du troisième ordre et de leurs surfaces hessiennes, faite par Rodenberg à Darmstadt, et aussi différentes représentations élégantes des surfaces du second ordre. Nous allons parler d'abord de ces dernières surfaces.

Si la plupart des modèles du catalogue ont nécessité des études préliminaires profondes, des recherches géométriques toutes spéciales, nous devons dire cependant que l'ensemble des *surfaces du second degré* constitue une partie importante de notre collection. On a déjà, dans le *Bulletin*, parlé du modèle *en carton* de l'ellipsoïde. La série à laquelle il appartient contient tous les types de surfaces du second ordre, représentés de la même manière : on prépare d'abord avec du carton une série des sections circulaires de la surface, et on les réunit en sorte que, lorsque l'on fait varier

l'angle des deux plans de section circulaires, on obtient toute une suite de surfaces. On connaît les beaux *modèles en fil de surfaces du second ordre* qu'Olivier a fait préparer pour le Conservatoire des Arts et Métiers. Notre collection contient cinq modèles de cette espèce, trois où les tiges métalliques auxquelles sont attachés les fils de soie sont mobiles, deux où ces tiges sont fixes. Une autre série de surfaces du second ordre, en gypse, donne sur tous ces types la *ligne de courbure*.

La considération des lignes géodésiques de *l'ellipsoïde de rotation*, ainsi que de celles qui passent par les *ombilics de l'ellipsoïde à trois axes*, se rattache, on le sait, aux fonctions elliptiques. Ces lignes ont été représentées de différentes manières sur plusieurs modèles. Dans les notes qui y sont jointes, on a indiqué la marche du calcul, comment l'intégrale elliptique a été réduite à sa forme normale, et comment les fonctions $\mathfrak{Z}$ ont été introduites.

Quant à la série de surfaces du troisième ordre dont nous parlions plus haut, ce sont des modèles où sont figurées les droites et les courbes paraboliques. On a eu l'intention de donner les types caractéristiques de surfaces du troisième ordre, et également de celles ayant des singularités élevées. On peut alors se faire une idée claire, exacte et complète de *toutes* les formes possibles des surfaces du troisième ordre. Il était impossible de songer à faire une collection complète de toutes les formes qui peuvent se présenter, mais il est possible de déduire des différents modèles construits un type quelconque ; la chose se fait d'une façon bien claire, sans aucune difficulté, par la déformation continue d'une des surfaces, procédé qui permet d'arriver non seulement à toutes les formes existantes, mais aussi de voir comment on passe d'un des modèles à un autre. Le même problème a été aussi résolu pour les surfaces hessiennes qui correspondent à un pentaèdre réel.

Parmi les surfaces d'ordre supérieur, citons d'abord quatre modèles élégants représentant des types différents de la *surface de Kummer*, cette surface connue du quatrième ordre, à seize points doubles, qui est sa propre réciproque. Signalons encore quatre types de la *cyclide de Dupin* et cinq types de la courbe gauche du troisième degré représentés sur des cylindres du second ordre.

Une surface curieuse est la surface transcendante qui représente

la marche de la fonction elliptique $\varphi = \text{sn}(u, k)$ pour toutes les valeurs de u et k (même pour $k > 1$) ; pour $k = 1$, une discontinuité se présente.

Pour l'application d'une surface sur une autre, les surfaces à courbure constante, et en particulier deux surfaces hélicoïdales, nous servent d'exemple. L'une d'elles est applicable sur l'ellipsoïde de rotation, l'autre, l'hélicoïde ordinaire, peut être développée sur la caténoïde ; dans ce dernier cas, les lignes asymptotiques se transforment en lignes de courbure et réciproquement. Une bande de laiton courbée d'une façon convenable permet d'effectuer réellement le développement.

De même nous avons ajouté aux nombreux types de *surfaces à courbure constante, positive ou négative*, des bandes de surface en gutta-percha pour faire avec elles un essai analogue. En particulier, le déplacement d'une bande à courbure constante négative sur la surface correspondante a quelque chose d'étonnant ; cela rappelle l'impression curieuse que l'on éprouve en déformant par une pression légère une sphère creuse de gutta-percha. La courbe méridienne de la surface hélicoïdale à courbure constante positive conduit, on le sait, aux intégrales elliptiques de troisième espèce ; dans les notes adjointes à la surface on a ramené ces intégrales à la forme la plus commode pour le calcul des fonctions $\mathfrak{Z}$. Parmi les surfaces à courbure constante de la collection, il faut signaler la *surface de L. Bianchi*, dont S. Lie a parlé précisément dans le *Bulletin*. L'auteur du Mémoire ajouté au modèle, Th. Kuen, de Munich, fait remarquer, ce qu'on n'avait pas vu jusqu'ici, qu'un des systèmes de lignes de courbure de cette surface est composé de lignes planes, et que, par suite, la surface appartient à un genre de surfaces découvertes depuis longtemps par Enneper.

Signalons encore le modèle d'une *surface minimum du neuvième ordre*, d'après Enneper, qui possède des lignes de courbure planes du troisième ordre.

Viennent ensuite deux surfaces focales. La première, due à Seidel, s'obtient quand on fait tomber sur un système de lentilles à centre un faisceau de rayons dont le point de convergence est en dehors de l'axe du système. On peut le réaliser d'une façon élégante en faisant l'expérience dans un liquide coloré. La seconde, du douzième ordre, est la surface focale des rayons qui partent

d'une ligne et se réfléchissent sur un cylindre dont l'axe rencontre la ligne. Cette surface offre un point sextuple remarquable. La première surface focale citée peut aussi servir comme surface du centre du paraboloïde elliptique. Trois modèles donnent aussi la surface du centre de l'hyperboloïde à une nappe.

En ce qui concerne la Physique et la Mécanique, nous citerons la trajectoire du pendule sphérique, la chaînette sur la sphère, différentes représentations de la surface des ondes pour les cristaux à deux ou à trois axes ; une d'elles donne les ombilics et les courbes sphériques.

Enfin, on trouve à côté de ces modèles de surfaces parfois compliquées quelques perspectives relief de corps géométriques simples. Nous n'appuierons pas sur leur utilité. La plupart des modèles sont en gypse, à surface d'un mat brillant. On a adjoint à beaucoup d'entre elles un texte explicatif, provenant, en général, de celui qui a fait le modèle, et qui donne la marche du calcul ainsi que les propriétés principales du corps représenté. Dans le catalogue, les modèles sont arrangés en séries qui correspondent à l'ordre dans lequel ils ont paru, mais qui, en somme, ne forment point des groupes de modèles de même espèce.

GÜNTHER (S.). — PARABOLISCHE LOGARITHMEN UND PARABOLISCHE TRIGONOMETRIE. — Leipzig, 1882. In-8°, 100 pages, 18 figures.

L'idée de réunir et de signaler, dans un même parallèle, les propriétés et les analogies de certaines courbes, qui ont, pour ainsi dire, un air de famille, s'est présentée depuis longtemps à la sagacité des géomètres. La Géométrie des Grecs nous en offre un premier exemple, emprunté, il est vrai, à la mesure des solides, forme plus accessible que l'étude des courbes ; cependant, pour ces dernières, elle ne tarda point à se développer dans les écrits de Grégoire de Saint-Vincent, de Pascal, de Roberval et de Hobbes. Mais il faut arriver à Brendel pour trouver une étude méthodique des analogies de la parabole et de la spirale d'Archimède. C'est Brendel qui le premier a complété ces analogies par l'indication de la nature logarithmique des arcs de la parabole : on

lui doit l'invention des logarithmes paraboliques. Cette notion a été reprise avec succès par James Booth, qui a montré les conséquences de ces relations de nature à développer les propriétés géométriques des fonctions elliptiques, dans un travail publié en 1851.

Ces considérations servent de point de départ à la nouvelle monographie que M. Günther vient de consacrer à ses recherches parallèles sur les logarithmes paraboliques et la trigonométrie de la parabole. Elles forment le premier Chapitre de ce travail.

Le Chapitre II renferme un rapide aperçu des formules de la trigonométrie hyperbolique, dont on aura besoin pour l'étude principale de la courbe dont l'auteur s'occupe plus particulièrement, la strophoïde droite, qui, entre autres modes de génération, peut se définir la podaire du pied de la direction d'une parabole.

Les propriétés de cette courbe, à laquelle J. Booth avait proposé de donner le nom de *logocyclique,* ont été rappelées avec détails en s'inspirant des études du géomètre anglais. Mais, à un autre point de vue, l'on peut considérer ce travail comme un nouveau Chapitre de l'Ouvrage récemment édité par M. Günther, *Sur les fonctions hyperboliques*, dont il a été rendu compte au *Bulletin* (avril 1881). L'auteur retrouve, en effet, au moyen de ces fonctions, les principaux résultats obtenus antérieurement par J. Booth, et les complète par d'autres propriétés. Il énumère successivement celles qui se rapportent à la définition de la courbe comme lieu géométrique, à ses points conjugués qui la classent au nombre des anallagmatiques; aux tangentes et normales; aux rayons de courbure; à la quadrature et à la rectification.

Ces divers problèmes forment l'objet du Chapitre III, et il est intéressant d'y rencontrer l'emploi de la trigonométrie de l'hyperbole équilatère, qui semble ainsi avoir servi de transition naturelle entre les analogies de la trigonométrie du cercle et la trigonométrie de la parabole.

Les analogies les plus frappantes qui existent entre ces trois ordres de formules sont présentées par l'auteur sous forme de tableau synoptique. Cette disposition est des plus favorables pour faire ressortir l'utilité de cette comparaison, qui sert ainsi de résumé aux aperçus développés par J. Booth dans son Mémoire publié en 1856, *Sur la trigonométrie de la parabole et l'origine*

géométrique des logarithmes, et son Traité, publié en 1873, relatif à diverses méthodes géométriques nouvelles. De nombreux extraits de ces deux Ouvrages sont indiqués par M. Günther et forment, pour ainsi dire, la matière du quatrième Chapitre. Au surplus, les considérations exposées par le géomètre anglais dans le Mémoire de 1856 ont été en partie reproduites dans le Traité de 1873, dont la tendance et l'esprit ont été appréciés déjà dans le *Bulletin* (mars 1874).

Le cinquième Chapitre, qui termine ce travail, est consacré à la représentation graphique d'un système de logarithmes, au moyen de paraboles homofocales et de même axe, associées à la logocyclique. On y trouve d'intéressantes considérations sur le mode de représentation de la formule de Moivre étendue aux fonctions hyperboliques ou paraboliques.

La monographie dont nous venons de nous occuper aura bientôt sa place marquée dans nos livres classiques, parce qu'elle vient heureusement compléter la trilogie des coniques particulières, circonférence, hyperbole équilatère et parabole. Ces trois courbes présentent, comme on le voit, de nombreux points de ressemblance, que la Trigonométrie ou les logarithmes mettent en lumière à tour de rôle. Il est intéressant pour l'enseignement de savoir où l'on peut les rencontrer. H. Brocard.

RIBAUCOUR (A.). — Étude des élassoïdes ou surfaces a courbure moyenne nulle. Mémoire couronné par l'Académie royale de Belgique, dans la séance publique du 16 décembre 1880. — Bruxelles, Hayez. Extrait du Tome XLIV des *Mémoires couronnés et Mémoires des Savants étrangers,* publiés par l'Académie, 1881.

L'Académie de Belgique a eu souvent la bonne fortune de recevoir, en réponse aux questions qu'elle proposait, des travaux du mérite le plus éclatant. Sans remonter jusqu'à l'immortel *Aperçu historique,* et sans sortir de France, il nous suffira de rappeler que le beau *Mémoire sur la théorie générale des séries* de M. O. Bonnet était la réponse à une question posée par l'Académie.

Le Mémoire de M. Ribaucour dont nous allons rendre compte présente, lui aussi, le plus haut intérêt. Nous avons récemment fait connaître dans le *Bulletin* les belles recherches de M. Lie sur les surfaces minima. Ces recherches paraissaient presque avoir épuisé la question. M. Ribaucour est venu nous prouver une fois de plus qu'il y a toujours à faire, même dans les questions les plus étudiées, quand on apporte dans leur étude un esprit ingénieux et inventif; son travail mérite d'être consulté : il ouvre bien des points de vue nouveaux, et il contribuera certainement d'une manière notable aux progrès de la théorie qui trouve son origine dans l'intégrale de Monge.

Par ses recherches sur la théorie des surfaces en général, M. Ribaucour était bien préparé à l'étude que demandait l'Académie. L'importance même de son travail provient de ce que la plupart des propositions qu'il y démontre sont des cas particuliers, ou mieux des applications, à la théorie des surfaces minima, de propositions ayant une portée générale.

Dans le Chapitre Ier, M. Ribaucour développe le programme de ses recherches, et indique les procédés de démonstration dont il fera usage. Ces procédés de démonstration reposent sur les formules de la théorie des surfaces, et en particulier sur celles qui portent le nom de M. Codazzi. Mais la méthode employée presque constamment par l'auteur repose sur l'emploi d'axes variables dont l'origine se déplace sur une surface. Elle est donc analogue à celles qu'on emploie en Mécanique, lorsqu'on substitue aux axes fixes des axes mobiles, et au mouvement absolu un mouvement relatif. M. Ribaucour désigne cette méthode sous le nom de *périmorphie*.

Le Chapitre II contient une démonstration géométrique de la formule de Riemann qui fait connaître l'aire de la portion d'élassoïde terminée à un contour donné.

Le Chapitre III donne la solution également géométrique du problème de Monge, c'est-à-dire l'intégration effectuée par la géométrie de l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima. Nous aurions ici une objection à présenter. Nous ne voyons pas d'abord pourquoi M. Ribaucour appelle les surfaces minima des *surfaces moulures*. La génération géométrique qu'il en donne n'est nullement d'accord avec la définition universellement adoptée des

surfaces moulures. Nous croyons également que le raisonnement de l'auteur aurait besoin d'un complément, si l'on ne voyait pas immédiatement que l'intégrale obtenue par ses procédés géométriques coïncide avec celle de Monge.

Le Chapitre IV est consacré à la définition d'un élément, la *congruence isotrope*, qui joue un rôle essentiel dans toute la suite du Mémoire. L'auteur définit ainsi la congruence dont la surface focale est formée de deux développables circonscrites au cercle de l'infini. Le théorème suivant explique comment la théorie des congruences isotropes est liée à celle des surfaces minima. Appelons *plan moyen* d'une droite de la congruence le plan qui est perpendiculaire à cette droite, et qui passe à égale distance de ses deux foyers ou points de contact avec les deux nappes de la surface focale. Le plan moyen enveloppe une surface que l'auteur appelle *enveloppée moyenne* : cela posé, l'enveloppée moyenne d'une congruence isotrope est une surface minimum.

Dans le Chapitre V, M. Ribaucour étudie et construit toutes les congruences isotropes, admettant pour enveloppée moyenne une surface minima donnée. Elles sont en nombre triplement infini, et il est ainsi démontré que l'on peut toujours faire dériver une surface minimum d'une congruence isotrope. Les Chapitres VI et VII contiennent des conséquences de cette importante proposition.

Le Chapitre VIII traite des propriétés des surfaces moyennes. M. Ribaucour donne ce nom à la surface, lieu des milieux des segments compris entre les points focaux sur toutes les droites d'une congruence, et il fait d'abord connaître ce beau théorème :

La surface moyenne d'une congruence isotrope est le lieu des milieux de cordes égales entre elles dont les extrémités décrivent des surfaces applicables l'une sur l'autre. Réciproquement, *si les deux extrémités d'un segment constant de droite décrivent deux surfaces* (C), (C′) *applicables l'une sur l'autre, la droite engendre une congruence isotrope, et le plan perpendiculaire sur le milieu de la droite enveloppe une surface minima.*

Dans le Chapitre IX, M. Ribaucour montre comment on peut faire dériver de chaque système orthogonal isotherme de la sphère une infinité de congruences isotropes donnant naissance à des sur-

faces minima ou élassoïdes, qui sont étudiées dans le Mémoire sous le nom d'*élassoïdes groupés*. Tous ces élassoïdes sont applicables sur l'un d'eux, mais ils ne sont pas superposables. Parmi eux il faut distinguer des couples de surfaces conjuguées, dont on doit la découverte à M. Bonnet, et qui jouissent de la propriété que l'image sphérique des lignes de courbure de l'un des élassoïdes coïncide avec l'image sphérique des asymptotiques de l'autre. M. Ribaucour ne se contente pas de la considération des élassoïdes groupés, il leur associe les élassoïdes stratifiés, pour la définition desquels nous renvoyons à son beau Mémoire.

On peut dire en résumé, et en laissant de côté une foule de résultats de détail, que la méthode de M. Ribaucour a pour caractère distinctif l'emploi des congruences isotropes. Il nous sera permis de regretter que l'auteur se soit trop renfermé dans la question posée par l'Académie, et qu'il n'ait pas complètement développé plusieurs belles propositions générales, notamment celles qui se trouvent à la fin de son travail. G. D.

MÉLANGES.

SUR LE PROBLÈME DE PFAFF;

Par M. G. DARBOUX.

La méthode que Pfaff a fait connaître en 1814, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, pour l'intégration d'une équation aux dérivées partielles à un nombre quelconque de variables indépendantes, a été longtemps négligée : les belles découvertes de Jacobi et de Cauchy ont seules attiré l'attention des géomètres qui s'occupent de cette théorie.

Cependant, la méthode de Pfaff, qui est, d'ailleurs, la généralisation de celle que l'on doit à Lagrange pour le cas de deux variables indépendantes, offre de sérieux avantages. Elle substitue à des calculs souvent compliqués l'emploi de certaines identités différentielles qui donnent la clef et la solution intuitive des difficultés qui se présentent dans les autres méthodes. Les beaux

résultats obtenus par M. Lie dans différents Mémoires insérés aux *Mathematische Annalen* montrent tout le parti qu'on peut tirer de ces identités, par exemple si l'on veut réduire au plus petit nombre possible les intégrations que l'on a à effectuer successivement avant de parvenir à la solution complète d'une équation aux dérivées partielles.

Dans le travail qu'on va lire, je me suis proposé d'expliquer la solution du problème de Pfaff sans rien emprunter à la théorie des équations aux dérivées partielles, et je me suis surtout attaché à mettre en évidence les propriétés d'invariance qui jouent un rôle fondamental dans cette solution. Je ne me suis nullement occupé des intégrations qui sont nécessaires pour amener une expression différentielle à sa forme réduite, et d'ailleurs, d'après les formules que j'ai données, les opérations que l'on doit faire pour obtenir la solution de ce problème peuvent se calquer en quelque sorte sur celles qui se rapportent à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles.

Dans la première Partie j'étudie les formes réduites, et je montre que l'intégration du premier système de Pfaff suffit et donne immédiatement la forme réduite quand il s'agit de l'expression différentielle correspondante à une équation aux dérivées partielles.

Dans la seconde Partie j'étudie les relations entre les formes réduites, et je démontre en particulier trois propositions qui servent de base à la théorie des groupes de M. Lie (1).

---

(1) La première Partie de ce travail a été écrite en 1876 et communiquée à M. Bertrand, qui enseignait alors au Collège de France la théorie des équations aux dérivées partielles. M. Bertrand a bien voulu exposer la méthode que je lui avais soumise, dans sa première leçon de janvier 1877.

Quelque temps après paraissait dans le *Journal de Borchardt* un beau Mémoire de M. Frobenius qui porte d'ailleurs une date antérieure à celle de janvier 1877 (septembre 1876) et où ce savant géomètre suit une marche assez analogue à celle que j'ai communiquée à M. Bertrand, en ce sens qu'elle repose sur l'emploi des invariants et du covariant bilinéaire de M. Lipschitz. En revenant dans ces derniers temps sur mon travail, il m'a semblé que mon exposition était plus affranchie de calcul et que, par suite de l'importance que la méthode de Pfaff est appelée à prendre, il y avait intérêt à la faire connaître.

Dans la même année 1877 a paru aussi, dans l'*Archiv for Mathematik* de Christiania, un important Mémoire de M. Lie sur le même sujet (t. II, p. 338). Mais ce travail repose sur des méthodes tout à fait différentes de celle que je vais exposer.

PREMIÈRE PARTIE.

I.

Considérons l'expression différentielle

$$X_1\,dx_1 + \ldots + X_n\,dx_n,$$

où $X_1, \ldots, X_n$ sont des fonctions données de $x_1, \ldots, x_n$. Nous la désignerons par la notation Θ_d, où l'indice d indique le système de différentielles adopté. Ainsi l'on aura

$$\Theta_d = X_1\,dx_1 + \ldots + X_n\,dx_n, \tag{1}$$

et si l'on emploie d'autres différentielles désignées par la caractéristique δ

$$\Theta_\delta = X_1\,\delta x_1 + \ldots + X_n\,\delta x_n. \tag{2}$$

Des deux égalités précédentes on déduit

$$\delta\Theta_d = \sum \delta X_i\,dx_i + \sum X_i\,\delta\,dx_i,$$

$$d\Theta_\delta = \sum dX_i\,\delta x_i + \sum X_i\,d\delta x_i,$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}\delta\Theta_d - d\Theta_\delta &= \sum (\delta X_i\,dx_i - dX_i\,\delta x_i)\\ &= \sum_i \sum_k \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right)(dx_i\,\delta x_k - dx_k\,\delta x_i),\end{aligned}$$

la somme étant étendue à toutes les combinaisons des indices $1, 2, \ldots n$, et se composant, par conséquent, de $\frac{n(n-1)}{2}$ termes. Nous poserons, pour abréger,

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}, \tag{3}$$

et l'égalité précédente deviendra

$$\delta\Theta_d - d\Theta_\delta = \sum_i \sum_k a_{ik}(dx_i\,\delta x_k - dx_k\,\delta x_i). \tag{4}$$

En vertu des identités

$$a_{ik} + a_{ki} = 0, \quad a_{ii} = 0$$

qui découlent de la formule (3), on peut encore écrire l'équation (4) sous la forme

$$(4\ bis) \qquad \delta\Theta_d - d\Theta_\delta = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}\, dx_i\, \delta x_k.$$

Supposons maintenant que dans l'expression différentielle (1) on remplace les variables x_i par d'autres variables y_i; en effectuant la substitution définie par les formules

$$(5) \qquad x_i = \psi_i(y_1, \ldots, y_n),$$

qui donnent

$$dx_i = \sum \frac{\partial \psi_i}{\partial y_k}\, dy_k,$$

l'expression Θ_d prendra la forme

$$(6) \qquad \Theta_d = \sum Y_i\, dy_i.$$

Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons que les n fonctions ψ_i soient indépendantes; par suite, les nouvelles variables y_i pourront être regardées comme fonctions indépendantes des anciennes, x_i. Quant aux coefficients Y_i, on peut toujours, par l'emploi des formules (5), les transformer en des fonctions des variables y_i.

Cela posé, appliquons la formule (4) à la nouvelle expression de Θ_d. Si nous posons

$$(7) \qquad b_{ik} = \frac{\partial Y_i}{\partial y_k} - \frac{\partial Y_k}{\partial y_i},$$

nous aurons

$$\delta\Theta_d - d\Theta_\delta = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} b_{ik}\, dy_i\, \delta y_k,$$

et, par conséquent,

$$(8) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}\, dx_i\, \delta x_k = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} b_{ik}\, dy_i\, \delta y_k.$$

Cette formule est fondamentale dans notre théorie ; aussi, avant de continuer, nous en donnerons une démonstration directe sans nous appuyer sur la propriété exprimée par l'équation

$$d\delta x_i = \delta d x_i,$$

dont nous avons fait usage.

De la comparaison des expressions (1) et (6) de Θ_d on déduit les égalités

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_k} + \ldots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial y_k} = Y_k,$$

qui servent de définition aux quantités Y_k. On déduit de là

$$\frac{\partial Y_k}{\partial y_i} = \sum_\alpha X_\alpha \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial y_k \partial y_i} + \sum_\alpha \sum_{\alpha'} \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_{\alpha'}} \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_k} \frac{\partial x_{\alpha'}}{\partial y_i},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial Y_k}{\partial y_i} - \frac{\partial Y_i}{\partial y_k} = \sum_\alpha \sum_{\alpha'} \left(\frac{\partial X_\alpha}{\partial x_{\alpha'}} - \frac{\partial X_{\alpha'}}{\partial x_\alpha} \right) \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_k} \frac{\partial x_{\alpha'}}{\partial y_i} - \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_i} \frac{\partial x_{\alpha'}}{\partial y_k} \right),$$

la somme du second membre étant étendue à tous les systèmes de valeurs différentes de α, α' et comprenant, par conséquent, $\frac{n(n-1)}{2}$ termes.

Si l'on multiplie l'équation précédente par $dy_i \delta y_k - dy_k \delta y_i$, et que l'on fasse la somme des $\frac{n(n-1)}{2}$ équations ainsi obtenues, le coefficient de

$$\frac{\partial X_\alpha}{\partial x_{\alpha'}} - \frac{\partial X_{\alpha'}}{\partial x_\alpha}$$

dans le second membre sera

$$\sum_i \sum_k \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_k} \frac{\partial x_{\alpha'}}{\partial y_i} - \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_i} \frac{\partial x_{\alpha'}}{\partial y_k} \right) (dy_i \delta y_k - dy_k \delta y_i),$$

c'est-à-dire

$$dx_{\alpha'} \delta x_\alpha - dx_\alpha \delta x_{\alpha'}.$$

On aura donc

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_i \sum_k \left(\frac{\partial Y_i}{\partial y_k} - \frac{\partial Y_k}{\partial y_i} \right) (dy_i \,\delta y_k - dy_k \,\delta y_i) \\ &\quad = \sum_\alpha \sum_{\alpha'} \left(\frac{\partial X_\alpha}{\partial x_{\alpha'}} - \frac{\partial X_{\alpha'}}{\partial x_\alpha} \right) (dx_\alpha \,\delta x_{\alpha'} - dx_{\alpha'} \,\delta x_\alpha), \end{aligned} \right.$$

ce qui est la même chose que l'équation (8).

II.

Cela posé, considérons les variables x_i comme des fonctions d'une variable auxiliaire t définies par les équations différentielles

$$(10)\quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}\,dx_1 + \ldots + a_{n1}\,dx_n = \lambda X_1\,dt, \\ a_{12}\,dx_1 + \ldots + a_{n2}\,dx_n = \lambda X_2\,dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}\,dx_1 + \ldots + a_{nn}\,dx_n = \lambda X_n\,dt, \end{array} \right.$$

où λ sera une quantité que l'on pourra choisir arbitrairement, o, une constante ou une fonction de t, suivant les cas. Nous ferons remarquer que les équations (10) peuvent être remplacées par l'équation unique

$$(10)^a \qquad \sum_i \sum_k a_{ik}\,dx_i\,\delta x_k = \lambda\,dt \sum X_i\,\delta x_i,$$

que l'on obtient en les ajoutant, après les avoir multipliées respectivement par $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$; pourvu que l'on exige que cette équation soit vérifiée pour toutes les valeurs attribuées aux différentielles auxiliaires δx_i. Ainsi le système (10) peut être remplacé par l'équation unique

$$(10)^b \qquad \delta\Theta_d - d\Theta_\delta = \lambda\,\Theta_\delta\,dt,$$

qui devra avoir lieu, quelles que soient les différentielles δ. Dans les applications, il sera toujours préférable de former directement les deux membres de cette dernière équation au lieu de calculer successivement les quantités a_{ik} qui figurent dans le système (10). Dès à présent, les remarques qui précèdent vont nous conduire à une propriété fondamentale du système (10).

Supposons que l'on effectue un changement de variables et que l'on remplace les variables x_i par d'autres variables y_i en nombre égal, qui soient fonctions indépendantes des premières. Il est aisé de voir que le système (10) se transformera dans celui que l'on formerait de la même manière, en prenant les nouvelles variables indépendantes. Cela résulte immédiatement de ce que ce système, écrit sous la forme $(10)^b$, est évidemment indépendant de tout choix de variables indépendantes. Mais, pour plus de netteté, considérons l'équation $(10)^a$. On sait, en vertu de l'égalité (8), que son premier membre deviendra

$$\sum\sum b_{ik}\, dy_i\, \delta y_k.$$

Quant au second membre, il se transformera évidemment dans le suivant

$$\lambda\, dt \sum Y_k\, \delta y_k.$$

Ainsi l'équation $(10)^a$ prendra la forme

$$\sum_i \sum_k b_{ik}\, dy_i\, \delta y_k = \lambda\, dt \sum_i Y_i\, \delta y_i.$$

Les fonctions y_i étant indépendantes, leurs différentielles δy_i sont arbitraires, comme les différentielles δx_i : on pourra donc égaler les coefficients de ces différentielles dans les deux membres, et l'on aura les équations

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} b_{11}\, dy_1 + b_{21}\, dy_1 + \ldots + b_{n1}\, dy_n = \lambda Y_1\, dt, \\ b_{12}\, dy_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \lambda Y_2\, dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{1n}\, dy_1 + \ldots\ldots\ldots + b_{nn}\, dy_n = \lambda Y_n\, dt. \end{array}\right.$$

Ainsi, toutes les fois que les fonctions x_i satisferont aux équations (10), les fonctions y_i satisferont aux équations (11). La réciproque se démontrerait évidemment de la même manière. On peut donc dire que les systèmes (10) et (11) sont absolument équivalents, qu'ils sont deux formes d'un même système d'équations différentielles écrites avec des variables différentes. Comme ils sont composés de la même manière au moyen des variables qui y

entrent, nous exprimerons d'une manière abrégée la propriété dont il s'agit en disant que *le système* (10) *est invariant*. Nous allons faire usage de cette proposition pour indiquer les formes réduites auxquelles on peut ramener l'expression différentielle Θ_d.

III.

Supposons d'abord n pair. Le déterminant gauche

$$\Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$$

sera un carré parfait. Nous commencerons par supposer que ce déterminant est différent de zéro.

Alors on pourra résoudre les équations (10) par rapport à $dx_1, \ldots, dx_n$, et l'on obtiendra un système de la forme

$$\frac{dx_1}{\mathrm{H}_1} = \ldots = \frac{dx_n}{\mathrm{H}_n} = \lambda\, dt,$$

admettant $n-1$ intégrales indépendantes de t.

Prenons pour nouvelles variables ces $n-1$ intégrales, que nous désignerons par $y_1, \ldots, y_{n-1}$, et une fonction y_n assujettie à la seule condition de ne pas être une intégrale du système. Alors $y_1, \ldots, y_n$ formeront un système de n fonctions indépendantes, et le système (10), écrit avec les nouvelles variables, prendra la forme (11). Il faut donc exprimer que les équations (11) sont vérifiées quand on y suppose constantes les $n-1$ fonctions $y_1, \ldots, y_{n-1}$. On devra donc avoir

$$\left(\frac{\partial \mathrm{Y}_1}{\partial y_n} - \frac{\partial \mathrm{Y}_n}{\partial y_1}\right) dy_n = -\lambda \mathrm{Y}_1\, dt,$$

$$\left(\frac{\partial \mathrm{Y}_2}{\partial y_n} - \frac{\partial \mathrm{Y}_n}{\partial y_2}\right) dy_n = -\lambda \mathrm{Y}_2\, dt,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$0 = \lambda \mathrm{Y}_n\, dt.$$

On déduit de là

$$\mathrm{Y}_n = 0,$$

$$\frac{\partial \log \mathrm{Y}_1}{\partial y_n} = \frac{\partial \log \mathrm{Y}_2}{\partial y_n} = \ldots = \frac{\partial \log \mathrm{Y}_{n-1}}{\partial y_n} = \frac{-\lambda\, dt}{dy_n}.$$

Les dernières équations montrent que les fonctions $\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_{n-1}$

dépendent réellement de y_n, mais que leurs rapports mutuels en sont indépendants. On pourra donc poser pour $i < n$

$$Y_i = KY_i^0,$$

Y_i^0 étant indépendant de la variable y_n, et K, au contraire, la contenant nécessairement. On a ainsi ramené l'expression différentielle à la forme

$$\Theta_d = K(Y_1^0\,dy_1 + \ldots + Y_{n-1}^0\,dy_{n-1}),$$

qui a un terme de moins, mais qui jouit encore de la propriété de ne contenir la variable y_n que dans le facteur K. On peut encore écrire

$$(12) \qquad \Theta_d = y_n(Y_1^0\,dy_1 + \ldots + Y_{n-1}^0\,dy_{n-1}),$$

en désignant maintenant par y_n le coefficient K.

Supposons maintenant n impair. Alors le déterminant

$$\Delta = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$$

sera nul comme symétrique gauche d'ordre impair, et, par conséquent, les équations (10) ne seront jamais impossibles si l'on y fait $\lambda = 0$. Nous supposerons d'abord que tous les mineurs du premier ordre de Δ ne soient pas nuls. Dans ce cas, les équations (10), où l'on fera $\lambda = 0$, détermineront complètement les rapports des différentielles. Elles admettront donc $n - 1$ intégrales indépendantes, que nous désignerons encore par $y_1, \ldots, y_{n-1}$, et que nous prendrons pour nouvelles variables en leur adjoignant une fonction y_n, qui ne sera pas une intégrale, et formera, par conséquent, avec elles un système de n fonctions indépendantes. Alors les équations (11) devront être vérifiées par la substitution des équations

$$\lambda = 0, \quad dy_1 = 0, \quad \ldots, \quad dy_{n-1} = 0,$$

ce qui donnera

$$\frac{\partial Y_1}{\partial y_n} - \frac{\partial Y_n}{\partial y_1} = 0,$$

$$\frac{\partial Y_2}{\partial y_n} - \frac{\partial Y_n}{\partial y_2} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial Y_{n-1}}{\partial y_n} - \frac{\partial Y_n}{\partial y_{n-1}} = 0.$$

Il est aisé de trouver la forme la plus générale des fonctions satisfaisant à ces équations. Posons, en effet,

$$Y_n = \frac{\partial \Psi}{\partial y_n}, \quad Y_k = \frac{\partial \Psi}{\partial y_k} + Y_k^0.$$

Les équations exprimeront que les dérivées des fonctions Y_k^0, par rapport à y_n, sont toutes nulles. On pourra donc poser

$$\Theta_d = d\Psi + Y_1^0\, dy_1 + \ldots + Y_{n-1}^0\, dy_{n-1},$$

les fonctions Y_k^0 ne dépendant pas de y_n.

Mais ici deux cas différents peuvent se présenter. En général, Ψ contiendra y_n, et, par conséquent, $\Psi, y_1, \ldots, y_{n-1}$ seront n fonctions indépendantes. En changeant de notation, et désignant Ψ par y_n, on aura la première forme réduite

$$(13) \qquad \Theta_d = dy_n + Y_1^0\, dy_1 + \ldots + Y_{n-1}^0\, dy_{n-1}.$$

Mais il peut aussi arriver que Ψ ne contienne pas y_n. Alors on aura

$$\Theta_d = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y_1} + Y_1^0\right) dy_1 + \ldots + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y_{n-1}} + Y_{n-1}^0\right) dy_{n-1},$$

ou plus simplement

$$(14) \qquad \Theta_d = Y_1^0\, dy_1 + \ldots + Y_{n-1}^0\, dy_{n-1}.$$

Il sera, du reste, très aisé *a priori* de distinguer ces formes l'une de l'autre. La seconde, en effet, est caractérisée par cette propriété que Θ_d s'annule quand on a

$$dy_1 = 0, \quad \ldots, \quad dy_{n-1} = 0.$$

On voit donc que l'on obtiendra cette forme toutes les fois que l'équation

$$X_1\, dx_1 + \ldots + X_n\, dx_n = 0$$

sera une conséquence, une simple combinaison linéaire des équations (10), où l'on aura fait $\lambda = 0$.

Considérons, par exemple, la forme à trois variables

$$E_d = X\, dx + Y\, dy + Z\, dz = 0.$$

Le système (10) devient ici

$$(15)\qquad \frac{dx}{\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}}=\frac{dy}{\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}}=\frac{dz}{\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}}.$$

Si l'on remplace dans la forme dx, dy, dz par les quantités qui leur sont proportionnelles, on obtient l'expression bien connue

$$(16)\qquad X\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)+Y\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right)+Z\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right).$$

Si cette expression n'est pas nulle, on pourra ramener F_d à la forme

$$d\gamma - M\,d\alpha + N\,d\beta,$$

où α, β sont les intégrales du système (15), M et N des fonctions de α et de β, et γ une fonction indépendante de α, β. Si, au contraire, l'expression (16) est nulle, le terme $d\gamma$ disparaîtra et il reste

$$F_d = M\,d\alpha - N\,d\beta = \mu\,du,$$

ce qui est d'accord avec les résultats connus.

IV.

Nous avons supposé jusqu'ici que le système (10) était déterminé. Imaginons maintenant qu'il ne le soit pas. Alors, si n est pair, le déterminant

$$\Sigma \pm a_{11}\ldots a_{nn}$$

sera nul, et il en sera, par conséquent, de même de tous ses mineurs du premier ordre, en vertu d'une propriété connue des déterminants symétriques gauches. Si n est impair, les mineurs du premier ordre du même déterminant seront tous nuls.

Alors les équations (10) se réduisent à moins de n équations distinctes, et ne suffisent plus à déterminer les rapports mutuels de $dx_1, \ldots, dx_n, dt$. Mais je remarque qu'elles forment toujours un système équivalent au système (11), le raisonnement que nous avons fait pour établir cette équivalence ne souffrant pas d'exception.

Pour simplifier, supposons que l'on ait fait $\lambda = 0$. Les équations (10) seront indéterminées. Supposons qu'elles se réduisent à p équations distinctes, p pouvant être égal à zéro.

J'ajoute arbitrairement $n-p-1$ équations différentielles, par exemple, les suivantes :

$$d\varphi_1 = 0, \quad d\varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad d\varphi_{n-p-1} = 0,$$

où $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-p-1}$ sont des fonctions quelconques, et j'obtiens ainsi un système parfaitement déterminé. J'appelle encore $y_1, \ldots, y_{n-1}$ les $n-1$ intégrales du système ainsi complété, et, en leur adjoignant une fonction y_n qui ne soit pas une intégrale, j'obtiens encore n fonctions indépendantes y_i, que je substitue aux variables x_i. Le système (11), où l'on fera $\lambda = 0$, devra être vérifié, comme le premier, quand on y fera

$$dy_1 = 0, \quad \ldots, \quad dy_{n-1} = 0.$$

En raisonnant comme nous l'avons fait dans le cas où n est impair, nous serons conduits aux mêmes conclusions, et nous trouverons l'une des formes (13) ou (14). En résumé, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Une forme Θ_d à n variables peut toujours être ramenée par l'intégration du système (10) *à l'une des trois formes*

$$(A)\quad \begin{cases} y_n(Y_1\,dy_1 + \ldots + Y_{n-1}\,dy_{n-1}), \\ Y_1\,dy_1 + \ldots + Y_{n-1}\,dy_{n-1}, \\ dy_n + Y_1\,dy_1 + \ldots + Y_{n-1}\,dy_{n-1}, \end{cases}$$

où les variables $y_1, \ldots, y_{n-1}$ sont indépendantes, et où les fonctions Y_i ne dépendent que de $y_1, \ldots, y_{n-1}$. Quelques-unes de ces fonctions Y_i pourront, d'ailleurs, être nulles. La première de ces trois formes ne se présente que lorsque n est pair et le déterminant

$$\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$$

différent de zéro.

On peut encore énoncer le résultat précédent de la manière suivante. Désignons par Θ_d^n une forme différentielle à n variables.

On peut toujours ramener Θ_d^n à l'une des trois formes

$$y_n\,\Theta_d^{n-1}, \quad \Theta_d^{n-1}, \quad dy_n + \Theta_d^{n-1},$$

où y_n est une variable tout à fait indépendante de celles qui figurent dans la nouvelle expression différentielle Θ_d^{n-1}.

V.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant :

Une forme Θ_d peut toujours être ramenée à l'un des deux types suivants :

$$(17) \qquad \begin{cases} dy - z_1\,dy_1 - z_2\,dy_2 - \ldots - z_p\,dy_p, \\ \qquad z_1\,dy_1 + z_2\,dy_2 + \ldots + z_p\,dy_p, \end{cases}$$

où les fonctions $y, y_1, \ldots, z_k$ constituent un système de variables indépendantes, c'est-à-dire sont des fonctions indépendantes de toutes les variables qui entrent dans la forme Θ_d.

Le premier des deux types précédents sera appelé type *indéterminé;* l'autre sera le type *déterminé.*

Cette proposition, nous allons le démontrer, est une conséquence presque immédiate de la précédente. En effet, elle est évidente pour les formes à une et à deux variables. Il suffira donc de montrer que, si elle est vraie pour une forme à $n-1$ variables, elle l'est aussi pour une forme contenant une variable de plus.

Pour cela, nous remarquerons qu'une forme à n variables peut être ramenée à un des trois types X. Négligeant le second, qui ne dépend que de $n-1$ variables et pour lequel, par conséquent, le théorème est admis, nous remarquerons que les deux autres se composent d'une manière très simple avec la fonction à $n-1$ variables $Y_1\,dy_1 + \ldots + Y_{n-1}\,dy_{n-1}$.

Remplaçant cette forme à $n-1$ variables par l'un des deux types (17), nous obtiendrons pour la forme à n variables l'une des expressions suivantes :

$$y_n(du - z_1\,du_1 - z_2\,du_2 - \ldots - z_p\,du_p),$$
$$y_n(z_1\,du_1 + \ldots + z_p\,du_p),$$
$$dy_n + du - z_1\,du_1 - z_2\,du_2 - \ldots - z_p\,du_p,$$
$$dy_n + z_1\,du_1 + z_2\,du_2 + \ldots + z_p\,du_p.$$

où u, u_i, v_k sont des fonctions indépendantes de $y_1, \ldots, y_{n-1}$, et où, par conséquent, y_n, u, u_i, v_k sont des fonctions indépendantes des variables primitives.

Les deux dernières expressions rentrent évidemment dans le type indéterminé. Quant aux deux premières, on les ramène au second type en substituant aux fonctions $v_1, \ldots v_p$ les suivantes :

$$v_1 y_n = \pm w_1, \quad \ldots, \quad v_p y_n = \pm w_p.$$

Le théorème est donc établi. Il en résulte évidemment la conséquence suivante :

Si la forme réduite de l'expression à n variables Θ_d est

$$z_1\, dy_1 + \ldots + z_p\, dy_p,$$

les $2p$ fonctions z_i, y_k des variables x_i étant indépendantes, on a nécessairement $2p \overline{\gtrless} n$.

Si la forme réduite est

$$dy - z_1\, dy_1 - \ldots - z_p\, dy_p,$$

il faudra de même que l'on ait $2p + 1 \overline{\gtrless} n$.

VI.

Nous allons maintenant résoudre le problème suivant :

Étant donnée une forme Θ_d à n variables, auquel des deux types (17) *peut-elle être ramenée et quelle est alors la valeur du nombre p?*

Ce problème est susceptible d'une solution extrêmement simple. En effet, supposons que l'on transforme l'expression Θ_d en prenant comme nouvelles variables celles qui figurent dans la forme réduite, et d'autres d'une manière quelconque pour compléter le nombre de n fonctions indépendantes. Voyons ce que deviendra le système (10). Ce système peut se remplacer par l'unique équation

$$(18) \qquad \delta\Theta_d - d\Theta_\delta = \lambda\,\Theta_\delta\, dt.$$

qui doit avoir lieu, quelles que soient les différentielles δ. Suppo-

sons d'abord que la forme réduite de Θ_d soit

$$\Theta_d = dy - z_1\,dy_1 - z_2\,dy_2 - \ldots - z_p\,dy_p.$$

On aura

$$\delta\Theta_d - d\Theta_\delta = dz_1\,\delta y_1 - dy_1\,\delta z_1 + \ldots + dz_p\,\delta y_p - dy_p\,\delta z_p,$$

et le système (10) ou l'équation (18), qui lui est équivalente, nous donnera

$$(19)\qquad \left\{\begin{array}{ll} dy_1 = 0, & dz_1 = -\lambda z_1\,dt, \\ dy_2 = 0, & dz_2 = -\lambda z_2\,dt, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ dy_p = 0, & dz_p = -\lambda z_p\,dt, \\ & \quad 0 = \lambda\,dt. \end{array}\right.$$

On voit que l'on aura nécessairement $\lambda = 0$, et que les équations (10) se réduiront à $2p$, qui seront complètement intégrables.

Si, au contraire, la forme réduite est

$$\Theta_d = z_1\,dy_1 - \ldots - z_p\,dy_p,$$

le système (10) sera équivalent au suivant :

$$(20)\qquad \left\{\begin{array}{ll} dy_1 = 0, & dz_1 = \lambda z_1\,dt, \\ dy_2 = 0, & dz_2 = \lambda z_2\,dt, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ dy_p = 0, & dz_p = \lambda z_p\,dt. \end{array}\right.$$

Il ne sera pas nécessaire ici de faire $\lambda = 0$, ce qui distingue ce cas du premier. D'ailleurs les équations admettront $2p - 1$ intégrales indépendantes de t,

$$y_1 = C_1, \quad \frac{z_2}{z_1} = C'_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_p = C_p, \quad \frac{z_p}{z_1} = C'_{p-1}.$$

Nous pouvons donc énoncer les théorèmes suivants :

Si les équations (10), *considérées comme déterminant les différentielles dx_i, sont impossibles tant que λ est différent de zéro, la forme Θ_d est réductible au type indéterminé*

$$dy - z_1\,dy_1 - z_2\,dy_2 - \ldots - z_p\,dy_p,$$

Le nombre $2p$ est égal à celui des équations distinctes auxquelles se réduisent les équations (10) *quand on y fait $\lambda = 0$, et, par conséquent, il sera facile de le déterminer* a priori. *De plus, les $2p$ équations auxquelles se réduisent alors les équations* (10) *sont complètement intégrables, et les variables y_i, z_k de la forme réduite sont des fonctions de leurs $2p$ intégrales.*

Si les équations (10) *peuvent être vérifiées en supposant λ différent de zéro, la forme est réductible au type déterminé*

$$z_1\,dy_1 + \ldots + z_p\,dy_p.$$

Le nombre $2p$ est égal à celui des équations distinctes auxquelles se réduisent alors les équations (10). *De plus, ces équations sont toujours complètement intégrables, et l'on aurait, au moyen des variables de la forme réduite, un système d'intégrales de ces équations par les formules*

$$\begin{array}{ll} y_1 = \alpha_1, & z_1\,e^{-\int\lambda dt} = \beta_1, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots, \\ y_p = \alpha_p, & z_p\,e^{-\int\lambda dt} = \beta_p. \end{array}$$

En d'autres termes, ces équations différentielles admettent pour intégrales indépendantes de t les fonctions $y_1, \ldots, y_p$ et les quotients $\frac{z_2}{z_1}, \ldots, \frac{z_p}{z_1}$.

Comme application, étudions la forme réduite de Θ_d dans le cas le plus général.

Si n est pair, le déterminant

$$\Sigma \pm a_{11}\ldots a_{nn}$$

n'est pas nul, et l'on peut résoudre les équations (10) par rapport aux différentielles dx_i; λ n'est pas nul, et les équations (10) sont toutes distinctes. On a donc ici le second type (17), et la forme réduite est

$$z_1\,dy_1 + z_2\,dy_2 + \ldots + z_{\frac{n}{2}}\,dy_{\frac{n}{2}}.$$

Si, au contraire, n est impair, le déterminant

$$\Sigma \pm a_{11}\ldots a_{nn}$$

est nul; mais ses mineurs du premier ordre ne sont pas nuls en

général. Il faut donc, nous l'avons vu, sauf un cas exceptionnel, que $\lambda = 0$, et alors les équations se réduisent à $n - 1$ distinctes; la forme réduite est

$$dy - z_1\,dy_1 - \ldots - z_{\frac{n-1}{2}}\,dy_{\frac{n-1}{2}}.$$

VII.

Nous avons vu comment on reconnaît à quel type se rattache une forme différentielle et comment on détermine le nombre p; il resterait à indiquer les intégrations qui sont nécessaires pour ramener une expression différentielle donnée à sa forme canonique. Les belles découvertes de MM. Mayer et Lie ont beaucoup diminué la difficulté de ce sujet; mais, dans ce travail, je ne m'occuperai que des propriétés d'invariance relatives à une forme différentielle. Je vais donc me contenter d'expliquer la marche générale des intégrations, mon unique but étant de montrer que la méthode de Pfaff, appliquée à une équation aux dérivées partielles, conduit aux mêmes résultats que celle de Cauchy.

Considérons d'abord une expression différentielle

$$\Theta_d^n = X_1\,dx_1 + \ldots + X_n\,dx_n,$$

dont la forme canonique soit

$$(21) \qquad z_1\,dy_1 + \ldots + z_p\,dy_p.$$

Nous savons qu'alors le système de Pfaff

$$\delta\Theta_d - d\Theta_\delta = \lambda\Theta_\delta\,dt$$

est complètement intégrable si $2p < n$, et admet par conséquent, *dans tous les cas*, $2p - 1$ intégrales indépendantes de t. Il y aura donc toujours au moins $n - 2p - 1$ des variables x_i qui ne seront pas des intégrales. Supposons, pour fixer les idées, que ce soient les dernières

$$x_{2p}, \quad x_{2p+1}, \quad \ldots, \quad x_n.$$

Les $2p - 1$ intégrales du système de Pfaff se réduisent, quand on fait

$$x_{2p} = x_{2p}^0, \quad x_{2p+1} = x_{2p+1}^0, \quad \ldots, \quad x_n = x_n^0.$$

$x_{2p}^0, \ldots, x_n^0$ étant des constantes numériques, à des fonctions de $x_1, \ldots, x_{2p-1}$. Il y aura donc une intégrale qui se réduira à x_1, une autre à x_2, et ainsi de suite [1]. Nous désignerons par $[x_i]$ ou u_i celle de ces intégrales qui se réduit à x_i. Nous savons que les fonctions u_i dépendent uniquement des variables $y_1, \ldots, y_p$ qui figurent dans la forme canonique (21), et des quotients $\frac{z_p}{z_1}, \ldots, \frac{z_p}{z_1}$. Cela posé, prenons pour nouvelles variables

$$u_1, \quad \ldots, \quad u_{2p-1}, \quad x_{2p}, \quad \ldots, \quad x_n,$$

qui sont évidemment des fonctions indépendantes des premières.

La forme Θ_d^n deviendra

$$(22) \qquad \mathrm{K}(\mathrm{U}_1\, du_1 + \ldots + \mathrm{U}_{2p-1}\, du_{2p-1}),$$

$\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_{2p-1}$ ne dépendant que de $u_1, \ldots, u_{2p-1}$ et K contenant au contraire une ou plusieurs des variables $x_{2p}, \ldots, x_n$. Cela est aisé à démontrer de plusieurs manières. Par exemple, si l'on part de la forme canonique (21)

$$z_1\left(dy_1 + \frac{z_2}{z_1}\,dy_2 + \ldots + \frac{z_p}{z_1}\,dy_p\right),$$

on sait que $\frac{z_k}{z_1}$, y_i sont des fonctions des variables u_i. Si donc on remplace y_i, $\frac{z_k}{z_1}$ par leurs expressions en fonction des intégrales u_i et si l'on remarque que z_1 est une fonction indépendante des précédentes, on retrouve bien l'expression (22).

Je ferai remarquer que la fonction K, qui figure dans cette expression, n'est pas complètement définie. Rien n'empêche de la diviser par une fonction quelconque $\varphi(u_1, \ldots, u_{2p-1})$, à la condition de multiplier les quantités u par la même fonction φ. Mais on peut déterminer complètement K par la condition suivante :

Supposons que, pour $x_{2p} = x_{2p}^0, \ldots, x_{2n} = x_{2n}^0$, K se réduise à

---

[1] Cette classification des intégrales d'un système d'équations est, comme on sait, due à Cauchy dans le cas où il y a une seule variable indépendante. Elle a été déjà utilisée, en ce qui concerne les systèmes complètement intégrables, par M. Lie, dans le Mémoire, que nous avons déjà cité, sur le problème de Pfaff.

une fonction

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_{2p-1}).$$

Nous diviserons K par $\psi(u_1, u_2, \ldots, u_{2p-1})$, et alors la nouvelle valeur de K sera complètement définie et jouira de la propriété de se réduire à 1 quand on fera $x_{2p} = x_{2p}^0, \ldots, x_n = x_n^0$.

Cela posé, écrivons l'identité

$$X_1\,dx_1 + \ldots + X_n\,dx_n = K(U_1\,du_1 + \ldots + U_{2p-1}\,du_{2p-1}),$$

et faisons dans les deux membres $x_{2p} = x_{2p}^0, \ldots, x_n = x_n^0$. Désignons par X_p^0 ce que devient alors X_p. Comme K devient alors égal à 1, u_i égal à x_i, on aura

$$X_1^0\,dx_1 + \ldots + X_{2p-1}^0\,dx_{2p-1} = U_1\,dx_1 + \ldots + U_{2p-1}\,dx_{2p-1},$$

et par conséquent on pourra écrire

$$U_i = X_i^0,$$

ce qui nous conduit au théorème suivant :

Supposons que la forme canonique d'une expression différentielle

$$\Theta_d^n = X_1\,dx_1 + \ldots + X_n\,dx_n$$

soit

$$z_1\,dy_1 + \ldots + z_p\,dy_p.$$

Le premier système de Pfaff sera complètement intégrable si $2p < n$, et dans tous les cas admettra $2p - 1$ intégrales indépendantes. Il y aura donc toujours au moins $n - 2p + 1$ des variables x_i qui ne seront pas des intégrales de ce système. Soient $x_{2p}, \ldots, x_n$, $n - 2p + 1$ variables jouissant de cette propriété. Considérons les $2p - 1$ intégrales du système de Pfaff qui se réduisent à $x_1, \ldots, x_{2p-1}$ quand on fait $x_{2p} = x_{2p}^0, \ldots, x_n = x_n^0$, et désignons par u_i celle qui se réduit à x_i. Si l'on choisit ces intégrales pour nouvelles variables, l'expression Θ_d^n prend la forme suivante

$$K(U_1\,du_1 + \ldots + U_{2p-1}\,du_{2p-1}),$$

où l'on déduit U_h de X_h en y remplaçant respectivement $x_1, \ldots, x_{2p-1}$ par $u_1, \ldots, u_{2p-1}$; $x_{2p}, \ldots, x_n$ par les constantes $x_{2p}^0, \ldots, x_n^0$.

Considérons maintenant le cas où la forme Θ''_d est réductible au type

(23) $$dy - z_1 dy_1 - z_2 dy_2 - \ldots - z_p dy_p.$$

On sait qu'alors le système de Pfaff ne sera possible que si l'on y fait $\lambda = 0$, et que dans tous les cas il admettra $2p$ intégrales qui seront $z_1, \ldots, z_p, y_1, \ldots, y_p$. Nous pouvons ici raisonner comme précédemment. Parmi les n variables x_i, il y en aura au moins $n - 2p$ qui ne seront pas des intégrales. Soient

$$x_{2p+1}, \quad \ldots, \quad x_n$$

$n - 2p$ variables jouissant de cette propriété. Désignons par u_i celle des intégrales qui se réduit à x_i quand on remplace $x_{2p+1}, \ldots, x_n$ par les constantes numériques $x^0_{2p+1}, \ldots, x^0_n$. Enfin effectuons un changement de variables qui substitue aux variables primitives les suivantes

$$u_1, \quad \ldots, \quad u_{2p}, \quad x_{2p+1}, \quad \ldots, \quad x_n.$$

On aura, pour la nouvelle forme de l'expression différentielle,

(24) $$dH + U_1 du_1 + \ldots + U_{2p} du_{2p}.$$

En effet, dans la forme canonique (23), les variables z_i, y_k, qui sont les intégrales du système de Pfaff, peuvent être regardées comme des fonctions de $u_1, \ldots, u_{2p}$. Si donc on les supposait exprimées en fonction de $u_1, \ldots, u_{2p}$, on obtiendrait bien un résultat de la forme précédente.

Dans l'expression (24), la fonction H n'est pas définie et il est clair que cette expression ne changerait pas si on remplaçait H par

$$H - \varphi(u_1, \quad \ldots, \quad u_{2p}),$$

à la condition d'ajouter $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_i}$ à U_i. Si H se réduit à $\psi(x_1, \ldots, x_{2p})$ pour $x_{2p+1} = x^0_{2p+1}, \ldots, x_n = x^0_n$, nous conviendrons d'en retrancher

$$\psi(u_1, \quad \ldots, \quad u_{2p});$$

alors la nouvelle valeur de H se réduira à zéro pour $x_{2p+1} = x^0_{2p+1}, \ldots, x_n = x^0_n$.

Écrivons maintenant l'identité

$$X_1\, dx_1 + \ldots + X_n\, dx_n = dH + U_1\, du_1 + \ldots + U_{2p}\, du_{2p},$$

et faisons-y $x_{2p+1} = x^0_{2p+1}, \ldots, x_n = x^0_n$. Soit encore X^0_i ce que devient X_i par cette substitution. Comme u_i devient alors égal à x_i et H égal à zéro, on aura

$$X^0_1\, dx_1 + \ldots + X^0_{2p}\, dx_{2p} = U_1\, dx_1 + \ldots + U_{2p}\, dx_{2p},$$

et par conséquent

$$U_k = X^0_k.$$

Nous pouvons donc énoncer la nouvelle proposition qui suit :

Supposons que la forme canonique d'une expression différentielle

$$\Theta^n_d = X_1\, dx_1 + \ldots + X_n\, dx_n$$

soit

$$dy - z_1\, dy_1 - \ldots - z_p\, dy_p.$$

Le premier système de Pfaff ne sera possible que si l'on y fait $\lambda = 0$ *et il admettra* $2p$ *intégrales. Soient* $x_{2p+1}, \ldots, x_n$ *un système de variables qui ne fassent pas partie de ces intégrales, et désignons par* u_i *l'intégrale du système de Pfaff qui se réduit à* x_i *pour* $x_{2p+1} = x^0_{2p+1}, \ldots, x_n = x^0_n$. *L'expression* Θ^n_d *pourra être ramenée à la forme*

$$dH + U_1\, du_1 + \ldots + U_{2p}\, du_{2p},$$

où l'on déduit U_k *de* X_k *en y remplaçant* $x_1, \ldots, x_{2p}$ *respectivement par* $u_1, \ldots, u_{2p}$; $x_{2p+1}, \ldots, x_n$ *par les constantes* $x^0_{2p+1}, \ldots, x^0_n$. H *est une fonction qui se réduit à zéro pour* $x_{2p+1} = x^0_{2p+1}, \ldots, x_n = x^0_n$.

Il est bon de remarquer que H se déterminera sans difficulté par une quadrature, quand $u_1, \ldots, u_{2p}$ seront connus. Car on a

$$dH = \Theta^n_d - U_1\, du_1 - \ldots - U_{2p}\, du_{2p},$$

et tout sera connu dans le second membre.

Les deux théorèmes qui précèdent conduisent à plusieurs conséquences. On voit tout de suite que les divers systèmes d'équations différentielles auxquels conduit successivement l'application

de la méthode acquièrent en quelque sorte une existence indépendante. On peut écrire chacun d'eux avant d'avoir intégré le précédent. M. Mayer avait déjà fait des remarques analogues relativement aux systèmes complètement intégrables. On voit, de plus, qu'à partir du second système, on n'a plus d'indétermination et l'on ne rencontre plus que des formes appartenant aux deux types généraux.

On peut faire une application importante des résultats qui précèdent à la forme particulière que l'on rencontre dans la théorie des équations aux dérivées partielles.

Soit

$$p_1 = f(z, x_1, \ldots, x_n, p_2, \ldots, p_n) \tag{25}$$

une équation aux dérivées partielles, où p_i désigne $\frac{\partial z}{\partial x_i}$. Il est clair que l'intégration de cette équation est équivalente au problème suivant : *Annuler la forme*

$$\Theta_d = dz - f\,dx_1 - p_2\,dx_2 - \ldots - p_n\,dx_n$$

à $2n$ *variables* $z, x_1, \ldots, x_n, p_2, \ldots, p_n$, *en établissant* n *relations entre ces variables;* et l'on sait que la solution de ce problème n'offre aucune difficulté dès que Θ_d est ramené à la forme canonique. Or, *je dis que pour ramener* Θ_d *à la forme canonique, il suffira d'intégrer le premier système de Pfaff relatif à cette forme.*

Écrivons, en effet, ce système

$$\delta\Theta_d - d\Theta_\delta = \lambda\,\Theta_\delta\,dt,$$

ou bien

$$df\,\delta x_1 - \delta f\,dx_1 + dp_2\,\delta x_2 - \delta p_2\,dx_2 + \ldots + dp_n\,\delta x_n - dx_n\,\delta p_n$$
$$= \lambda\,dt(\delta z - f\,\delta x_1 - \ldots - p_n\,\delta x_n).$$

ce qui donne les équations

$$df - \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 \qquad = -\lambda f\,dt,$$
$$-\frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_1 + dp_2 = -\lambda p_2\,dt,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$-\frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_1 + dp_n = -\lambda p_n\,dt,$$

$$-\frac{\partial f}{\partial z}\,dx_1 \qquad\qquad = \lambda\,dt,$$

$$-\frac{\partial f}{\partial p_2}\,dx_1 - dx_2 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\frac{\partial f}{\partial p_n}\,dx_1 - dx_n = 0,$$

que l'on met aisément sous la forme suivante

$$(26)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{-1} = \dfrac{dx_2}{\dfrac{\partial f}{\partial p_2}} = \ldots = \dfrac{dx_n}{\dfrac{\partial f}{\partial p_n}} = \dfrac{-dp_2}{\dfrac{\partial f}{\partial x_2} + p_2\dfrac{\partial f}{\partial z}} = \ldots = \dfrac{-dp_n}{\dfrac{\partial f}{\partial x_n} + p_n\dfrac{\partial f}{\partial z}}, \\ dz = p_1\,dx_1 + \ldots + p_n\,dx_n. \end{array} \right.$$

On reconnaît les équations différentielles de la caractéristique.

Nous voyons ici que x_1 n'est jamais une intégrale. Désignons par $[z]$, $[p_k]$, $[x_i]$ les intégrales de ce système qui se réduisent respectivement à z, p_k, x_i pour $x_1 = x_1^0$, x_1^0 étant une constante quelconque. *Il n'y aura aucune difficulté à déterminer ces intégrales dès que le système* (26) *sera complètement intégré.* Si nous appliquons maintenant le premier des deux théorèmes que nous avons démontrés, nous voyons que l'on aura

$$(27)\quad \left\{ \begin{array}{l} dz - f\,dx_1 - p_2\,dx_2 - \ldots - p_n\,dx_n \\ \qquad = L\,\{d[z] - [p_2]\,d[x_2] - [p_3]\,d[x_3] - \ldots - [p_n]\,d[x_n]\}, \end{array} \right.$$

L dépendant de x_1. Nous obtenons ainsi du premier coup la forme réduite qui devait être le terme de nos calculs. L'équation précédente se rencontre dans la méthode de Cauchy et elle y joue un rôle fondamental. Il est inutile de revenir sur des propositions bien connues et de montrer comment elle conduit à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles proposée. Il nous suffira d'avoir établi que la méthode de Pfaff, au moyen d'un facile complément, devient aussi parfaite que les autres. Mais il est juste aussi d'ajouter que cette classification des intégrales, qui nous a permis d'arriver au but, constitue un progrès bien essentiel, qui est encore dû à Cauchy. (*A suivre.*)

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

HEINE (E.). — Handbuch der Kugelfunctionen. Theorie und Anwendungen; Zweiter Band : Anwendungen der Kugelfunctionen und der verwandten Functionen. — Berlin, G. Reiner, 1881 (¹).

Nous avons déjà rendu compte du premier Volume de la nouvelle édition que publie M. Heine (²) de son *Traité des fonctions sphériques*. Le second Volume, que nous avons sous les yeux, termine l'Ouvrage et contient les applications à la Physique mathématique et à la théorie des quadratures mécaniques. En fait, les fonctions sphériques jouent un rôle fondamental dans tous les problèmes de la théorie de l'attraction et de la chaleur. Exposer en détail toutes leurs applications équivaudrait à écrire un Traité complet de Physique mathématique. M. Heine, sans avoir cette prétention, a passé en revue les problèmes essentiels, et il a exposé les résultats les plus importants acquis à cette partie de la science par les beaux travaux de Laplace, de Gauss, de Green, de Lamé et aussi par ses propres recherches.

La première Partie traite des quadratures mécaniques. L'auteur examine avec quelque détail, en même temps que la méthode de Gauss, celle de Cotes et de Newton, fondée sur l'emploi des ordonnées équidistantes. Il termine en exposant ce qui concerne la généralisation de la méthode de Gauss et l'intégrale

$$\int_g^h f(z)\,\frac{dz}{z-x}.$$

La seconde Partie traite du potentiel. Un premier Chapitre contient les généralités et les problèmes relatifs à la sphère. Puis M. Heine examine successivement, et dans des Chapitres séparés, l'ellipsoïde de révolution, l'ellipsoïde à trois axes inégaux, le cylindre, le cône, l'emploi de la méthode des rayons vecteurs réciproques et son application à deux sphères, ainsi que le tore.

(¹) Voir *Bulletin*, II_1, 371.

(²) Décédé le 24 octobre 1881, à l'âge de 61 ans.

La troisième Partie comprend les applications à la Théorie analytique de la chaleur.

Enfin, une quatrième Partie, assez peu développée (vingt pages), comprend l'étude de quelques questions des plus simples d'Hydrodynamique.

L'Ouvrage se termine par quelques suppléments au Tome I[er], où l'auteur a eu surtout pour but de faire connaître les recherches les plus importantes, faites depuis la publication de son premier Volume.

Nous ne pouvons que confirmer l'appréciation déjà donnée lors de l'apparition du premier Volume. La publication de l'Ouvrage de M. Heine est un véritable service rendu à la Science; cette nouvelle édition, si augmentée, sera accueillie avec faveur et exercera une influence réelle sur le développement des théories au progrès desquelles l'auteur a déjà si notablement concouru par ses travaux personnels. G. D.

BELTRAMI (E.). — Sull' equilibrio delle superficie flessibili ed inestensibili (1).

L'auteur fait remarquer que le Mémoire de M. Lecornu, inséré dans le XLVIII[e] Cahier du *Journal de l'École de Polytechnique*, a, très opportunément, ramené l'attention des géomètres sur un sujet qui n'avait pas été convenablement approfondi, et qui paraissait même abandonné dans ces derniers temps. Il ajoute que M. Lecornu a suivi une méthode nouvelle, et qu'il a établi un lien étroit entre la question mécanique par lui traitée et la théorie géométrique de la déformation des surfaces. Mais la question purement mécanique de l'équilibre d'une surface flexible et inextensible avait été souvent étudiée, bien que son historique ne soit pas, à la vérité, aussi bien établi que celui d'autres questions moins intéressantes et moins compliquées.

Sans remonter jusqu'au problème de la voile de Jean Bernoulli, qui dérive de la théorie de la courbe funiculaire, M. Beltrami fait

(1) *Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna*, 4e série, t. III; 1882.

remarquer que Lagrange (*Méc. anal.*, Partie I, Section V, Chapitre III, § II) et Poisson, dans son Mémoire de 1814, *Sur les surfaces élastiques* (*Mém. de l'Inst. de France*, 1812, p. 167), avaient cherché à établir une théorie générale qui s'applique, en particulier, au cas d'une surface flexible et inextensible. Cisa de Grésy, dans ses *Considérations sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles* (*Mém. de l'Ac. de Turin*, Ire Série, t. XXIII, 1817), n'a fait autre chose que remettre en examen et discuter les hypothèses et les formules de ces deux illustres auteurs. S'ils n'ont pas à la vérité donné les véritables équations de l'équilibre, ils ont du moins indiqué clairement la voie à suivre, et leur méthode devait se prêter à l'emploi des coordonnées curvilignes.

Mais M. Beltrami insiste surtout sur les recherches de Mossotti qui, en 1851, a consacré une des leçons de son cours de Mécanique rationnelle à l'étude de l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles, en l'accompagnant de quelques exemples. M. Beltrami discute ce travail, en examinant une erreur dans laquelle est tombé Mossotti, erreur qui n'affecte pas du reste les applications faites par ce géomètre.

M. Beltrami, après avoir mis en évidence par des considérations extrêmement simples les imperfections de la marche suivie par Mossotti, établit, dans l'article 2 de son travail, le principe général de l'équilibre, et de cet unique principe il déduit les équations indéfinies et les équations aux limites en coordonnées curvilignes les plus générales. C'est une application très élégante du principe des vitesses virtuelles. De ces équations d'équilibre il déduit ensuite une théorie de la tension superficielle qui est pleinement d'accord avec celle que M. Lecornu a obtenue par des procédés géométriques.

La suite du Mémoire est consacrée à l'étude de plusieurs cas d'équilibre remarquables par leur simplicité et leur généralité. L'un d'eux avait été signalé par Poisson, les autres sont nouveaux. Cet important travail se termine par l'étude de quelques formules relatives à la déformation infiniment petite d'une surface flexible et inextensible. M. Beltrami fait remarquer que l'on pourrait aussi écrire les équations du mouvement d'une telle surface. Malheureusement, on connaît si peu de surfaces pour lesquelles on

puisse résoudre le problème de la déformation, que ces équations auraient peu d'applications utiles.

G. D.

MÉLANGES.

LISTE DES TRAVAUX SUR LES OVALES DE DESCARTES;

Par M. V. LIGUINE,
Professeur à l'Université d'Odessa.

Interrompu, par des circonstances particulières, dans la préparation d'une monographie sur les ovales de Descartes, j'ai cru qu'il y aurait un certain intérêt à publier séparément cette liste, assez complète, je l'espère, des Ouvrages et Mémoires concernant ces courbes, liste que j'ai été conduit à dresser en étudiant l'historique de la question. Outre les travaux d'une certaine étendue, il y avait lieu de citer beaucoup de questions, proposées sur les ovales dans divers journaux, principalement dans l'*Educational Times;* à ces citations j'ai ajouté les énoncés mêmes des théorèmes à démontrer, afin d'épargner aux lecteurs de pénibles recherches et de présenter en même temps une suite de propriétés relativement moins connues des ovales.

1637. *Descartes.* — La Géométrie. Livre II.

1687. *Newton.* — Philosophiæ naturalis principia mathematica. T. I : De motus corporum, lib. I, propositio 97, problema 47 et cor. 1-2.

1690. *Huygens.* — Traité de la lumière. Chap. VI.

1693. *Roberval.* — De geometrica planarum æquationum resolutione (Mémoires de l'Académie royale des Sciences depuis 1666 jusqu'à 1699. T. VI, p. 157-194).

1799. *Montucla.* — Histoire des Mathématiques. T. II, p. 129-130.

1823. *Quetelet.* — Mémoire sur une nouvelle manière de considérer les caustiques soit par réflexion soit par réfraction (Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles, t. III, p. 89-140).

1824. *Sturm.* — Recherches sur les caustiques (Annales de Gergonne. T. XV, p. 205-218).

1827. *Quetelet.* — Résumé d'une nouvelle théorie des caustiques (Nouv. Mém. de l'Acad. de Bruxelles, t. IV).

1829. *Quetelet.* — Démonstration et développement des principes fondamentaux de la théorie des caustiques secondaires (*Ibid.*, t. V).

Quetelet. — Des surfaces réfléchissantes ou dirimantes qui ont deux foyers conjugués (Correspondance mathématique et physique, publiée par Quetelet. T. V, p. 1-6).

Quetelet. — Sur les lignes dirimantes à deux foyers conjugués (*Ibid.*, p. 109-116).

Chasles. — Sur les lignes dirimantes à deux foyers conjugués (*Ibid.*, p. 116-120).

Chasles. — Sur les lignes aplanétiques (*Ibid.*, p. 188-190).

Quetelet. — Sur les lignes aplanétiques (*Ibid.*, p. 190-193).

1830. *Plana.* — Mémoire sur les caustiques (*Ibid.*, t. VII, p. 110).

1832. *Chasles.* — Sur les propriétés des coniques qui ont des foyers communs (*Ibid.*, p. 295-297).

1833. *Quetelet.* — Analogie entre la théorie des caustiques et celle des développantes et des développées (Traité de la lumière par Herschel. T. II, Supplément 6, p. 380-407).

1837. *Chasles.* — Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie. 4e époque, § 18, et Note 21.

1850. *Roberts (William).* — Théorème sur les arcs des lignes aplanétiques (Journal de Liouville, Ire série, t. XV, p. 194-196).

1850. *Cayley*. — Addition au Mémoire sur quelques transmutations des lignes courbes (*Ibid.*, p. 351-356).

1856. *Cayley*. — A Memoir upon Caustics (Philos. Transactions of the Royal Society of London. T. CXLVII, p. 273-312).

1857. *Cayley*. — On the Ovals of Descartes (The Quarterly Journal of Mathem. T. I, p. 320-328).

L'auteur, ayant en vue d'exposer plusieurs détails concernant l'histoire des recherches sur les ovales de Descartes, destine ce premier article à la reproduction textuelle du passage de la *Géométrie* de Descartes relatif aux ovales.

1858. *Mannheim*. — Constructions du centre de courbure de la courbe, lieu des points dont les distances à deux courbes données sont dans un rapport constant (Annali di Matemat. pubblic. da Tortolini. T. I, p. 364-369).

1860. *Mannheim*. — Application de la transformation par rayons vecteurs réciproques à l'étude des anticaustiques (Nouvelles Annales de Mathématiques, Ire série, t. XX, p. 220-222).

1862. *Mannheim*. — Sur les arcs des courbes planes ou sphériques considérées comme enveloppes de cercles (Journal de Liouville, 2e série, t. VII, p. 121-135).

1864. *Darboux*. — Sur les sections du tore (Nouv. Ann. de Math., 2e série, t. III, p. 156-165).

Darboux. — Théorèmes sur l'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré (*Ibid.*, p. 199-202).

1864. *Darboux*. — Remarque sur la théorie des surfaces orthogonales (Comptes rendus de l'Académie, t. LIX, p. 240-242).

Genocchi. — Intorno alla rettificazione e alle proprietà delle caustiche secondarie (Annali di Matem. pubblic. da Tortolini. T. VI, p. 97-123).

De Tronquelléon. — Sur l'intersection de deux cônes (Nouvelles Annales de Mathématiques, 2e Série, t. III, p. 539).

1866. *Crofton.* — On certain properties of the Cartesian Ovals, treated by the method of vectorial coordinates (Proceedings of the London Mathem. Society. T. I).

Crofton. — Question 1924 (Mathem. Questions from the « Educational Times », edited by Miller. T. VI, p. XVI).

L'arc d'un ovale de Descartes en un point quelconque P fait des angles égaux avec la droite tirée de P vers un foyer quelconque et la circonférence passant par P et par les deux autres foyers (pour la solution de cette question, *voir* le même Recueil, t. XXV, p. 17, question 4795).

Sylvester. — Question 1990 (*Ibid.*, p. 35, 70, 88; *voir* aussi *Ibid.*, t. VIII, p. 69).

I. Les trois points où une cubique circulaire est rencontrée par une transversale quelconque sont les foyers d'un ovale de Descartes passant par les quatre foyers de la cubique. II. Lorsqu'une circonférence et une droite rencontrent une transversale quelconque en trois points, ces points sont les foyers d'un ovale de Descartes appartenant à un système de ces ovales ayant entre eux double contact en deux points fixes. (Le second théorème est dû à M. Crofton).

1867. *Burnside.* — Question 1874 (*Ibid.* T. VII, p. 69).

Appliquer la théorie de Plücker à la détermination des foyers des ovales de D.

Sylvester. — Question 2332 (*Ibid.*, p. 74).

Démontrer que l'on ne peut construire que deux ovales de Descartes ayant un axe donné et passant par quatre points donnés, et faire voir conséquemment, à l'aide de la proposition I de la question 1990 (*voir* plus haut), que tous les ovales que l'on peut mener par quatre points donnés situés sur une même circonférence consistent exclusivement de deux *tribus* (familles de familles) dont les foyers se trouvent respectivement sur les deux cubiques circulaires ayant les quatre points donnés pour foyers.

Crofton. — Question 2280 (*Ibid.*, t. VIII, p. 66).

Un ovale de Descartes ou une ellipse sont rencontrés par une circonférence, dont un diamètre coïncide avec l'axe, en deux points dont les coordonnées bipolaires relatives à deux des foyers sont (r, r') et (s, s'). Cela posé, si l'on mène une circonférence concentrique à la première et tangente à la courbe, les coordonnées bipolaires de chaque point de contact seront

$$\left[\frac{1}{2}(r \quad s),\ \frac{1}{2}(r' \quad s')\right].$$

1867. *Crofton.* — On various properties of bicircular quartics (Proceed. of the Lond. Math. Soc., t. II, p. 33-44).

1868. *Cayley.* — Question 2573 (Math. Quest. from the Educ. Times, t. IX, p. 73).

L'enveloppe d'un cercle variable ayant pour diamètre la double ordonnée d'une cubique rectangulaire est un ovale de Descartes. (L'expression « cubique rectangulaire » est employée pour désigner une cubique à trois asymptotes réelles, ayant un diamètre formant un angle droit avec l'une des asymptotes et un angle de 45° avec chacune des deux autres, c'est-à-dire une cubique ayant pour équation $xy^2 = x^3 + bx^2 + cx + d$.)

Darboux. — Note sur une classe de courbes du quatrième degré et sur l'addition des fonctions elliptiques (Annales de l'École Normale, 1re Série, t. IV).

Panton. — Question 2562 (*Ibid.*, p. 85).

L'équation d'un ovale de Descartes, le foyer triple étant pris pour origine, est

$$[x^2 - y^2 - (\beta\gamma + \gamma\alpha - \alpha\beta)]^2 + 4\alpha\beta\gamma[2x + (\alpha + \beta + \gamma)] = 0,$$

où α, β, γ expriment les distances des trois foyers simples au foyer triple.

1869. *Panton.* — Question 2622 (*Ibid.*, t. XI, p. 56).

L'équation qui relie les distances (r_1, r_2, r_3) d'un point quelconque pris sur un ovale de Descartes aux foyers est

$$(\beta - \gamma)\alpha^{\frac{1}{2}} r_1 + (\gamma - \alpha)\beta^{\frac{1}{2}} r_2 + (\alpha - \beta)\gamma^{\frac{1}{2}} r_3 = 0,$$

α, β, γ désignant les distances des foyers au foyer triple.

Roberts (Samuel). — Question 2888 (*Ibid.*, t. XII, p. 94).

Lorsqu'un ovale de Descartes a deux foyers axiaux imaginaires et par conséquent deux foyers extra-axiaux réels, la tangente en un point quelconque est la bissectrice (intérieure ou extérieure) de l'angle formé par le rayon vecteur mené du foyer axial réel et le rayon d'un cercle passant par les foyers extra-axiaux et le point de contact, le rayon étant mené à ce dernier point. Propriété correspondante pour une conique.

Casey. — On bicircular quartics (Transactions of the Royal Irish Academy, t. XXIV, p. 457-569).

1870. *Roberts (S.).* — On the ovals of Descartes (Proceed. of the Lond. Math. Soc., t. III, p. 106-126).

1870. *Roberts* (*S.*). — Question 3151. (Math. Quest. from the Ed. Times, t. XIV, p. 21).

Dans un ovale de Descartes à nœud fini (limaçon à nœud), la différence entre les longueurs des boucles est égale à quatre fois la distance des sommets.

Crofton. — Question 2111 (*Ibid.*).

Dans un ovale de Descartes dont les deux foyers intérieurs coïncident, la différence des deux arcs interceptés par deux transversales quelconques menées du foyer extérieur est égale à une portion de droite que l'on peut déterminer.

1872. *Cayley.* — Note on the Cartesian (Quarterly Journ. of Math., t. XII, p. 16-19).

Darboux. — Mémoire sur une classe remarquable de courbes et de surfaces (Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux, t. VIII et IX, 1re Série).

1873. *Roberts* (*S.*). — Note on the expression of the length of the arc of a Cartesian by elliptic functions (Proceed. of the Lond. Math. Soc., t. V, p. 6-9).

Clifford. — Question 4010 (Math. Quest. from the Educ. Times, t. XIX, p. 73).

Les lignes de courbure d'une surface du second degré sont projetées d'un ombilic sur un plan parallèle au plan tangent en ce point suivant une série d'ovales de Descartes confocaux.

1874. *Roberts* (*S.*). — Question 4242 (*Ibid.*, t. XXI, p. 91).

Deux ovales de Descartes conjugués rencontrent l'axe en quatre points réels A, B, C, D, dans l'ordre même de ces lettres. Les diamètres axiaux peuvent alors être groupés en trois paires (AB, CD), (AC, BD), (AD, BC). Si l'on construit trois ellipses ayant leurs demi-diamètres principaux égaux aux trois paires de diamètres des ovales, la circonférence de l'ovale extérieur sera égale à la demi-somme des circonférences des ellipses construites sur (AC, BD), (AB, CD), la circonférence de l'ovale intérieur sera égale à la demi-différence des circonférences des mêmes ellipses, et les arcs des ovales compris entre l'axe et les points de contact des tangentes menées du foyer extérieur seront exprimables à l'aide d'arcs de la troisième ellipse et des circonférences des premières.

1874. *Panton*. — Question 4279 (*Ibid.*, p. 89).

La somme des aires des deux ovales de Descartes conjugués est égale au double de l'aire du cercle qui a le foyer triple pour centre et qui passe par les points de contact de la tangente double.

Catalan. — Question 27 (Nouvelle Corresp. Mathém., t. I, p. 67).

Un quadrilatère ABCD articulé en A, B, C, D a pour axe de symétrie la diagonale AC. De plus, le côté AB est fixe. Cela étant, le lieu du point de rencontre des côtés AD, BC est un ovale de Descartes (Pour la solution de cette question, *voir* le même Recueil, t. II, p. 89).

1875. *Merrifield*. — Question 4621 (Mathem. Quest. from the Educ. Times, t. XXIII, p. 64).

L'équation bipolaire d'un ovale de Descartes dont les foyers sont P et Q est

$$\frac{p}{l} - \frac{q}{m} = 1.$$

Si l'on pose PQ $= c$, le troisième foyer R est déterminé par la relation

$$\text{QR} : \text{PR} = \left(1 - \frac{c^2}{l^2}\right) : \left(1 - \frac{c^2}{m^2}\right),$$

et l'indice de réfraction est $-\frac{l}{m}$ entre P et Q, $\mp\frac{c}{l}$ entre Q et R et $\pm\frac{m}{c}$ entre R et P.

Cayley. — On the expression of the coordinates of a point of a quartic curve as functions of a parameter (Proceed. of the Lond. Math. Soc., t. VI, p. 81-83).

Johnson. — Bipolar equations. Cartesian ovals (The Analyst, t. II, p. 106-118).

1876. *Crofton*. — Question 4795 (Mathem Quest. from the Educ. Tim., t. XXV, p. 17).

Voir la question 1924 du même Recueil, t. VI, p. XVI.

Wolstenholme. — Question 4926 (*Ibid.*, p. 51).

Si dans un ovale de Descartes on mène des cordes par le foyer triple, le lieu des milieux de ces cordes est

[illegible]

1876. *Williamson.* — Question 4901 (*Ibid.*, p. 65).

Si P est un point quelconque d'un ovale de Descartes, C le centre de courbure correspondant et N le point où PC rencontre l'axe de la courbe, on a

$$\frac{NC}{PC} = \frac{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{\sin\theta},$$

α, β, γ désignant les angles formés par PC avec les trois rayons vecteurs du point P menés des foyers et θ étant l'angle entre PC et l'axe de la courbe. (Cette propriété fournit une construction géométrique du centre de courbure de l'ovale de D. en un point quelconque de cette courbe.)

Sylvester. — Question 4922 (*Ibid.*, p. 68).

En partant de la définition primitive d'un ovale de Descartes, trouver l'équation polaire de cette courbe, un foyer étant pris pour pôle et la droite qui joint les deux foyers pour axe polaire, et en déduire l'existence d'un troisième foyer sur la droite passant par les deux premiers.

Crofton. — Question 5082 (*Ibid.*, t. XXVI, p. 79).

Si θ est l'angle au sommet dans un triangle, dont la base est une ligne fixe $AB = 2c$, et si x, y sont les coordonnées du sommet, on a

$$\int\int \sin\theta\, dx\, dy = 8c(a-c),$$

l'intégration étant étendue sur un ovale de Descartes quelconque, dont les foyers intérieurs sont A, B et dont l'axe est $2a$.

1877. *Roberts (R.-A.).* — Question 5069 (*Ibid.*, t. XXVII, p. 24).

Le lieu des foyers triples d'une série d'ovales de Descartes passant par cinq points fixes est une hyperbole équilatère.

Cayley. — On the construction of Cartesian (Quarterly Journ. of Math., t. XV, p. 34).

Williamson. — Note on the Cartesian Oval (An elementary Treatise on the differential Calculus. 3rd edit., p. 411-416).

1878. *Darboux.* — Sur la rectification des ovales de Descartes (Comptes rendus de l'Acad., t. LXXXVII, p. 595-597).

Darboux. — Addition à la Note sur la rectification des ovales de Descartes (*Ibid.*, p. 741).

1878. *Roberts* (*R.-A.*). — Question 5553 (Mathem. Quest. from the Educ. Times, t. XXIX, p. 86).

Les points de contact des tangentes parallèles menées à un ovale de Descartes sont situés sur une conique qui passe par quatre points fixes.

Miller. — Question 4856 (*Ibid.*, t. XXX, p. 20).

Étant donnés les trois foyers axiaux d'un ovale de Descartes, le lieu des points de contact de sa tangente double est la conique

$$y^2 = 3x^2 - 2(\alpha + \beta + \gamma)x + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta,$$

α, β, γ désignant les distances des foyers à l'origine.

1879. *Ribaucour*. — Mémoire sur les courbes enveloppes de cercles et sur les surfaces enveloppes de sphères. (Nouv. Corresp. Math., t. V).

1880. *Dewulf*. — Extrait d'une Lettre. (Nouv. Annales de Math., 2e Série, t. XIX, p. 428-429).

L'auteur propose une nouvelle construction de la tangente à un ovale de Descartes. On donne une circonférence de cercle dont le centre est le point C, et un point fixe A. On sait que le lieu géométrique des points dont les distances au point A et au cercle (C) sont dans un rapport constant est un ovale de Descartes. Soient P un point de la courbe, N le point où PC coupe le cercle (C). Si l'on élève en P une perpendiculaire à PC qui coupe AC en P′, si l'on mène par P′ une parallèle à AN qui coupe en P″ la perpendiculaire en P à AP, si, ensuite, on élève en P′ une perpendiculaire à PP′ et en P″ une perpendiculaire à PP″, ces perpendiculaires se coupent en un point Q, et la droite PQ est la tangente en P à l'ovale de Descartes.

Williamson. — Question 6177 (Math. Quest. from the Educ. Times, t. XXXIII, p. 85).

Désignons par F, F_1, F_2 les trois foyers des ovales de Descartes, F_2 étant le foyer extérieur, et posons $FF_1 = c_2$, $FF_2 = c_1$, $F_1F_2 = c$; alors, si $mr + lr_1 = nc_2$ est l'équation de l'ovale intérieur rapporté à F et F_1, 1° son équation rapportée à F et F_2 est

$$nr - lr_2 = mc_1,$$

et son équation rapportée à F_1 et F_2 est $mr_2 - nr_1 = lc$; 2° pour avoir les équations correspondantes de l'ovale extérieur, il suffit de changer l en $-l$ dans les équations précédentes.

1881. *D'Ocagne.* — Sur la construction de la normale dans un certain mode de génération des courbes planes (Nouvelles Annales de Math., 2ᵉ série, t. XX, p. 199-200).

Liguine. — Sur les aires des courbes anallagmatiques (Bulletin des Sciences Math., 2ᵉ série, t. V, p. 250-264).

1882. *Barbarin.* — Note sur les coordonnées bipolaires (Nouv. Annales de Math., 3ᵉ série, t. I, p. 15-28).

SUR LE PROBLÈME DE PFAFF;

PAR M. G. DARBOUX.

(Suite.)

DEUXIÈME PARTIE.

VIII.

La proposition relative aux propriétés d'invariance du système (10), qui nous a été si utile dans la première Partie de ce travail, est susceptible d'une généralisation que nous allons maintenant exposer.

Considérons, en même temps que la forme

$$\Theta_d = X_1 dx_1 + \ldots + X_n dx_n,$$

d'autres formes $\Theta_d^1, \Theta_d^2, \ldots, \Theta_d^{2p}$, définies par les équations

$$\Theta_d^k = X_1^k dx_1 + \ldots + X_n^k dx_n.$$

Assujettissons les variables x_i et des variables t_i à satisfaire aux équations différentielles

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11} dx_1 + \ldots + a_{n1} dx_n = X_1^1 dt_1 + X_1^2 dt_2 + \ldots + X_1^p dt_p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} dx_1 + \ldots + a_{nn} dx_n = X_n^1 dt_1 + \ldots\ldots\ldots + X_n^p dt_p. \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1^{p+1} dx_1 + \ldots + X_n^{p+1} dx_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_1^{2p+1} dx_1 + \ldots + X_n^{2p+1} dx_n = 0 \end{array} \right.$$

qui sont au nombre de $n+p-1$, et qui, par conséquent, forment un système déterminé. On peut écrire ces équations sous la forme abrégée

$$(2)\quad \begin{cases} \delta\Theta_d - d\Theta_\delta = \Theta_\delta^1\,dt_1 + \ldots + \Theta_\delta^p\,dt_p, \\ \Theta_d^{p+1} = 0, \quad \ldots, \quad \Theta_{d=0}^{2p-1} = 0, \end{cases}$$

en supposant que la première ait lieu pour toutes les valeurs attribuées aux différentielles auxiliaires δ.

Le système (1) étant écrit sous la forme (2), on reconnaît immédiatement qu'il exprime des propriétés indépendantes de tout choix de variables, et, par conséquent, il aura les propriétés d'invariance du système (10) de notre première Partie.

Si l'on remplace les variables x_i par n variables y_i, et que la forme Θ_d^h devienne

$$\Theta_d^h = Y_1^h\,dy_1 + \ldots + Y_n^h\,dy_n,$$

le système (1) prendra la forme

$$(3)\quad \begin{cases} b_{11}\,dy_1 + \ldots + b_{n1}\,dy_n = Y_1^1\,dt_1 + \ldots + Y_1^p\,dt_p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{1n}\,dy_1 + \ldots + b_{nn}\,dy_n = Y_n^1\,dt_1 + \ldots + Y_n^p\,dt_p, \\ Y_1^{p-1}\,dy_1 + \ldots + Y_n^{p-1}\,dy_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_1^{2p-1}\,dy_1 + \ldots + Y_n^{2p-1}\,dy_n = 0, \end{cases}$$

les quantités b_{ik} ayant la signification déjà donnée.

Si l'on considère maintenant une nouvelle forme Θ_d^{2p}, le quotient

$$(4)\quad \frac{\Theta_d^{2p}}{dt_q} = X_1^{2p}\frac{dx_1}{dt_q} + \ldots + X_n^{2p}\frac{dx_n}{dt_q},$$

q désignant l'une quelconque des variables $t_1, \ldots, t_n$, se transformera dans l'expression

$$Y_1^{2p}\frac{dy_1}{dt_q} + \ldots + Y_n^{2p}\frac{dy_n}{dt_q},$$

et il se formera de la même manière, soit au moyen des anciennes variables et du système (1), soit au moyen des nouvelles et du système (3). En d'autres termes, ce quotient sera un invariant

absolu pour tout changement de variables. Il n'y a, d'ailleurs, aucune difficulté à le calculer; il suffit d'éliminer entre les équations (3) et (4) les différentielles dx_i, dt_α, et l'on obtient le résultat suivant :

Posons, pour abréger,

$$(5)\quad \begin{vmatrix} \Theta_d^1 & \Theta_d^2 & \dots & \Theta_d^p \\ \Theta_d^{q+1} & \Theta_d^{q+2} & \dots & \Theta_d^{q+p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} & X_1^1 & \dots & X_1^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} & X_n^1 & \dots & X_n^p \\ X_1^{q+1} & \dots & X_n^{q+1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_1^{q+p} & \dots & X_n^{q+p} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

On trouvera, par exemple,

$$(6)\quad \frac{\Theta_d^{2p}}{dt_p} = - \frac{\begin{vmatrix} \Theta_d^1 & \dots & \Theta_d^p \\ \Theta_d^{p+1} & \dots & \Theta_d^{2p} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Theta_d^1 & \dots & \Theta_d^{p-1} \\ \Theta_d^{p+1} & \dots & \Theta_d^{2p-1} \end{vmatrix}}.$$

Remarquons que, si l'on avait $p = 1$, le dénominateur devrait être remplacé par

$$\Delta = \Sigma \pm a_{11} \dots a_{nn}.$$

D'après cela, si l'on considère $2n$ formes et que l'on désigne, pour un moment, par A_k le déterminant

$$\begin{vmatrix} \Theta_d^1 & \dots & \Theta_d^k \\ \Theta_d^{n+1} & \dots & \Theta_d^{n+k} \end{vmatrix},$$

les quotients

$$\frac{A_n}{A_{n-1}}, \quad \frac{A_{n-1}}{A_{n-2}}, \quad \dots, \quad \frac{A_1}{\Delta}$$

sont des invariants absolus. Mais on a

$$(-1)^n A_n = \begin{vmatrix} X_1^1 & \dots & X_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ X_n^1 & \dots & X_n^n \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} X_1^{n+1} & \dots & X_n^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ X_1^{2n} & \dots & X_n^{2n} \end{vmatrix},$$

et il est aisé de voir que, si l'on remplace les variables x_i par d'autres variables y_i, chacun des déterminants qui figurent dans le second membre de cette équation se reproduit multiplié par le

déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial(x_1\ldots x_n)}{\partial(y_1\ldots y_n)}$$

ou déterminant de la substitution. Donc A_n et, par conséquent, $A_{n-1}, \ldots, A_1, \Delta$ se reproduisent multipliés par le carré de ce déterminant.

Par suite, toutes les fonctions

$$\begin{Bmatrix} \Theta_d^1 & \Theta_d^2 & \ldots & \Theta_d^q \\ \Theta_d^{p+1} & \Theta_d^{p+2} & \ldots & \Theta_d^{p+q} \end{Bmatrix}$$

sont des invariants relatifs *que l'on transformera en invariants absolus en les divisant par l'une d'elles, par exemple par Δ.*

Je ne m'arrêterai pas à montrer comment on peut exprimer toutes ces fonctions au moyen des plus simples d'entre elles $\begin{Bmatrix} \Theta_d^i \\ \Theta_d^k \end{Bmatrix}$, et je me contenterai, pour cet objet, de renvoyer à mon Mémoire *Sur la théorie algébrique des formes quadratiques, où se trouve résolue une question analogue.* Mais il y a une propriété que j'établirai en terminant cet article : *Toutes les fois que ces invariants contiendront sur leurs deux lignes la forme Θ_d elle-même, qu'ils auront, par conséquent, pour expression*

$$\Lambda = \begin{Bmatrix} \Theta_d & \Theta_d^1 & \ldots & \Theta_d^h \\ \Theta_d & \Theta_d^{h+1} & \ldots & \Theta_d^{2h} \end{Bmatrix},$$

ils jouiront de la propriété de se reproduire multipliés par une puissance de ρ, quand on remplacera la forme Θ_d par $\rho\Theta_d$, ρ étant, d'ailleurs, une fonction quelconque des variables indépendantes.

En effet, considérons l'expression de Λ sous forme de déterminant

$$\Lambda = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} & X_1 & X_1^1 & \ldots & X_1^h \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} & X_n & X_n^1 & \ldots & X_n^h \\ X_1 & \ldots & X_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ X_1^{h+1} & \ldots & X_n^{h+1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_1^{2h} & \ldots & X_n^{2h} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

Si l'on multiplie Θ_d par ρ, il faudra, dans le déterminant précédent, remplacer X_i par ρX_i, a_{ik} par $\rho a_{ik} + X_i \frac{\partial\rho}{\partial x_k} - X_k \frac{\partial\rho}{\partial x_i}$. Après avoir effectué cette substitution, ajoutons à la $k^{\text{ième}}$ ligne la $n+1^{\text{ième}}$ multipliée par $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x_k}$, et à la $i^{\text{ième}}$ colonne la $n+1^{\text{ième}}$ multipliée par $\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}$. Nous obtiendrons alors l'ancienne expression de A, où tout élément compris dans le carré formé par les $n+1$ premières lignes et colonnes aura été multiplié par ρ. Le déterminant A se reproduira donc multiplié par ρ^{n+1-h}.

IX.

Nous allons appliquer les propositions précédentes, mais en considérant seulement les formes les plus générales. Nous avons vu, d'ailleurs, à l'article VII, que tous les cas peuvent se ramener presque immédiatement à ceux que nous avons l'intention d'étudier.

Supposons d'abord n pair et égal à $2m$. La forme réduite peut alors s'écrire

$$\Theta_d = p_1\,dx_1 + \ldots + p_m\,dx_m;$$

je considérerai seulement les deux invariants suivants.

Le premier s'obtient avec la forme fondamentale et la différentielle d'une fonction quelconque φ; son expression générale est

$$(7)\qquad \left\{\begin{matrix}\Theta_d \\ d\varphi\end{matrix}\right\} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} & X_1 \\ a_{12} & \ldots & \ldots & a_{n2} & X_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} & X_n \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} & 0 \end{vmatrix}.$$

Nous emploierons avec Clebsch le symbole (φ) pour désigner le quotient

$$(8)\qquad (\varphi) = \frac{1}{\Delta}\left\{\begin{matrix}\Theta_d \\ d\varphi\end{matrix}\right\},$$

qui sera un invariant absolu.

Le second invariant que nous considérerons sera le suivant

$$\left\{ \begin{array}{c} d\varphi \\ d\psi \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial\psi}{\partial x_n} & 0 \end{vmatrix},$$

et nous poserons

$$(9) \qquad (\varphi\psi) = \frac{-1}{\Delta} \left\{ \begin{array}{c} d\varphi \\ d\psi \end{array} \right\},$$

en sorte que $(\varphi\psi)$ sera encore un invariant absolu.

Si l'on calcule les deux symboles (φ), $(\varphi\psi)$ avec les variables de la forme réduite, on obtient sans difficulté, par quelques combinaisons de lignes ou de colonnes,

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\varphi) = p_1 \dfrac{\partial\varphi}{\partial p_1} + \dots + p_m \dfrac{\partial\varphi}{\partial p_m}, \\ (\varphi\psi) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial p_1} \dfrac{\partial\psi}{\partial x_1} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} \dfrac{\partial\psi}{\partial p_1} + \dots + \dfrac{\partial\varphi}{\partial p_m} \dfrac{\partial\psi}{\partial x_m} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_m} \dfrac{\partial\psi}{\partial p_m}. \end{array} \right.$$

Les deux symboles que nous venons de définir sont des cas particuliers du suivant qui joue un rôle fondamental dans la théorie des équations aux dérivées partielles, qui s'applique à des fonctions de $2m+1$ variables z, x_i, p_k, et qui est défini par l'équation

$$(11) \quad [\varphi\psi] = \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial\psi}{\partial z}\right) - \frac{\partial\psi}{\partial p_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + \dots$$

Ici nos fonctions ne dépendent pas de z. On a donc

$$(\varphi\psi) = [\varphi\psi].$$

Mais il est clair que l'on a aussi

$$(12) \qquad (\varphi) = [\varphi z].$$

En vertu de cette remarque, les relations établies entre les symboles (φ), $(\varphi\psi)$ par Clebsch peuvent toutes se déduire d'une équation générale donnée par M. Mayer (*Mathematische Annalen*,

t. IX, p. 370). M. Mayer a montré que, si l'on considère trois fonctions φ, ψ, χ des $2m+1$ variables z, x_i, p_k, on a

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\big[\varphi[\psi\chi]\big]+\big[\psi[\chi\varphi]\big]+\big[\chi[\varphi\psi]\big]\\ &\quad=\frac{\partial\varphi}{\partial z}[\psi\chi]+\frac{\partial\psi}{\partial z}[\chi\varphi]+\frac{\partial\chi}{\partial z}[\varphi\psi].\end{aligned}\right.$$

Si l'on applique cette relation à trois fonctions ne contenant pas z, on en déduit la relation de Jacobi

$$(14)\qquad \big(\varphi(\psi\chi)\big)+\big(\psi(\chi\varphi)\big)+\big(\chi(\varphi\psi)\big)=0,$$

entre les symboles $(\varphi\psi)$.

Si l'on pose $\chi=z$, et si l'on suppose les fonctions φ, ψ indépendantes de z, on trouve de même

$$(15)\qquad \big(\varphi(\psi)\big)-\big(\psi(\varphi)\big)=(\varphi\psi)+\big((\varphi\psi)\big).$$

Telles sont les deux relations qui servent de base à la méthode d'intégration de Clebsch.

X.

Je vais faire une application des résultats qui précèdent à l'étude des relations entre deux réduites différentes d'une même forme.

Considérons une expression différentielle Θ_d et soit

$$p_1 dx_1+\ldots+p_m dx_m$$

une première forme réduite ; je dis d'abord que, toutes les fois que l'on pourra trouver m fonctions $X_1, \ldots, X_m$, donnant naissance à une identité de la forme

$$(16)\qquad p_1 dx_1+\ldots+p_m dx_m = P_1 dX_1+\ldots+P_m dX_m,$$

le second membre de cette égalité sera une forme réduite nouvelle. Pour cela, il suffira de démontrer que les fonctions X_i, P_k sont indépendantes, et cela est à peu près évident; car s'il y avait une ou plusieurs relations entre les variables X_i, P_k, on pourrait, au moyen de ces relations, exprimer quelques-unes de ces fonctions

au moyen des autres, et par conséquent ramener

$$\Theta_d = P_1 dX_1 + \ldots + P_m dX_m,$$

à une forme normale contenant moins de $2m$ fonctions. On sait que cela est impossible et l'on peut conclure que, si m fonctions X_i satisfont à l'équation (16), le second membre de cette équation sera certainement une nouvelle forme réduite de Θ_d. En d'autres termes, les fonctions X_i, P_k seront indépendantes.

Cela posé, les deux symboles (φ), $(\varphi\psi)$, étant des invariants absolus, conserveront la même valeur quand on les formera en considérant φ, ψ, soit comme des fonctions de X_i, P_k, soit comme des fonctions de x_i, p_k.

On aura donc

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum p_i \frac{\partial\varphi}{\partial p_i} = \sum P_i \frac{\partial\varphi}{\partial P_i}, \\ &\sum \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i} - \frac{\partial\psi}{\partial p_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \sum \frac{\partial\varphi}{\partial P_i}\frac{\partial\psi}{\partial X_i} - \frac{\partial\varphi}{\partial X_i}\frac{\partial\psi}{\partial P_i}. \end{aligned} \right.$$

Appliquant ces équations générales aux fonctions X_i, P_k elles-mêmes, nous obtenons sans difficulté les équations suivantes

$$(18)\quad \left\{ \begin{aligned} &(P_i) = P_i, \quad (X_i) = 0, \\ &(P_i X_i) = 1, \quad (P_i X_k) = 0, \quad (X_i X_k) = 0, \quad (P_i P_k) = 0. \end{aligned} \right.$$

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Si m fonctions X_i des $2m$ variables x_i, p_k satisfont à une identité différentielle de la forme

$$P_1 dX_1 + \ldots + P_m dX_m = p_1 dx_1 + \ldots + p_m dx_m,$$

les $2m$ fonctions X_i P_k sont indépendantes et elles satisfont aux relations

$$(P_i) = P_i, \quad (X_i) = 0,$$
$$(P_i X_i) = 1, \quad (P_i X_k) = 0, \quad (X_i X_k) = 0, \quad (P_i P_k) = 0.$$

Les deux premières équations expriment que P_i est une fonction homogène de degré 1 et X_i une fonction homogène de degré 0 des variables p_k. C'est ce que mettent en évidence les équations *finies* données par Clebsch, qui permettent de passer d'une forme

normale à toute autre. Je ne reviens pas sur ce point, qui est bien connu.

Je vais maintenant établir une proposition fondamentale et dont M. Lie a fait le plus heureux usage dans sa théorie des groupes : *Si l'on a k fonctions indépendantes* $X_1, X_2, \ldots, X_k$ *satisfaisant aux équations*

$$(X_i) = 0, \quad (X_i X_h) = 0,$$

il sera possible de trouver une forme normale dont feront partie les k fonctions

$$P_1 dX_1 + \ldots + P_k dX_k + P_{k+1} dX_{k+1} + P_m dX_m$$
$$= p_1 dx_1 + \ldots + p_m dx_m.$$

Je commencerai par démontrer cette proposition dans le cas où l'on a une seule fonction X_1. Alors, je détermine une fonction P_1 par les deux équations

$$(19) \qquad (P_1) = P_1, \quad (P_1 X_1) = 1.$$

Il est aisé de voir que ces équations ne sont pas incompatibles.

La première nous montre que l'on aura

$$P_1 = p_1 \varphi\left(x_1, \ldots, x_m, \frac{p_2}{p_1}, \ldots, \frac{p_m}{p_1}\right),$$

et, si nous nous rappelons qu'en vertu de l'équation

$$(X_1) = 0,$$

à laquelle satisfait X_1, cette fonction est homogène de degré zéro par rapport aux variables p_i, nous reconnaîtrons sans difficulté que l'équation

$$(P_1 X_1) = 1$$

se réduit à une relation entre les dérivées de φ et les variables x_i, $\frac{p_i}{p_1}$ dont elle dépend. Ainsi, il est toujours possible, et d'une infinité de manières, de déterminer une fonction P_1 satisfaisant aux deux équations (19). Il suffira de prendre une intégrale d'une équation linéaire à $2m - 1$ variables indépendantes.

Supposons donc P_1 déterminé. Considérant la forme

$$U_d = p_1 dx_1 + \ldots + p_m dx_m - P_1 dX_1,$$

nous allons faire voir qu'elle appartient au type

$$(20) \qquad P_2 dX_2 + \ldots + P_m dX_m,$$

ce qui démontrera la proposition que nous avons en vue.

Pour cela, j'écris le système des équations différentielles de Pfaff, relatif à cette forme U_d. On a

$$\delta U_d - d U_\delta = \delta p_1 dx_1 - dp_1 \delta x_1 + \ldots + dP_1 \delta X_1 - dX_1 \delta P_1,$$

ce qui permet de former les équations différentielles cherchées sous la forme suivante

$$(21) \qquad \begin{cases} dx_i - \dfrac{\partial P_1}{\partial p_i} dX_1 + \dfrac{\partial X_1}{\partial p_i} dP_1 = - P_1 \dfrac{\partial X_1}{\partial p_i} \lambda dt, \\ dp_i - \dfrac{\partial P_1}{\partial x_i} dX_1 + \dfrac{\partial X_1}{\partial x_i} dP_1 = \lambda dt \left(p_i - P_1 \dfrac{\partial X_1}{\partial x_i} \right). \end{cases}$$

Je vais démontrer que ces $2m$ équations peuvent être vérifiées sans que l'on fasse $\lambda = 0$ et que deux d'entre elles sont la conséquence des autres. Introduisons les inconnues auxiliaires dX_1, dP_1 en fonction desquelles les différentielles dx_i, dp_i se déterminent; et essayons de déterminer dX_1, dP_1 en portant les valeurs de dx_i, dp_k dans les expressions développées de dX_1, dP_1,

$$dX_1 = \sum \frac{\partial X_1}{\partial x_i} dx_i + \sum \frac{\partial X_1}{\partial p_i} dp_i,$$

$$dP_1 = \sum \frac{\partial P_1}{\partial x_i} dx_i + \sum \frac{\partial P_1}{\partial p_i} dp_i;$$

nous obtiendrons ainsi les deux équations

$$[(P_1 X_1) - 1](dP_1 + \lambda P_1 dt) = \lambda dt [(P_1) - P_1],$$

$$[(P_1 X_1) - 1] dX_1 = \lambda dt (X_1),$$

qui sont identiquement vérifiées. Donc les équations (21) peuvent être vérifiées sans qu'on fasse $\lambda = 0$; elles admettent une indéter-

mination du second degré, et par suite la forme U_d appartient au type (20), comme il fallait l'établir.

Il nous reste à démontrer d'une manière générale que, si l'on a k fonctions indépendantes $X_1, \ldots, X_k$, satisfaisant aux équations

$$(X_h) = 0, \quad (X_h X_{h'}) = 0,$$

il sera possible de trouver une forme normale dont elles fassent partie. Puisque nous avons démontré le théorème pour une fonction, il suffit de prouver que, s'il est vrai pour $k-1$ fonctions $X_1, \ldots, X_{k-1}$, il sera vrai pour une fonction de plus, V, sous la condition que cette fonction V satisfasse aux équations

(22) $$(V) = 0, \quad (V X_i) = 0,$$

et ne soit liée aux premières par aucune relation, indépendante des variables.

Soit

$$P_1 dX_1 + \ldots + P_{k-1} dX_{k-1} + P_k dX_k + \ldots + P_n dX_n$$

une des formes normales dont font partie les $k-1$ fonctions $X_1, \ldots, X_{k-1}$. Si l'on exprime V au moyen des variables X_i, P_k, les équations (22) deviendront, en vertu des propriétés d'invariance des symboles (φ), $(\varphi\psi)$,

(23) $$P_k \frac{\partial V}{\partial P_k} + \ldots + P_n \frac{\partial V}{\partial P_n} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial P_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial P_{k-1}} = 0.$$

La fonction V est donc indépendante de $P_1, \ldots, P_{k-1}$, mais elle ne l'est pas nécessairement de $X_1, \ldots, X_{k-1}$. Faisons pour un instant ces dernières variables constantes. Comme, par hypothèse, la fonction V n'en dépend pas uniquement, elle demeure variable; et comme elle satisfait à la première des équations (23), on voit, d'après la proposition démontrée en premier lieu, que l'on pourra ramener

$$P_k dX_k + \ldots + P_m dX_m$$

à une forme normale

$$P'_k dV + P'_{k+1} dX'_{k+1} + \ldots + P'_m dX'_m,$$

qui contiendra V. Mais on a regardé $X_1, \ldots, X_{k-1}$ comme con-

stantes ; si on les rend variables, l'expression précédente s'augmentera de termes en $dX_1, \ldots, dX_{k-1}$ et l'on aura, par conséquent,

$$\begin{aligned} P_k dX_k + \ldots + P_m dX_m = P'_k dV \\ + P'_{k+1} dX'_{k+1} + \ldots + P'_m dX'_m + A_1 dX_1 + A_2 dX_2 + \ldots + A_{k-1} dX_{k-1}. \end{aligned}$$

Ainsi la forme normale primitive

$$P_1 dX_1 + \ldots + P_{k-1} dX_{k-1} + P_k dX_k + \ldots + P_m dX_m$$

se changera dans la suivante

$$\begin{aligned} (P_1 + A_1) dX_1 + \ldots + (P_{k-1} + A_{k-1}) dX_{k-1} \\ + P'_k dV + P'_{k+1} dX'_{k+1} + \ldots + P'_m dX'_m, \end{aligned}$$

qui contient bien les k fonctions

$$X_1, \ \ldots, \ X_{k-1}, \ V ;$$

le théorème est donc démontré généralement.

En résumé, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Toutes les fois que l'on aura des fonctions indépendantes $X_1, \ldots, X_r$ *des variables* x_i, p_k, *homogènes et de degré zéro par rapport aux variables* p_i, *et satisfaisant en outre aux équations*

$$(X_\alpha X_\beta) = 0,$$

il sera possible de leur adjoindre $2m - r$ *autres fonctions donnant naissance à l'identité différentielle*

$$p_1 dx_1 + \ldots + p_m dx_m = P_1 dX_1 + \ldots + P_m dX_m.$$

Le cas où $r = m$ *n'est pas exclu. Les fonctions* X_i, P_i *seront toutes homogènes par rapport aux variables* p_i, *les premières du degré* 0, *les autres du degré* 1. *Elles auront une forme quelconque par rapport aux variables* X_i.

Ce théorème important donne naissance, par un simple changement de notation, à une autre proposition fondamentale que nous allons exposer.

On peut donner une forme nouvelle à l'identité

$$(41) \qquad p_1 dx_1 + \ldots + p_m dx_m = P_1 dX_1 + \ldots + P_m dX_m.$$

Posons

$$\left.\begin{array}{ll} p_i = p_m q_i, & x_m = -z, \\ P_i = P_m Q_i, & X_m = -Z, \end{array}\right\} p_m = \rho P_m.$$

Elle deviendra

$$dZ - Q_1 dX_1 - \ldots - Q_{m-1} dX_{m-1} = \rho(dz - q_1 dx_1 - \ldots - q_{m-1} dx_{m-1}).$$

Considérons une fonction φ des variables x_i, p_i, homogène et de degré μ par rapport aux variables p_i. Elle prendra la forme

$$\varphi = p_m^\mu f(q_1, \ldots, q_{m-1}, x_1, \ldots, x_{m-1}, z),$$

et l'on aura

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} = p_m^{\mu-1}\frac{\partial f}{\partial q_1}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = p_m^\mu \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = p_m^\mu \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_{m-1}} = p_m^{\mu-1}\frac{\partial f}{\partial q_{m-1}}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_{m-1}} = p_m^\mu \frac{\partial f}{\partial x_{m-1}},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_m} = p_m^{\mu-1}\left[\mu f - q_1\frac{\partial f}{\partial q_1} - \ldots - q_{m-1}\frac{\partial f}{\partial q_{m-1}}\right].$$

Si nous calculons de même les dérivées d'une autre fonction φ_1, de degré μ_1 par rapport aux variables p_i, et que l'on substitue toutes ces dérivées dans le symbole $(\varphi\varphi_1)$, on aura

$$(\varphi\varphi_1) = p_m^{\mu+\mu_1-1}[ff_1] - p_m^{\mu+\mu_1-1}\left[\mu f \frac{\partial f_1}{\partial z} - \mu_1 f_1 \frac{\partial f}{\partial z}\right],$$

$[ff_1]$ désignant l'expression

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + q_1\frac{\partial f_1}{\partial z}\right] - \frac{\partial f_1}{\partial q_1}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} + q_1\frac{\partial f}{\partial z}\right] + \ldots.$$

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de fonctions homogènes de degré zéro; on aura $\mu = \mu_1 = 0$,

$$(25) \qquad (\varphi\varphi_1) = \frac{[ff_1]}{p_m}.$$

Si maintenant on opère de même avec les variables Z, Q_i, X_k, et si l'on applique la seconde équation (17), on aura

$$\frac{[ff_1]_z}{p_m} = \frac{[ff_1]_Z}{P_m},$$

les lettres z, Z placées en indice indiquant le système de variables avec lequel on forme le crochet. Nous pouvons donc écrire

$$(26)\qquad [ff_1]_z = \rho[ff_1]_Z.$$

Si nous appliquons cette équation à toutes les fonctions Z, X_i, Q_k nous en conclurons

$$[X_iZ] = 0,\quad [X_iX_k] = 0,\quad [Q_iQ_k] = 0,$$
$$[ZQ_k] + \rho Q_k = 0,\quad [Q_iX_i] = \rho.$$

On a donc, en changeant les notations, la proposition suivante :

Considérons $2m+1$ *fonctions* Z, X_i, P_k, *satisfaisant à l'identité différentielle*

$$(27)\qquad dZ - P_1\,dX_1 - \ldots - P_m\,dX_m = \rho(dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_m\,dx_m);$$

ces fonctions sont nécessairement indépendantes. Elles satisfont en outre aux relations

$$(28)\qquad \begin{cases} [ZX_i] = 0, & [X_iX_k] = 0, \\ [P_iX_i] = \rho, & [P_iX_k] = 0, \quad [P_iP_k] = 0, \\ [ZP_k] + \rho P_k = 0. \end{cases}$$

Réciproquement, toutes les fois que l'on aura k *fonctions indépendantes* $Z, X_1, \ldots, X_{k-1}$, *dont les crochets seront tous nuls, on pourra leur adjoindre d'autres fonctions telles que l'identité* (27) *soit satisfaite.*

Il est essentiel d'ajouter aux équations (28) les relations suivantes, que l'on obtient en appliquant la formule de M. Mayer à trois des fonctions Z, X_i, P_k

$$(29)\qquad \begin{cases} [\rho Z] = \rho^2 - \rho\dfrac{\partial Z}{\partial z}, \\ [\rho X_i] = -\rho\dfrac{\partial X_i}{\partial z}, \\ [\rho P_i] = -\rho\dfrac{\partial P_i}{\partial z}. \end{cases}$$

Ces formules, qu'on pourrait démontrer directement, doivent être

jointes aux équations (28), si l'on veut avoir l'équivalent des relations (18) relatives aux fonctions satisfaisant à l'identité (16).

Signalons encore un cas particulier de la proposition précédente : *On peut satisfaire à l'équation* (27) *en prenant arbitrairement* Z, *et alors* φ *devra satisfaire uniquement à la première des équations* (29).

XI.

Supposons maintenant n impair et égal à $2m+1$. Le déterminant $\Delta = \Sigma\, a_{11} \ldots a_{nn}$ sera nul; mais, si nous nous bornons au cas général, tous ses mineurs du premier ordre ne seront pas nuls. Tant que l'invariant R, défini par la formule

$$(30)\qquad R^2 = \begin{Bmatrix} \Theta_d \\ -\Theta_d \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} & X_1 \\ a_{12} & \ldots & a_{n2} & X_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & X_n \\ -X_1 & \ldots & -X_n & 0 \end{vmatrix}$$

ne sera pas nul, Θ_d appartiendra au type indéterminé, et sa forme réduite pourra s'écrire

$$dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_m\,dx_m.$$

Nous considérons les deux invariants suivants.

Le symbole (φ) sera défini par la formule

$$(31)\qquad R^2(\varphi)^2 = \begin{Bmatrix} d\varphi \\ -d\varphi \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n} \\ -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \ldots & -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n} & 0 \end{vmatrix}$$

et le symbole $[\varphi\psi]$ par la relation

$$(32)\qquad R^2[\varphi\psi] = \begin{Bmatrix} \Theta_d & d\varphi \\ \Theta_d & -d\psi \end{Bmatrix}.$$

D'après les propriétés des déterminants symétriques gauches, tous ces invariants sont rationnels.

Si on les calcule sur la forme réduite, on trouvera

$$(33)\quad \begin{cases} R^2 = 1, \\ (\varphi)^2 = \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2, \\ [\varphi\psi] = \dfrac{\partial\varphi}{\partial p_1}\left[\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1} + p_1\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\right] - \dfrac{\partial\psi}{\partial p_1}\left[\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} + p_1\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right] + \dots. \end{cases}$$

Nous prendrons

$$(\varphi) = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Il suffira, quand on prendra les racines carrées dans la formule (31), de choisir le signe du second membre de telle manière que l'invariant absolu (φ) se réduise à $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$, lorsqu'on le calculera sur la forme réduite.

L'invariant R appartient à la classe de ceux que nous avons considérés à la fin de l'article VIII, et il est aisé de reconnaître qu'il se reproduira multiplié par ρ^{n+1}, quand on multipliera la forme Θ_d par une fonction quelconque ρ. Donc $\rho\Theta_d$ appartiendra, quelle que soit ρ, au type le plus général. Considérons en particulier une forme normale de Θ_d. Nous aurons le théorème suivant :

Quelle que soit la fonction ρ des variables z, x_i, p_k, il est possible de trouver des fonctions Z, X_i, P_k satisfaisant à l'identité

$$dZ - P_1\,dX_1 - \dots - P_m\,dX_m = \rho(dz - p_1\,dx_1 - \dots - p_m\,dx_m)$$

déjà considérée.

Les expressions (33) permettent de développer une méthode d'intégration toute semblable à celle que Clebsch a employée dans le cas d'un nombre pair de variables. J'utiliserai seulement leurs propriétés d'invariance pour étudier encore ici les relations entre deux formes réduites différentes.

XII.

Je dis d'abord que, toutes les fois que l'on a

$$\Theta_d = dZ - P_1\,dX_1 - \dots - P_m\,dX_m,$$

les variables Z, X_i, P_k sont indépendantes. Cette proposition se démontre comme dans le cas précédent.

Considérons maintenant deux formes réduites différentes donnant naissance à l'identité

$$(34)\quad dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_m\,dx_m = dZ - P_1\,dX_1 - \ldots - P_m\,dX_m,$$

et remarquons que l'on aura, en appliquant les propriétés d'invariance des symboles (φ), $[\varphi\psi]$,

$$(35)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial Z}, \\ [\varphi\psi]_z = [\varphi\psi]_Z. \end{cases}$$

La première équation appliquée à Z nous donne

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = 1,$$

et par conséquent

$$Z = z + \Pi,$$

Π ne dépendant que des variables x_i, p_k. La même équation, appliquée aux fonctions X_i, P_k, nous montre qu'*elles sont indépendantes de z*. Si donc on remplace Z par sa valeur dans l'identité (34), elle devient

$$(36)\quad d\Pi = P_1\,dX_1 + \ldots + P_m\,dX_m - p_1\,dx_1 - \ldots - p_m\,dx_m,$$

et z est complètement éliminée.

Réciproquement, de toute égalité de la forme (36) on peut revenir à l'égalité (34) en remplaçant Π par Z — z. Ces deux égalités doivent donc être considérées comme absolument équivalentes.

Appliquons la seconde des formules (35) aux fonctions Z, X_i, P_k; nous aurons

$$(37)\quad \begin{cases} (X_iX_k) = 0, \quad (P_iP_k) = 0, \quad (X_iP_k) = 0, \quad (P_iX_i) = 1, \\ (\Pi X_i) = p_1 \dfrac{\partial X_i}{\partial p_1} + \ldots + p_m \dfrac{\partial X_i}{\partial p_m}, \\ (\Pi P_i) = p_1 \dfrac{\partial P_i}{\partial p_1} + \ldots + p_m \dfrac{\partial P_i}{\partial p_m} - P_i. \end{cases}$$

Nous sommes ainsi conduits à la proposition suivante :

Lorsque 2m + 1 fonctions X_i, P_k, Π *des variables* x_i, p_k *satis-*

font à une équation de la forme

$$(38) \qquad d\Pi = P_1\,dX_1 + \ldots + P_m\,dX_m - p_1\,dx_1 - \ldots - p_m\,dx_m,$$

les fonctions X_i, P_k *sont indépendantes, et, jointes à la fonction* Π, *elles satisfont aux relations* (37).

Je vais maintenant terminer en démontrant que, si r fonctions indépendantes $X_1, \ldots, X_r$ des variables x_i, p_k satisfont aux équations

$$(X_\alpha X_\beta) = 0,$$

on peut leur adjoindre des fonctions qui permettent de satisfaire à l'équation (38), ou, ce qui est la même chose, nous l'avons démontré, à l'équation (34).

La démonstration étant semblable à celle qui a été développée à l'article X, je me contenterai de l'indiquer.

Considérons d'abord le cas d'une seule fonction X_1 et déterminons une fonction P_1 des variables x_i, p_k par l'équation

$$(P_1 X_1) = 1;$$

il est aisé de voir que, si l'on considère la forme

$$U_d = dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_m\,dx_m + P_1\,dX_1,$$

les équations de Pfaff relatives à cette forme et comprises dans l'équation unique

$$\delta U_d - dU_\delta = 0$$

sont indéterminées. D'ailleurs, par suite de la présence de la différentielle dz, U_d ne peut appartenir qu'au type indéterminé. On aura donc nécessairement

$$U_d = dZ - P_2\,dX_2 - \ldots - P_m\,dX_m,$$

et par conséquent

$$dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_m\,dx_m = dZ - P_1\,dX_1 - \ldots - P_m\,dX_m,$$

ou encore

$$d\Pi = P_1\,dX_1 + \ldots + P_m\,dX_m - p_1\,dx_1 - \ldots - p_m\,dx_m.$$

Le théorème est donc démontré pour le cas d'une seule fonction.

Quand il y en aura plusieurs, il suffira de répéter, presque textuellement, les démonstrations de l'article X. Nous nous dispenserons de les reproduire.

Nous avons fait maintenant connaître les trois propositions de M. Lie relatives aux identités

$$p_1\,dx_1 + \ldots + p_m\,dx_m = \mathrm{P}_1\,d\mathrm{X}_1 + \ldots + \mathrm{P}_m\,d\mathrm{X}_m,$$
$$\rho(dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_m\,dx_m) = d\mathrm{Z} - \mathrm{P}_1\,d\mathrm{X}_1 - \ldots - \mathrm{P}_m\,d\mathrm{X}_m,$$
$$p_1\,dx_1 + \ldots + p_m\,dx_m = \mathrm{P}_1\,d\mathrm{X}_1 + \ldots + \mathrm{P}_m\,d\mathrm{X}_m + d\Pi.$$

Comme elles ont de nombreuses applications, nous avons voulu les démontrer par les procédés les plus élémentaires. La seule proposition que nous ayons empruntée à la théorie des équations aux dérivées partielles est la suivante : *Toute équation du premier ordre admet au moins une solution.* Et même cette proposition est démontrée par les raisonnements donnés à l'article VII.

Nous ferons remarquer que la proposition de l'article X, à savoir, que l'on peut satisfaire à l'équation

$$\rho(dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_m\,dx_m) = d\mathrm{Z} - \mathrm{P}_1\,d\mathrm{X}_1 - \ldots - \mathrm{P}_m\,dx_m$$

en prenant pour Z une fonction quelconque, offre un moyen, différent de celui de l'article VII, de rattacher la théorie des équations aux dérivées partielles à la solution du problème de Pfaff.

Car, si

$$\mathrm{Z} = 0$$

est l'équation à intégrer, on pourra se proposer de ramener l'expression différentielle à un nombre *impair* de variables

$$dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_m\,dx_m$$

à la forme

$$\frac{1}{\rho}(d\mathrm{Z} - \mathrm{P}_1\,d\mathrm{X}_1 - \ldots - \mathrm{P}_m\,dx_m),$$

et, ce problème une fois résolu, les équations

$$\mathrm{X}_1 = \mathrm{C}_1, \quad \ldots, \quad \mathrm{X}_m = \mathrm{C}_m$$

donneront une intégrale complète de la proposée. A la vérité, ce

moyen paraît moins direct que celui de l'article VII, et il semble qu'il augmente la difficulté du problème, puisqu'il conduit à la solution, non seulement de l'équation

$$Z = 0,$$

mais aussi de

$$Z = C.$$

Mais il est aisé, comme on sait, d'introduire une constante dans une équation aux dérivées partielles. Par exemple, on remplacera x_i par $x_i + C$, z par $z + C$ ou $z + C_k x_k$; et en résolvant par rapport à cette constante, on fera disparaître l'objection que nous venons de signaler.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MASONI (U.). — SOPRA ALCUNE CURVE DEL QUARTO ORDINE DOTATE DI PUNTI DI ONDULAZIONE. Memoria del Dottor UDALRIGO MASONI, presentata per dissertazione di laurea all' Università di Napoli, il 20 novembre 1881. — Napoli, tipografia della R. Accademia delle Scienze fis. e mat., 1882.

M. Cayley est le premier géomètre qui ait considéré les points d'ondulation, c'est-à-dire ceux où la tangente coupe la courbe en quatre points consécutifs, et il a démontré d'une manière générale qu'en ces points la courbe est touchée par sa hessienne. M. Salmon, dans sa *Géométrie*, a reproduit le théorème de M. Cayley, et il a donné l'équation d'une courbe du quatrième ordre douée de quatre points d'ondulation situés sur une conique qui touche la courbe en ces quatre points. Enfin M. Kantor, dans un Mémoire publié en 1879 (1), a étudié géométriquement un faisceau de courbes du quatrième ordre ayant quatre ondulations. Ce sont là les seuls travaux publiés sur ce sujet.

L'auteur s'est proposé d'étudier toutes les courbes du quatrième ordre douées de points d'ondulation. Après avoir établi quelques propositions générales relatives à ces points, il donne l'équation générale des courbes du quatrième ordre admettant un, deux ou trois points d'ondulation. Puis il considère les courbes du quatrième ordre ayant quatre ondulations.

Si l'équation d'une conique est

$$C = 0$$

et que l'on écrive les équations

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = 0, \quad t_4 = 0$$

de quatre tangentes à cette conique, il est clair que l'équation

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = \lambda C^2$$

représente un faisceau de courbes du quatrième ordre ayant toutes

(1) KANTOR, *Ueber gewisse Curvenbüschel dritter und vierter Ordnung* (*Sitzb. der K. Akad. der Wiss. zu Wien*, Bd. LXXIX; 1879).

quatre points d'ondulation communs, à savoir les points de contact de la conique C et des quatre tangentes. C'est le faisceau considéré par M. Kantor. L'auteur démontre que ce cas est le seul dans lequel les quatre points d'ondulation soient réels; c'est-à-dire : *si une courbe du quatrième ordre a quatre points d'ondulation réels, ces quatre points sont sur une conique qui touche la courbe du quatrième ordre en ces points.* Et l'on déduit aisément de là qu'une courbe du quatrième ordre ne peut avoir plus de quatre points d'ondulation réels.

Le reste du Mémoire contient une étude des cas, beaucoup plus difficiles, où tous les points ne sont pas réels. En particulier, au § VIII, l'auteur fait connaître une courbe n'ayant pas moins de douze points d'ondulation : c'est celle qui est représentée par l'équation

$$x^4 - y^4 + z^4 = 0.$$

Les points d'ondulation sont sur les droites

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

et leur considération donne naissance à quelques propositions élégantes par lesquelles se termine le Mémoire.

D'ESCLAIBES. — SUR LES APPLICATIONS DES FONCTIONS ELLIPTIQUES A L'ÉTUDE DES COURBES DU PREMIER GENRE. Thèse présentée à la Faculté des Sciences et soutenue le 21 mai 1880. — Paris, Gauthier-Villars, 1880.

La première Partie de cette Thèse reproduit les résultats obtenus par Clebsch au sujet des courbes elliptiques. L'auteur a notablement simplifié le mode d'exposition adopté par l'illustre géomètre. Signalons en particulier la méthode nouvelle au moyen de laquelle il évalue le degré du polynôme placé sous le radical qui figure dans l'expression des coordonnées d'un point de la courbe. Cette méthode peut s'appliquer également aux courbes du second genre.

Ce Mémoire contient encore une démonstration très simple des

formules d'Aronhold relatives aux courbes planes du troisième degré, et des formules de M. Westphal relatives à la courbe gauche intersection de deux surfaces du second ordre. Au moyen de la fonction $p(u)$ considérée par M. Weierstrass, l'auteur obtient, en fonction des invariants d'une cubique et des coordonnées d'un de ses points, les racines de l'équation du neuvième degré qui détermine les points d'inflexion. Il établit ensuite plusieurs propriétés des courbes de sixième classe, enveloppées par les droites, qui joignent deux points de la cubique dont les arguments ont une différence constante. Ainsi, par exemple : *une quelconque de ces courbes est tangente à la cubique en ses dix-huit points de rencontre. Quatre de ces courbes ont pour tangentes triples les trois côtés d'un des triangles d'inflexion, et les points de contact sont situés sur les neuf polaires harmoniques,* etc.

A l'égard de la biquadratique gauche, l'auteur établit la relation qui existe entre les valeurs des paramètres relatifs à un même point dans deux modes de représentation différents, et retrouve, en les complétant, plusieurs théorèmes, démontrés par MM. Laguerre et Westphal au sujet de cette courbe.

ОРЛОВЪ (Герасимъ). — О нѣкоторыхъ полиномахъ съ одною и многими перемѣнными. — Санктпетербургъ 1881 г. [1].

(Analyse faite par l'Auteur.)

Ce travail a pour objet l'étude de certains systèmes de polynômes à un nombre quelconque de variables, analogues aux polynômes X_n de Legendre et leurs semblables [2].

---

(1) Orlof (*) (Ghérassime). *Sur quelques polynômes à une ou plusieurs variables.* Saint-Pétersbourg, 1881 (124 pages in-4°).

(2) Quelques-uns des résultats exposés dans ce travail ont été communiqués dans la séance du 27 décembre 1879 du sixième Congrès des Naturalistes russes, tenu à Saint-Pétersbourg.

(*) L'orthographe adoptée pour les transcriptions par le *Bulletin* traduit ОВЪ par *of* et non par *off* ou *ow*, le doublement de l'*f* étant absolument inutile, et *w* n'étant pas une lettre française.

C'est M. Hermite qui a indiqué pour la première fois deux systèmes de polynômes $U_{m,n}$ et $V_{m,n}$, qui dépendent de deux variables et jouissent de la propriété suivante :

« Pour toutes les valeurs entières et positives de m, n, μ, ν, et pourvu que les indices m et μ, n et ν ne soient pas égaux en même temps, on a

$$\int\int U_{m,n} V_{\mu,\nu}\, dx\, dy = 0, \tag{1}$$

les variables étant limitées par la condition $x^2+y^2 \leqq 1$. »

Les polynômes $U_{m,n}$ présentent la plus grande analogie avec les fonctions X_n de Legendre, et l'expression générale de ces polynômes,

$$U_{m,n} = \frac{1}{m!\, n!\, 2^{m+n}} \frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{dx^m\, dy^n},$$

est bien remarquable par son analogie avec l'expression bien connue de la fonction X_n trouvée par O. Rodrigues et Jacobi.

Les fonctions $V_{m,n}$, qu'il faut associer aux fonctions $U_{m,n}$ pour que l'égalité (1) ait lieu, sont déterminées par M. Hermite au moyen de la formule suivante

$$(1 - 2ax - 2by + a^2 b^2)^{-1} = \sum a^m b^n V_{m,n}.$$

M. Hermite fait voir que ces deux systèmes de polynômes $U_{m,n}$ et $V_{m,n}$ conduisent à des développements de fonctions de deux variables x, y, dans l'étendue limitée par la condition $x^2+y^2 \leqq 1$, et que la méthode bien connue, consistant à déterminer les coefficients par l'intégration, après avoir multiplié la fonction par un facteur convenable, s'applique encore dans ces nouvelles circonstances. Mais ici il y a une différence essentielle entre le cas d'une variable et le cas de plusieurs variables. Les seules propriétés des fonctions $U_{m,n}$ ne permettront pas de faire le calcul de leurs coefficients dans la série qui exprimera une fonction de deux variables, et c'est dans la nécessité d'introduire dans le calcul les fonctions associées $V_{m,n}$, pour pouvoir déterminer ces coefficients, que consiste la modification caractéristique pour les fonctions de plusieurs variables.

M. Hermite indique encore un autre système de fonctions associées, qu'il désigne par [illegible] et [illegible], et pour lesquelles l'intégrale double

$$\int\int \text{[illegible]}$$

étendue sur la surface du cercle $x^2+y^2=1$, se réduit aussi à zéro, à moins qu'on n'ait

$$m=\mu,\quad n=\nu.$$

L'expression générale de la fonction $\mathfrak{U}_{m,n}$,

$$\mathfrak{U}_{m,n}=\frac{(m+n)!}{m!\,n!}\,\frac{(-1)^{m+n}(m+n+1)}{1.3.5\ldots[2(m+n)+1]}\,\frac{d^{m+n}(1-x^2-y^2)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dx^m\,dy^n},$$

présente une ressemblance remarquable avec celle de la fonction

$$\sin[(n+1)\operatorname{arc}\cos x],$$

sous la forme de la dérivée multiple donnée par Jacobi.

Les fonctions associées $\mathfrak{V}_{m,n}$ sont les polynômes entiers, déterminés par la formule

$$(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-\frac{3}{2}}=\sum a^m b^n\,\mathfrak{V}_{m,n}.$$

Les recherches postérieures des propriétés des polynômes de M. Hermite appartiennent à Didon, qui a traité diverses questions qui s'y rattachent assez directement, et qui a généralisé pour un nombre quelconque des variables les résultats trouvés par M. Hermite.

Aux deux systèmes de fonctions de M. Hermite, Didon en ajouta encore un troisième, à savoir : les fonctions $U_{m,n}$ et $V_{m,n}$, satisfaisant aussi à la condition (1). Les fonctions $U_{m,n}$ et $V_{m,n}$, dont la première est un polynôme entier analogue par ses propriétés à la fonction trigonométrique $\cos(n\operatorname{arc}\cos x)$, sont déterminées par les formules suivantes :

$$U_{m,n}=\frac{(m+n)!}{m!\,n!}\,\frac{(-1)^{m+n}\sqrt{1-x^2-y^2}}{1.3.5\ldots[2(m+n)-1]}\,\frac{d^{m+n}(1-x^2-y^2)^{m+n-\frac{1}{2}}}{dx^m\,dy^n},$$

$$(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum a^m b^n\,V_{m,n}.$$

Didon a montré encore qu'il existe une infinité de systèmes de polynômes associés satisfaisant toujours à l'égalité (1), et, parmi tous ces systèmes, il y en a un qui se distingue des autres par la circonstance que les deux séries de polynômes qui le constituent sont identiques. Ainsi, en désignant les polynômes de chacune des

deux séries par $P_{m,n}$, on aura

$$\iint P_{m,n} P_{\mu,\nu}\, dx\, dy = 0,$$

en supposant que $(m-\mu)^2+(n-\nu)^2$ n'est pas nul et que les variables sont limitées dans l'intégration par la condition

$$x^2+y^2 \leq 1.$$

L'expression générale des polynômes $P_{m,n}$, qui présentent, de même que les polynômes $U_{m,n}$, la plus grande analogie avec les fonctions X_n de Legendre, est donnée par Didon sous la forme suivante,

$$P_{m,n} = K_{m,n} \frac{1}{(y^2-1)^{m+\frac{1}{2}}} \frac{d^n (y^2-1)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n} \frac{d^m (x^2+y^2-1)^m}{dx^m},$$

$K_{m,n}$ désignant une constante.

En posant

$$K_{m,n} = \frac{1}{m!\, n!\, 2^{n+2m}},$$

il trouve, pour la fonction génératrice des polynômes $P_{m,n}$, c'est-à-dire pour la somme

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} a^m b^n P_{m,n},$$

l'expression

$$(2)\quad (1-2by+b^2)^{-\frac{1}{2}} \left[1-ax-by-\frac{(a^2-b^2)(y^2-1)}{2(1-by+\sqrt{1-2by+b^2})}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

et pour l'intégrale

$$\iint P_{m,n}^2\, dx\, dy$$

la formule

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\iint P_{m,n}^2\, dx\, dy = \frac{2\pi}{2m+1} \\ &\quad \times \frac{(2m+n+2)(2m+n+3)\dots(2m+2n+1)}{n!\, 2^{2m+2n}} \frac{1.3.5\dots(2m+2n+1)}{2.4.6\dots(2m+2n+2)}. \end{aligned} \right.$$

Au moyen de ces propriétés, il déduit l'expression du coeffi-

cient $A_{m,n}$ de la série sous la forme

$$f(x, y) = \sum A_{m,n} P_{m,n}.$$

En étudiant les propriétés des polynômes $P_{m,n}$, j'ai trouvé que les expressions (2) et (3), assez compliquées, peuvent être remplacées par d'autres plus simples.

Dans la Note sous le titre : *Sur la fonction génératrice des polynômes $P_{m,n}$ de Didon*, insérée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (2e série, t. XX, p. 481), j'ai fait voir que, si, au lieu de l'expression employée par Didon pour le facteur constant $K_{m,n}$, on pose

$$K_{m,n} = \frac{2^{n-m}(m-1)(m-2)\dots(m-n)}{m!\,n!\,(2m-n-2)(2m-n-3)\dots(2m-2n-1)},$$

on aura, en place des expressions (2) et (3), les formules suivantes :

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} a^m b^n P_{m,n} \\ &\quad = \left[(1-2ax-2by+b^2)(1-2by+b^2)+a^2(1-y^2)\right]^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \right.$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &\iint P_{m,n}^2\, dx\, dy = \frac{\pi}{m-n-1} \\ &\quad \times \frac{1.3.5\dots(2m-1)}{2^m} \frac{(2m+2)(2m+3)\dots(2m+n+1)}{m!\,n!}. \end{aligned} \right.$$

Par conséquent, en effectuant le développement d'une fonction quelconque de deux variables en série ordonnée suivant les polynômes $P_{m,n}$, on obtient pour le coefficient du terme général une expression plus simple et plus commode pour les applications que celle de Didon.

L'expression que j'ai trouvée pour la fonction génératrice des polynômes $P_{m,n}$ est encore remarquable par la possibilité d'être généralisée. Donnant à cette expression la forme

$$(1-2by+b^2)^{-\frac{1}{2}} \left[1-2ax-2by+b^2+\frac{a^2(1-y^2)}{1-2by+b^2}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

et introduisant dans l'exposant du second facteur un paramètre a

bitraire β, on forme une nouvelle expression

$$(1-2by+b^2)^{-\frac{1}{2}}\left[1-2ax-2by+b^2+\frac{a^2(1-y^2)}{1-2by+b^2}\right]^{-\beta-\frac{1}{2}},$$

ou bien

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}&(1-2by+b^2)^{\beta}\\&\times[(1-2ax-2by+b^2)(1-2by+b^2)+a^2(1-y^2)]^{-\frac{2\beta+1}{2}},\end{aligned}\right.$$

qui est à son tour la fonction génératrice des fonctions plus générales que je désignerai par $\Omega_{m,n}(x,y,\beta)$ et qui se présentent sous la forme

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}\Omega_{m,n} = C_{m,n}&\frac{1}{(y^2-1)^{\beta+m+\frac{1}{2}}}\frac{d^n(y^2-1)^{\beta+m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n}\\&\times\frac{1}{(x^2+y^2-1)^{\beta}}\frac{d^m(x^2+y^2-1)^{\beta+m}}{dx^m},\end{aligned}\right.$$

$C_{m,n}$ désignant une constante. Ces polynômes se réduisent aux $P_{m,n}$ dans le cas particulier $\beta=0$.

Les polynômes $\Omega_{m,n}$ présentent la plus grande analogie avec les fonctions connues ω_l déterminées par l'une des égalités suivantes :

$$(1-2ax+a^2)^{-\frac{2\alpha+1}{2}}=\sum_{l=0}^{l=\infty}\alpha^l\omega_l,\quad \omega_l=c_l\frac{1}{(x^2-1)^{\alpha}}\frac{d^l(x^2-1)^{\alpha+l}}{dx^l},$$

où c_l désigne une constante, α un paramètre arbitraire, l un nombre entier et positif.

C'est dans l'étude des propriétés des polynômes $\Omega_{m,n}$ que consiste l'objet principal de mon travail. Mais je ne trouve pas inutile d'analyser préalablement les propriétés des fonctions ω_l, pour montrer en premier lieu l'analogie complète entre les résultats qui expriment les propriétés diverses des fonctions ω_l et $\Omega_{m,n}$, et les méthodes mêmes qui y conduisent, et, en dernier lieu, pour établir toutes les propositions auxiliaires indispensables à l'exposition des propriétés des fonctions $\Omega_{m,n}$. J'ai trouvé d'autant plus nécessaire d'exposer les propriétés des fonctions ω_l, que, dans les divers Ouvrages où ces fonctions sont traitées, les différents résultats ne sont pas présentés sous la forme dont j'ai besoin, et en outre

qu'il n'y a aucun Ouvrage russe complet consacré à l'étude de ces fonctions remarquables.

Dans ce but, j'ai divisé mon travail en deux Chapitres.

Dans le premier Chapitre, j'expose les propriétés des polynômes ω_l.

En partant de l'égalité

$$(1-2ax+a^2)^{-\frac{2\alpha+1}{2}} = \sum_{l=0}^{l=\infty} a^l \omega_l,$$

je trouve le polynôme ω_l sous la forme

$$\begin{aligned}\omega_l = & \frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)\ldots(2\alpha+2l-1)}{l!} \\ & \times \Big[x^l - \frac{l(l-1)}{2(2\alpha+2l-1)} x^{l-2} + \ldots \\ & + (-1)^q \frac{l(l-1)(l-2)\ldots(l-2q+1)}{q!2^q(2\alpha+2l-1)(2\alpha+2l-3)\ldots(2\alpha+2l-2q+1)} x^{l-2q} + \ldots\Big],\end{aligned}$$

et je forme encore quelques autres expressions de ce polynôme.

Ayant déterminé ensuite la relation entre les trois polynômes consécutifs ω_{l+1}, ω_l, ω_{l-1}, et quelques autres relations qui subsistent entre les polynômes ω_l pour les différentes valeurs de l et de α, j'obtiens l'équation différentielle

$$(8) \qquad (1-x^2)\frac{d^2\omega}{dx^2} - 2(\alpha+1)x\frac{d\omega}{dx} + l(2\alpha+l+1)\omega = 0,$$

à laquelle satisfait le polynôme ω_l, et qui le définit complètement, c'est-à-dire que le polynôme le plus général ω satisfaisant à cette équation ne diffère du polynôme ω_l que par un facteur constant. Je trouve, au moyen de l'équation (8), l'expression du polynôme ω sous la forme de la dérivée multiple

$$(9) \qquad \omega = c\frac{1}{(x^2-1)^\alpha}\frac{d^l(x^2-1)^{\alpha+l}}{dx^l},$$

d'où l'on déduit le polynôme ω_l, en posant

$$c = \frac{1}{l!2^l}\frac{(2\alpha+1)(2\alpha+2)\ldots(2\alpha+l)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+l)}.$$

J'ai trouvé aussi la seconde intégrale de l'équation (8), et je l'ai présentée sous la forme de série hypergéométrique, de quadrature,

de dérivée et d'intégrale multiple. En ayant égard à la formule (9) et à l'expression de seconde intégrale de l'équation (8) sous la forme d'une dérivée multiple, on obtient pour l'intégrale générale de cette équation l'expression suivante

$$(10)\quad \omega = \frac{1}{(x^2-1)^\alpha}\left\{c_1\frac{d^l(x^2-1)^{\alpha+l}}{dx^l} - c_2\frac{d^l}{dx^l}\left[(x^2-1)^{\alpha+l}\int\frac{dx}{(x^2-1)^{\alpha+l+1}}\right]\right\}.$$

Passant maintenant aux développements des fonctions en séries, je démontre que le polynôme ω_l satisfait à l'égalité

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^\alpha x^\lambda \omega_l\, dx = 0,$$

qui subsiste, sous la condition $\alpha > -1$, pour toutes les valeurs entières et positives de λ inférieures à l, et qui détermine aussi complètement le polynôme ω_l à un facteur constant près.

On en conclut que, $\varphi(x)$ désignant un polynôme entier, on aura

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^\alpha\varphi(x)\omega_l\, dx = 0,$$

toutes les fois que le degré du polynôme $\varphi(x)$ sera inférieur à l et $\alpha > -1$.

A l'aide de cette dernière égalité, je démontre que l'équation $\omega_l = 0$ a toutes ses racines réelles, inégales et comprises entre les limites -1 et $+1$, en appliquant la belle méthode de Legendre pour la démonstration du théorème analogue à l'égard de l'équation $X_n = 0$.

Puis j'établis les formules fondamentales

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^\alpha\omega_l\omega_\lambda\, dx = 0, \quad (l > \lambda),\\ &\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^\alpha\omega_l^2\, dx = \frac{2^{2\alpha+1}\Gamma(2\alpha+l+1)}{(2\alpha+2l+1)\,l!}\left[\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)}\right]^2,\end{aligned}\right.$$

au moyen desquelles je trouve, pour le coefficient du terme général de la série

$$\varphi(x) = \sum A_l\omega_l$$

la formule suivante

$$(12)\qquad a_l = \frac{(2\alpha+2l+1)\,l!}{2^{2\alpha+1}\Gamma(2\alpha+l+1)}\left[\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\right]^2\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^\alpha\omega_l\varphi(x)\,dx.$$

Pour donner l'application de cette formule, je forme le développement de la fonction x^n suivant les polynômes ω_l, et j'obtiens la formule

$$(13)\quad\left\{\begin{aligned} x^n &= \frac{n!}{(2\alpha+1)(2\alpha+3)\ldots(2\alpha+2n+1)}\\ &\times\left[(2\alpha+2n+1)\omega_n+(2\alpha+2n-3)\frac{2\alpha+2n+1}{2}\omega_{n-2}+\ldots\right],\end{aligned}\right.$$

se réduisant à une formule bien connue, proposée par Legendre, dans le cas où $\alpha=0$, $\omega_n=X_n$.

La formule (12) permet de démontrer les propriétés suivantes des polynômes ω_l :

1° *Parmi tous les polynômes $\varphi(x)$ du degré n, dans lesquels le coefficient en x^n est égal à l'unité, celui qui rend minimum l'intégrale*

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^\alpha[\varphi(x)]^2\,dx$$

est égal au polynôme ω_l, à un facteur constant près.

2° *Dans la série ordonnée suivant les polynômes $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$, qui représente une fonction donnée $\varphi(x)$, un nombre quelconque de termes, pris à partir du premier, forme un polynôme entier* F(x) *qui, parmi tous ceux de même degré, donne à l'intégrale*

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^\alpha[\varphi(x)-F(x)]^2\,dx$$

une valeur minimum.

Au moyen des formules précédentes, on peut généraliser les résultats proposés par Didon dans un Mémoire intitulé : *Sur une intégrale double* (*Annales de l'École Normale*, t. VII, 1870). Didon montre que la valeur de l'intégrale

$$\iint(1-x^2-y^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}(1-2ax+a^2)^{-\frac{\alpha}{2}}(1-2by+b^2)^{-\frac{\alpha}{2}}\,dx\,dy.$$

dans laquelle les variables x et y sont limitées par la condition

$$x^2+y^2 \leqq 1.$$

ne dépend que du produit ab, dans le cas où μ est un nombre entier et positif quelconque, et où a et b sont moindres que l'unité. A cet effet, il établit deux formules auxiliaires, desquelles cette proposition découle immédiatement.

Je démontre que la proposition de Didon subsiste aussi dans le cas de μ fractionnaire positif, et que les formules auxiliaires que cet auteur établit, indépendamment l'une de l'autre, ne sont que deux cas particuliers d'une même formule générale que je déduis du développement de l'intégrale précédente en série.

Revenant au développement des fonctions en séries, je montre, en m'appuyant sur la formule (13), que toute fonction développable en série suivant les puissances de la variable peut être représentée encore sous la forme d'une série ordonnée suivant les fonctions ω_l. Comme exemple, je forme le développement de la fonction $(y-x)^{-1}$, et j'obtiens la formule

$$\frac{1}{y-x} = \sum_{l=0}^{l=\infty} (2\alpha+2l+1)\,\omega_l(x,\alpha)\,\rho_l(y,\alpha).$$

Ce développement conduit à de nouvelles fonctions $\rho_l(x,\alpha)$, dites *fonctions de seconde espèce*. Je trouve l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction ρ_l. Cette équation se confond avec l'équation (8) dans le cas où $\alpha=0$. Dans les autres cas, elle en est différente par les coefficients; mais, en posant

$$\rho_l = (x^2-1)^\alpha \chi_l,$$

on trouve la fonction χ_l satisfaisant à l'équation (8) : d'où l'on conclut qu'on peut ramener la théorie des fonctions de première et de seconde espèce à la considération d'une seule équation différentielle. Je donne huit expressions différentes pour la fonction ρ_l. Ces expressions, sauf un facteur constant, ne présentent que des cas particuliers de celles de M. Darboux pour la fonction de seconde espèce relative aux polynômes de Jacobi (voir son Mémoire intitulé : *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très*

grands nombres et sur une classe étendue de développements en série).

En exprimant la fonction ρ_l par la fonction linéaire de ρ_0, on trouve la formule

$$\rho_l = \frac{l!\,\Gamma(2\alpha+1)}{(2\alpha+1)\,\Gamma(2\alpha+l+1)}\,\omega_l\,\frac{1}{x}\,F\left(\frac{1}{2},\quad 1,\quad \alpha+\frac{3}{2},\quad \frac{1}{x^2}\right) - \zeta_l,$$

où ζ_l est un polynôme entier du degré $l-1$. Cette formule, pour $\alpha = 0$, se réduit à une formule remarquable de Gauss. La formule précédente montre que le produit du polynôme ω_l par la fonction

$$(14)\qquad \frac{1}{x}\,F\left(\frac{1}{2},\quad 1,\quad \alpha+\frac{3}{2},\quad \frac{1}{x^2}\right),$$

exprimé par la série, ordonnée suivant les puissances décroissantes de x, ne contient pas de termes en

$$\frac{1}{x},\quad \frac{1}{x^2},\quad \frac{1}{x^3},\quad \dots,\quad \frac{1}{x^l}.$$

Cette nouvelle propriété, qui caractérise aussi le polynôme ω_l à un facteur constant près, montre encore que ce polynôme ne diffère que par un facteur constant du dénominateur, de la réduite de l'ordre l, de la fraction continue résultante du développement de l'expression (14).

En terminant le premier Chapitre, je considère les propriétés des polynômes ω_l pour les valeurs particulières du paramètre α, à savoir : $\alpha = p$ et $\alpha = \frac{2p-1}{2}$ (p étant un nombre entier et positif quelconque). Le polynôme ω_l s'exprime par la dérivée multiple de la fonction X_n de Legendre dans le premier cas, et de la fonction $\cos(n \operatorname{arc}\cos x)$ dans le second.

Enfin, dans le cas de $\alpha = \infty$, les polynômes ω_l se réduisent à un nouveau système des polynômes entiers du degré l, que nous désignerons par $\xi_l(x)$, et qui peuvent être déterminés par une des formules suivantes :

$$e^{-2ax-a^2} = \sum_{l=0}^{l=\infty} \frac{a^l}{l!}\,\xi_l, \qquad \xi_l = e^{x^2}\,\frac{d^l e^{-x^2}}{dx^l}.$$

Les propriétés de ces polynômes ont été étudiées par MM. Tchebychef et Hermite.

Le second Chapitre, sur lequel est principalement appelée l'attention du lecteur, est consacré à l'étude des polynômes $\Omega_{m,n}$.

Je commence par établir, pour la fonction génératrice de ces polynômes, les diverses expressions dépendantes des valeurs attribuées à $C_{m,n}$. En posant

$$C_{m,n} = \frac{2^{n-m}}{m!\,n!}\,\frac{(2\beta+1)(2\beta+2)\ldots(2\beta+m)}{(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+m)}$$
$$\times\frac{(\beta+m+1)(\beta+m+2)\ldots(\beta+m+n)}{(2\beta+2m+n+2)(2\beta+2m+n+3)\ldots(2\beta+2m+2n+1)},$$

on trouve pour la fonction génératrice demandée l'expression simple (6). Le calcul même a été publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 2ᵉ série, t. XX, 1881.

En posant encore $C_{m,n} = \frac{1}{m!\,n!\,2^{m+2n}}$, j'ai trouvé, pour la fonction génératrice des polynômes considérés, une autre expression qui, dans le cas où $\beta = 0$, se réduit à l'expression (2) trouvée par Didon; mais dans le cas général on obtient une expression très compliquée et de peu d'intérêt. J'ai reproduit ce calcul pour que le lecteur puisse comparer les calculs de deux expressions et voir jusqu'à quel point se simplifient l'expression et le calcul de la fonction génératrice par un choix convenable du facteur constant.

Je montre ensuite que le polynôme $\Omega_{m,n}$ satisfait à un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre. Pour former ces équations, on peut négliger le facteur constant $C_{m,n}$ dans la formule (7); de sorte que, en posant

$$\frac{1}{(x^2+y^2-1)^{\beta}}\,\frac{d^m(x^2+y^2-1)^{\beta+m}}{dx^m} = M,$$

$$\frac{1}{(y^2-1)^{\beta+m+\frac{1}{2}}}\,\frac{d^n(y^2-1)^{\beta+m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n} = N,$$

et désignant, pour abréger, le polynôme $\Omega_{m,n}$ par une seule lettre Ω, on aura $\Omega = MN$.

Je forme d'abord les équations aux dérivées partielles

$$(1-x^2-y^2)\frac{d^2M}{dx^2} - 2(\beta+1)x\frac{dM}{dx} + m(2\beta+m+1)M = 0,$$

$$(1-x^2)\frac{d^2M}{dx^2} + (1-y^2)\frac{d^2M}{dy^2} - 2xy\frac{d^2M}{dx\,dy}$$

$$-(2\beta+3)x\frac{dM}{dx} - (2\beta+3)y\frac{dM}{dy} + m(2\beta+m+2)M = 0,$$

$$(1-y^2)\frac{d^2N}{dy^2} - (2\beta+2m+3)y\frac{dN}{dy} + n(2\beta+2m+n+2)N = 0,$$

pour les fonctions M et N. La formation de la seconde de ces équations est assez longue, tandis que la première et la troisième se déduisent immédiatement de l'équation (8). Le polynôme Ω ou MN satisfait évidemment à la première équation. En multipliant la seconde équation par N et la troisième par M, et en les ajoutant, on obtiendra une autre équation à laquelle satisfait aussi le polynôme Ω. De cette manière, nous obtenons pour le polynôme $\Omega_{m,n}$ le système suivant d'équations aux dérivées partielles :

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &(1-x^2-y^2)\frac{d^2\Omega}{dx^2} - 2(\beta+1)x\frac{d\Omega}{dx} + m(2\beta+m+1)\Omega = 0,\\ &(1-x^2)\frac{d^2\Omega}{dx^2} + (1-y^2)\frac{d^2\Omega}{dy^2} - 2xy\frac{d^2\Omega}{dx\,dy} - (2\beta+3)x\frac{d\Omega}{dx}\\ &\qquad - (2\beta+3)y\frac{d\Omega}{dy} + (m+n)(2\beta+m+n+2)\Omega = 0. \end{aligned}\right.$$

Je démontre directement que ce système caractérise la fonction $\Omega_{m,n}$, en se bornant aux solutions rationnelles et entières; en d'autres termes, que le polynôme le plus général qui satisfait aux équations (15) est le polynôme $\Omega_{m,n}$ ou $C\Omega_{m,n}$. Mais, outre ce polynôme, le système des équations aux dérivées partielles sera vérifié par d'autres fonctions. La solution complète du système (15) ne contient que quatre constantes arbitraires, et, par conséquent, il y aura comme solution quatre fonctions distinctes. Pour trouver la solution complète de ce système, je forme un nouveau système

d'équations

$$(1-x^2-y^2)\frac{d^2\mathrm{K}}{dx^2}+2(\beta+m-1)x\frac{d\mathrm{K}}{dx}+2(\beta+m)\mathrm{K}=0,$$

$$(1-x^2)\frac{d^2\mathrm{K}}{dx^2}+(1-y^2)\frac{d^2\mathrm{K}}{dy^2}-2xy\frac{d^2\mathrm{K}}{dx\,dy}+(2\beta+2m-3)x\frac{d\mathrm{K}}{dx}$$
$$+(2\beta+2m-3)y\frac{d\mathrm{K}}{dy}+(n+2)(2\beta+2m+n)\mathrm{K}=0,$$

tel que, en posant $\frac{d^m\mathrm{K}}{dx^m}=(x^2+y^2-1)^\beta\Omega$, la fonction Ω satisfera au système des équations (15).

Si l'on pose $\mathrm{K}=(x^2+y^2+1)^{\beta+m}\mathrm{L}$, le dernier système se transforme dans le système suivant :

$$(1-x^2-y^2)\frac{d^2\mathrm{L}}{dx^2}-2(\beta+m+1)x\frac{d\mathrm{L}}{dx}=0,$$

$$(1-x^2)\frac{d^2\mathrm{L}}{dx^2}+(1-y^2)\frac{d^2\mathrm{L}}{dy^2}-2xy\frac{d^2\mathrm{L}}{dx\,dy}-(2\beta+2m+3)x\frac{d\mathrm{L}}{dx}$$
$$-(2\beta+2m+2)y\frac{d\mathrm{L}}{dy}+n(2\beta+2m+n+2)\mathrm{L}=0.$$

La première équation de ce nouveau système s'intègre immédiatement. On trouve

$$\mathrm{L}=f_1(y)+f_2(y)\int_0^x\frac{dx}{(1-x^2-y^2)^{\beta+m+1}},$$

et, en substituant cette valeur de L dans la seconde équation, on obtient, après quelques simplifications, une équation qui se réduit à deux suivantes :

$$(1-y^2)\frac{d^2f_1}{dy^2}-(2\beta+2m+3)y\frac{df_1}{dy}+n(2\beta+2m+n+2)f_1=0,$$

$$(1-y^2)\frac{d^2f_2}{dy^2}+(2\beta+2m-1)y\frac{df^2}{dy}+(n+1)(2\beta+2m+n+1)f_2=0.$$

La seconde de ces deux équations se réduit à la première si l'on fait $f_2=(1-y^2)^{\beta+m+\frac{1}{2}}f_1$. Quant à la première équation, elle se

réduit, en posant $\beta + m + \frac{1}{2} = \alpha$, $n = l$, $y = x$, à l'équation (8) déjà citée plus haut, dont l'intégrale générale se détermine au moyen de la formule (10). En ayant égard à cette formule et aux relations entre les fonctions L, K, Ω, nous obtiendrons la solution complète cherchée du système des équations (15) sous la forme suivante :

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} \Omega = {} & \frac{1}{(y^2-1)^{\beta+m+\frac{1}{2}}} \frac{1}{(x^2+y^2-1)^{\beta}} \frac{d^m (x^2+y^2-1)^{\beta+m}}{dx^m} \\ & \times \left\{ C_1 \frac{d^n (y^2-1)^{\beta+m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n} \right. \\ & \qquad \left. + C_2 \frac{d^n}{dy^n} \left[(y^2-1)^{\beta+m+n+\frac{1}{2}} \int_0^y \frac{dy}{(y^2-1)^{\beta+m+n+\frac{3}{2}}} \right] \right\} \\ & + \frac{1}{(x^2+y^2-1)^{\beta}} \frac{d^m}{dx^m} \left[(x^2+y^2-1)^{\beta+m} \int_0^x (x^2+y^2-1)^{\beta+m+1} \right] \\ & \times \left\{ C_3 \frac{d^n (y^2-1)^{\beta+m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n} \right. \\ & \qquad \left. + C_4 \frac{d^n}{dy^n} \left[(y^2-1)^{\beta+m+n+\frac{1}{2}} \int_0^y \frac{dy}{(y^2-1)^{\beta+m+n+\frac{3}{2}}} \right] \right\}, \end{aligned} \right.$$

C_1, C_2, C_3, C_4 désignant quatre constantes arbitraires. Le coefficient seul de C_1 est une fonction entière de x et de y, d'où l'on peut conclure aussi que $\Omega_{m,n}$ est le seul polynôme qui est la solution du système des équations (15).

En posant, par exemple, $m = 1$, $n = 2$, $\beta = -\frac{5}{2}$, nous aurons le système des équations aux dérivées partielles

$$(1 - x^2 - y^2)\frac{d^2\Omega}{dx^2} + 3x\frac{d\Omega}{dx} - 3\Omega = 0,$$

$$(1 - x^2)\frac{d^2\Omega}{dx^2} + (1 - y^2)\frac{d^2\Omega}{dy^2} - 2xy\frac{d^2\Omega}{dx\,dy} + 2x\frac{d\Omega}{dx} + 2y\frac{d\Omega}{dy} = 0,$$

dont la solution complète, d'après la formule (16), prend la

forme

$$\Omega = C_1 x (y^2 - 1) + C_2 x \left[y - \frac{1}{2} (y^2 - 1) \log \frac{y+1}{y-1} \right]$$
$$+ C_3 \left\{ [x^2 - 2(y^2 - 1)] \sqrt{x^2 - y^2 - 1} + 3x(y^2 - 1) \log \frac{x + \sqrt{x^2 - y^2 - 1}}{\sqrt{y^2 - 1}} \right\}$$
$$+ C_4 \left[y - \frac{1}{2} (y^2 - 1) \log \frac{y+1}{y-1} \right]$$
$$\times \left[\left(\frac{x^2}{y^2 - 1} + 2 \right) \sqrt{x^2 - y^2 - 1} - 3x \log \frac{x + \sqrt{x^2 - y^2 - 1}}{\sqrt{y^2 - 1}} \right].$$

Dans le cas particulier où $\beta = 0$, c'est-à-dire quand les fonctions Ω se réduisent aux fonctions P de Didon, le système (15) prendra la forme

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} &(1 - x^2 - y^2) \frac{d^2 P}{dx^2} - 2x \frac{dP}{dx} - m(m-1) P = 0, \\ &(1 - x^2) \frac{d^2 P}{dx^2} + (1 - y^2) \frac{d^2 P}{dy^2} - 2xy \frac{d^2 P}{dx\, dy} - 3x \frac{dP}{dx} \\ &\qquad - 3y \frac{dP}{dy} + (m + n)(m + n + 2) P = 0, \end{aligned} \right.$$

et la formule (16) se réduira à la suivante :

$$P = \frac{1}{(y^2 - 1)^{m+\frac{1}{2}}} \frac{d^m (x^2 + y^2 - 1)^m}{dx^m}$$
$$\times \left\{ C_1 \frac{d^n (y^2 - 1)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n} \right.$$
$$\left. + C_2 \frac{d^n}{dy^n} \left[(y^2 - 1)^{m+n+\frac{1}{2}} \int_0^y \frac{dy}{(y^2 - 1)^{m+n+\frac{3}{2}}} \right] \right\}$$
$$+ \frac{d^m}{dx^m} \left[(x^2 + y^2 - 1)^m \int_0^x \frac{dx}{(x^2 + y^2 - 1)^{m+1}} \right]$$
$$\times \left\{ C_3 \frac{d^n (y^2 - 1)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n} \right.$$
$$\left. + C_4 \frac{d^n}{dy^n} \left[(y^2 - 1)^{m+n+\frac{1}{2}} \int_0^y \frac{dy}{(y^2 - 1)^{m+n+\frac{3}{2}}} \right] \right\}.$$

Il importe ici de remarquer que la solution complète du système des équations (17), donnée par Didon, est inexacte.

Après ces recherches, je passe à l'étude de polynômes $\Omega_{m,n}$ au point de vue du développement des fonctions de deux variables, suivant ces nouvelles expressions algébriques.

J'établis la proposition suivante :

Théorème I. — *Pour toutes les valeurs entières et positives de μ et de ν, dont la somme est inférieure à $m+n$, et aussi quand cette somme est égale ou supérieure à $m+n$, μ étant inférieur à m, on aura l'égalité*

$$\iint (1-x^2-y^2)^\beta \Omega_{m,n} x^\mu y^\nu \, dx \, dy = 0,$$

en supposant les variables limitées dans l'intégration par la condition $x^2+y^2<1$ et en outre $\beta > -1$.

Ce théorème caractérise aussi les polynômes, sauf un facteur constant. En s'appuyant sur ce théorème, on conclut que, $\varphi(x, y)$ désignant un polynôme entier du degré $\mu+\nu$, on obtiendra

$$(18) \qquad \iint (1-x^2-y^2)^\beta \Omega_{m,n} \varphi(x, y) \, dx \, dy = 0,$$

toutes les fois que $\mu+\nu < m+n$, et que les variables x, y et le paramètre β sont limités par les mêmes conditions que précédemment. Si, en outre, l'exposant de x ne surpasse pas μ dans le polynôme (x, y), la dernière égalité aura aussi lieu quand

$$\mu+\nu \geqq m+n,$$

à moins que l'on n'ait $\mu < m$.

Si l'on pose $\varphi(x, y) = \Omega_{\mu,\nu}$, on obtient le théorème suivant, le plus important de la théorie des polynômes $\Omega_{m,n}$:

Théorème II. — *En limitant toujours les variables x, y et le paramètre β par les conditions $x^2+y^2 \leqq 1$, $\beta > -1$, on aura*

$$(19) \qquad \iint (1-x^2-y^2)^\beta \Omega_{m,n} \Omega_{\mu,\nu} \, dx \, dy = 0,$$

pour toutes les valeurs entières et positives de m, n, μ, ν, à moins qu'on n'ait simultanément $m=\mu$, $n=\nu$.

En calculant cette intégrale double, on peut démontrer le second théorème indépendamment du premier et trouver même sa valeur pour $m = \mu$, $n = \nu$. En désignant l'intégrale considérée par S, et ayant égard à l'expression générale des polynômes $\Omega_{m,n}$ (7), on est d'abord conduit à chercher la valeur de

$$\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{(x^2+y^2-1)^\beta} \frac{d^m(x^2+y^2-1)^{\beta+m}}{dx^m} \frac{d^\mu(x^2+y^2-1)^{\beta+\mu}}{dx^\mu} dx.$$

Cette expression, en posant $x = t\sqrt{1-y^2}$, se réduit à la forme

$$(1-y^2)^{\beta+\frac{m+\mu+1}{2}} \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^\beta \omega_m \omega_\mu dt,$$

à un facteur constant près. Au moyen de la première des formules (11), on conclut que cette intégrale, et par conséquent l'intégrale S, est nulle si m et μ sont différents. Dans le cas où $m = \mu$, on trouve

$$S = A \int_{-1}^{+1} (1-y^2)^{\beta+m+\frac{1}{2}} \omega_n\left(y, \beta+m+\frac{1}{2}\right) \omega_\mu\left(y, \beta+m+\frac{1}{2}\right) dy,$$

où A est un facteur constant connu; et, comme la dernière intégrale est aussi nulle si $n \gtrless \nu$, nous pouvons conclure que l'intégrale S se réduit à zéro pour toutes les valeurs entières et positives des nombres m, n, μ, ν, à moins que l'on n'ait $m = \mu$ et $n = \nu$. Dans l'hypothèse contraire, en ayant égard à la valeur de la constante A, on trouve, à l'aide de la seconde des formules (11), après des réductions faciles,

$$(20)\quad \left\{ \begin{aligned} &\iint (1-x^2-y^2)^\beta \Omega_{m,n}^2 \, dx \, dy \\ &= \frac{\pi}{\beta+m+n+1} \frac{\Gamma(2\beta+m+1)\Gamma(2\beta+2m+n+2)}{m!\, n!\, 2^{2m}(2\beta+2m+1)[(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+m)\Gamma(2\beta+1)]^2} \end{aligned} \right.$$

Si l'on fait $\beta = 0$, cette formule se réduit à la formule (5).

Les propriétés précédentes permettront d'effectuer le développement d'une fonction quelconque $\varphi(x, y)$ de deux variables, en série suivant les polynômes $\Omega_{m,n}$.

En posant

$$(21)\qquad \varphi(x, y) = \sum A_{m,n} \Omega_{m,n},$$

on déterminera $A_{m,n}$ en multipliant les deux membres de cette égalité par $(1-x^2-y^2)^\beta \Omega_{m,n}\,dx\,dy$, et en les intégrant dans l'intérieur du cercle $x^2+y^2=1$. On obtiendra ainsi

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &\iint (1-x^2-y^2)^\beta \Omega_{m,n}\,\varphi(x,y)\,dx\,dy \\ &\quad = A_{m,n}\iint (1-x^2-y^2)^\beta \Omega_{m,n}^2\,dx\,dy, \end{aligned}\right.$$

d'où l'on trouve, au moyen de la formule (20),

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} A_{m,n} = {} & \frac{m!\,n!\,2^{2m}}{\pi}\,\frac{(\beta+m+n+1)(2\beta+2m+1)[(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+m)\Gamma(2\beta+1)]^2}{\Gamma(2\beta+m+1)\Gamma(2\beta+2m+n+2)} \\ & \times\iint (1-x^2-y^2)^\beta \Omega_{m,n}\,\varphi(x,y)\,dx\,dy. \end{aligned}\right.$$

Si l'on pose ici $\beta=0$, on obtiendra une nouvelle formule, plus simple que celle de Didon, pour la détermination des coefficients de la série ordonnée suivant les polynômes $P_{m,n}$.

Au moyen de la formule (23), on peut démontrer les théorèmes suivants, qui expriment les propriétés les plus remarquables des polynômes $\Omega_{m,n}$:

Théorème III. — *Parmi tous les polynômes $\varphi(x,y)$ de deux variables du degré $p+q$, qui ne contiennent pas de puissances de x d'exposants supérieurs à p, et dans lesquels le coefficient de $x^p y^q$ est égal à l'unité, celui qui rend minimum l'intégrale*

$$(24)\qquad \iint (1-x^2-y^2)^\beta [\varphi(x,y)]^2\,dx\,dy$$

est égal au polynôme $\Omega_{m,n}$, à un facteur constant près; les variables x, y et le paramètre β sont limités par les conditions $x^2+y^2<1$, $\beta>-1$.

Théorème IV. — *Développons une fonction $\varphi(x,y)$ suivant les $\Omega_{m,n}$; prenons tous les termes qui correspondent aux valeurs de $m+n$ inférieures à un nombre donné k, et les termes $\Omega_{0,m+n}$, $\Omega_{1,m+n-1}$, …, $\Omega_{m,n}$ pour lesquels $m+n=k$. Nous formerons ainsi le polynôme $\mathfrak{F}(x,y)$ du degré k, dans lequel l'exposant de la variable x ne surpasse pas m, et qui, parmi tous les polynômes du même degré qui ne contiennent pas de puissances*

de x avec les exposants supérieurs à m, rend minimum l'intégrale

$$(25)\qquad \int\int (1-x^2-y^2)^\beta[\varphi(x,y)-\mathfrak{F}(x,y)]^2\,dx\,dy,$$

étendue à la surface du cercle $x^2+y^2=1$, sous la condition $\beta>-1$.

Pour démontrer le théorème III, je mets le polynôme $\varphi(x,y)$ sous la forme (21); le second membre de cette égalité contiendra tous les termes en $\Omega_{m,n}$ pour lesquels $m+n<p+q$, et parmi ceux pour lesquels $m+n=p+q$, elle ne contient que les suivants :

$$A_{p,q}\Omega_{p,q},\quad A_{p-1,q+1}\Omega_{p-1,q+1},\quad \ldots,\quad A_{0,p+q}\Omega_{0,q+p};$$

Le coefficient $A_{p,q}$ se détermine par la condition que le coefficient en $x^p y^q$ du polynôme cherché soit égal à l'unité; tous les autres coefficients se déterminent au moyen de la formule (23). Mais, en égalant à zéro les dérivées de l'intégrale (24) par rapport à ces coefficients, on obtient des équations de la forme

$$\int\int (1-x^2-y^2)^\beta\,\Omega_{m,q}\,\varphi(x,y)\,dx\,dy=0,$$

d'où l'on conclut, en s'appuyant sur la formule (23), que tous ces coefficients s'évanouissent, et que, par conséquent, $\varphi(x,y)=A_{p,q}\Omega_{p,q}$.

Pour la démonstration du théorème IV, je mets le polynôme $\mathfrak{F}(x,y)$ aussi sous la forme $\mathfrak{F}(x,y)=\sum A'_{m,n}\Omega_{m,n}$. La seconde partie de cette égalité contiendra tous les termes $A'_{m,n}\Omega_{m,n}$ dans lesquels $m+n<k$, et, parmi les termes pour lesquels $m+n=k$, les seuls termes

$$A'_{m,n}\Omega_{m,n},\quad A'_{m-1,n+1}\Omega_{m-1,n+1},\quad \ldots,\quad A'_{0,m+n}\Omega_{0,m+n}.$$

En égalant à zéro la dérivée de l'intégrale (25) par rapport à $A'_{m,n}$, on obtient

$$\int\int (1-x^2-y^2)^\beta[\varphi(x,y)-\mathfrak{F}(x,y)]\,\Omega_{m,n}\,dx\,dy=0,$$

c'est-à-dire

$$\int\int (1-x^2-y^2)^\beta\,\varphi(x,y)\,\Omega_{m,n}\,dx\,dy$$

$$=A'_{m,n}\int\int (1-x^2-y^2)^\beta\,\Omega^2_{m,n}\,dx\,dy$$

et, en comparant cette égalité à la formule (22), on obtient $A'_{m,n} = A_{m,n}$.

Si nous rejetons la condition qui exige que l'exposant des puissances de la variable x, dans les polynômes cherchés $\varphi(x, y)$ et $\mathfrak{F}(x, y)$, ne surpasse pas un nombre donné p ou m, il faudra, pour former ces polynômes, après les avoir représentés sous la forme (21), prendre dans le second membre de cette égalité tous les termes pour lesquels $m + n \leq p + q$ et $m + n < k$. Il est remarquable que pour un exposant de x quelconque nous obtiendrons, outre les fonctions $\Omega_{m,n}$, un nouveau système de polynômes, pouvant servir également bien à la résolution de chacune des deux questions de minimum que nous avons considérées.

L'expression générale de ce nouveau polynôme, que nous désignerons par $\mathfrak{U}_{m,n}(x, y, \beta)$, est la suivante :

$$\mathfrak{U}_{m,n} = D_{m,n} \frac{1}{(x^2 + y^2 - 1)^\beta} \frac{d^{m+n}(x^2 + y^2 - 1)^{\beta+m+n}}{dx^m \, dy^n},$$

m, n étant les nombres entiers positifs, p un paramètre arbitraire, $D_{m,n}$ un facteur constant.

Les fonctions $\mathrm{U}_{m,n}$, $\mathfrak{V}_{m,n}$, $U_{m,n}$, dont nous avons cité plus haut les expressions générales, ne sont que les cas particuliers de $\mathfrak{U}_{m,n}$. Posant, en effet,

$$\beta = 0, \quad D_{m,n} = \frac{1}{m!\, n!\, 2^{m+n}},$$

on obtient

$$\mathfrak{U}_{m,n} = \mathrm{U}_{m,n}.$$

Si l'on pose

$$\beta = \frac{1}{2}, \quad D_{m,n} = \frac{(m+n+1)!}{m!\, n!\, 1.3.5\ldots(2m+2n+1)},$$

on trouve

$$\mathfrak{U}_{m,n} = \frac{\mathfrak{V}_{m,n}}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Posant enfin

$$\beta = -\frac{1}{2}, \quad D_{m,n} = \frac{(m+n)!}{m!\, n!\, 1.3.5\ldots(2m+2n-1)},$$

on aura

$$\mathfrak{U}_{m,n} = U_{m,n}.$$

En étudiant en détail les propriétés des polynômes $\mathrm{U}_{m,n}$, Didon

indique aussi en passant quelques propriétés des polynômes $\mathfrak{U}_{m,n}$, en supposant que le paramètre β soit un nombre entier et positif. Je ne fais pas cette supposition, et, en limitant ce paramètre toujours par une seule condition $\beta > -1$, je démontre les théorèmes suivants :

Théorème V. — *L'intégrale double*

$$\iint (1 - x^2 - y^2)^\beta \mathfrak{U}_{m,n} \mathfrak{U}_{\mu,\nu} \, dx \, dy \quad (^1)$$

est nulle si l'on a $m + n \gtrless \mu + \nu$.

Théorème VI. — *L'intégrale double*

$$\iint (1 - x^2 - y^2)^\beta \mathfrak{U}_{m,n} \Omega_{\mu,\nu} \, dx \, dy$$

est nulle quand $\mu + \nu$ *n'est pas égal à* $m + n$, *et même quand* $\mu + \nu = m + n$, *à moins que* $\mu < m$.

Pour effectuer le développement d'une fonction quelconque de deux variables, suivant les polynômes $\mathfrak{U}_{m,n}$, il faut considérer encore un nouveau système de polynômes qu'on associera aux polynômes $\mathfrak{U}_{m,n}$. Je désignerai par $\mathfrak{V}_{m,n}$ ces polynômes associés et je les déterminerai par l'égalité

$$(1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-(\beta+1)} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} a^m b^n \mathfrak{V}_{m,n}.$$

On reconnaîtra immédiatement que $\mathfrak{V}_{m,n}$ est un polynôme entier en x et y du degré $m + n$, mais ayant $x^m y^n$ pour seul et unique terme de ce degré. Ce polynôme se réduit à l'un des deux polynômes $V_{m,n}$ ou $\mathcal{V}_{m,n}$, si l'on pose

$$\beta = 0$$

ou

$$\beta = \frac{1}{2}.$$

(¹) Cette intégrale et toutes les suivantes sont étendues à la surface du cercle $x^2 + y^2 = 1$.

En posant

$$\beta = -\frac{1}{2},$$

on obtient

$$\mathfrak{V}_{m,n} = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.V_{m,n}.$$

Théorème VII. — *L'intégrale double*

$$\iint (1 - x^2 - y^2)^\beta \mathfrak{U}_{m,n} \mathfrak{V}_{\mu,\nu} dx\, dy$$

se réduit à zéro pour toutes les valeurs entières et positives des nombres m, n, μ, ν, à moins que l'on n'ait $m = \mu$, $n = \nu$ et en supposant toujours $\beta > -1$.

Si les indices m et μ, n et ν sont égaux en même temps, on obtient

$$\iint (1 - x^2 - y^2)^\beta \mathfrak{U}_{m,n} \mathfrak{V}_{m,n} dx\, dy$$
$$= D_{m,n} 2^{m+n} \pi \frac{(\beta + 1)(\beta + 2)\ldots(\beta - m + n)}{\beta + m + n + 1}.$$

En posant ici successivement $\beta = 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, et en attribuant au facteur constant $D_{m,n}$ les valeurs correspondantes citées plus haut, on aura les trois formules suivantes

$$\iint \mathrm{U}_{m,n} \mathrm{V}_{m,n} dx\, dy = \frac{\pi}{m + n + 1} \frac{(m - n)!}{m!\, n!},$$

$$\iint \mathcal{U}_{m,n} \mathcal{V}_{m,n} dx\, dy = \frac{2\pi}{2m + 2n + 3} \frac{(m + n + 1)!}{m!\, n!},$$

$$\iint U_{m,n} V_{m,n} dx\, dy = \frac{2\pi}{2m + 2n - 1} \frac{(m - n)!}{m!\, n!},$$

dont les deux premières ont été obtenues par M. Hermite, et la dernière par Didon, au moyen d'autres considérations et, de plus, tout à fait indépendantes les unes des autres.

Nous pouvons déterminer maintenant les coefficients du développement d'une fonction quelconque $\varphi(x, y)$ en série ordonnée suivant les polynômes $\mathfrak{U}_{m,n}$ ou $\mathfrak{V}_{m,n}$. En posant

$$\varphi(x, y) = \sum \mathfrak{A}_{m,n} \mathfrak{U}_{m,n}, \quad \text{ou} \quad \varphi(x, y) = \sum \mathfrak{B}_{m,n} \mathfrak{V}_{m,n}.$$

et en attribuant au facteur constant $D_{m,n}$ la valeur $\frac{1}{m!\,n!\,2^{m+n}}$, on trouve

$$\mathfrak{A}_{m,n} = \frac{\beta+m+n+1}{\pi}\,\frac{m!\,n!}{(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+m+n)}$$
$$\times\iint(1-x^2-y^2)^\beta\,\mathfrak{V}_{m,n}\,\varphi(x,y)\,dx\,dy.$$

$$\mathfrak{B}_{m,n} = \frac{\beta+m+n+1}{\pi}\,\frac{m!\,n!}{(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+m+n)}$$
$$\times\iint(1-x^2-y^2)^\beta\,\mathfrak{U}_{m,n}\,\varphi(x,y)\,dx\,dy.$$

Les propriétés analysées des polynômes $\mathfrak{U}_{m,n}$ et $\mathfrak{V}_{m,n}$ suffisent pour démontrer que les polynômes $\mathfrak{U}_{m,n}$, de même que $\Omega_{m,n}$, peuvent servir pour la solution des deux questions de minimum, dont nous avons parlé plus haut. En effet, le polynôme entier $\varphi(x,y)$ du degré $p+q$, dans lequel le coefficient de $x^p y^q$ est égal à l'unité et qui rend minimum l'intégrale (24), est déterminé par un système d'équations que nous obtiendrons en égalant à zéro les dérivées de l'intégrale (24) par rapport aux coefficients du polynôme $\varphi(x,y)$. Ainsi, nous aurons des équations de la forme suivante

$$(26)\qquad \iint(1-x^2-y^2)^\beta\,\varphi(x,y)\,x^\mu y^\nu\,dx\,dy = 0,$$

qui doivent subsister pour tous les systèmes de valeurs entières et positives μ et ν qui satisfont à la condition $\mu+\nu \leqq p+q$, excepté un système $\mu=p$, $\nu=q$ qui correspond au terme $x^p y^q$ du polynôme cherché $\varphi(x,y)$. Pour montrer que le polynôme $\mathfrak{U}_{m,n}$ satisfait aux équations (26), développons $x^\mu y^\nu$ suivant les polynômes $\mathfrak{V}_{m,n}$,

$$x^\mu y^\nu = \mathfrak{B}_{0,0}\mathfrak{V}_{0,0} + \mathfrak{B}_{1,0}\mathfrak{V}_{1,0} + \mathfrak{B}_{0,1}\mathfrak{V}_{0,1} + \ldots + \mathfrak{B}_{\mu,\nu}\mathfrak{V}_{\mu,\nu}.$$

$\mathfrak{V}_{i,j}$ est, en général, un polynôme du degré $i+j$, qui ne contient qu'un seul et unique terme de ce degré et de la forme $\alpha x^i y^j$; par conséquent, la seconde partie de l'égalité précédente ne contiendra qu'un seul et unique terme $\mathfrak{B}_{\mu,\nu}\mathfrak{V}_{\mu,\nu}$, pour lequel la somme des indices est égale à $\mu+\nu$; pour tous les autres termes elle sera moindre que $\mu+\nu$. Ainsi, ayant égard aux conditions ci-dessus mentionnées, auxquelles satisfont les nombres μ, ν dans les équations (26), nous

pouvons conclure que lorsque $\mu+\nu<p+q$, la somme des indices dans tous les termes de l'égalité précédente sera moindre que $p+q$. Lorsque $\mu+\nu=p+q$, la somme des indices ne sera égale à $p+q$ que dans le dernier terme $\mathfrak{B}_{\mu,\nu}\mathfrak{B}_{\mu,\nu}$; dans tous les autres termes elle restera moindre que $p+q$, comme précédemment. En outre, les égalités $\mu=p$, $\nu=q$ ne peuvent pas subsister en même temps : donc, lorsque $\mu+\nu=p+q$, le terme $\mathfrak{B}_{\mu,\nu}\mathfrak{B}_{\mu,\nu}$ ne peut pas être égal à $\mathfrak{B}_{p,q}\mathfrak{B}_{p,q}$, mais à l'une des valeurs suivantes :

$$\mathfrak{B}_{p+q,0}\mathfrak{B}_{p+q,0},\ \mathfrak{B}_{p+q-1,1}\mathfrak{B}_{p+q-1,1},\ \ldots,\ \mathfrak{B}_{p+1,q-1}\mathfrak{B}_{p+1,q-1},$$
$$\mathfrak{B}_{p-1,q+1}\mathfrak{B}_{p-1,q+1},\ \ldots\ \mathfrak{B}_{0,p+q}\mathfrak{B}_{0,p+q}.$$

Multipliant les deux membres de la dernière égalité par

$$(1-x^2-y^2)^\beta\,\mathfrak{U}_{p,q}\,dx\,dy,$$

et intégrant à l'intérieur du cercle $x^2+y^2=1$, nous aurons une nouvelle égalité, dans le second membre de laquelle tous les termes s'évanouissent sous la condition $\beta>-1$, et nous obtiendrons

$$\iint(1-x^2-y^2)^\beta\,\mathfrak{A}_{p,q}\,x^\mu y^\nu\,dx\,dy=0,$$

pour toutes les valeurs entières et positives de μ et ν qui satisfont aux conditions ci-dessus mentionnées.

Pour démontrer que les fonctions $\mathfrak{U}_{m,n}$ résolvent encore une autre question de minimum, c'est-à-dire qu'elles déterminent un polynôme $\mathfrak{F}(x,y)$ du degré k, tel que, parmi tous les polynômes entiers du même degré, il donne à l'intégrale (25) une valeur minimum dans l'intérieur du cercle $x^2+y^2=1$, sous la condition $\beta>-1$, on donne au polynôme $\Omega_{m,n}$ la forme

(27) $$\Omega_{m,n}=\sum\mathfrak{A}_{\mu,\nu}\mathfrak{U}_{\mu,\nu}\qquad(\mu+\nu\leqq m+n),$$

où

$$\mathfrak{A}_{\mu,\nu}=\frac{\beta+\mu+\nu+1}{\pi}\,\frac{\mu!\,\nu!}{(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+\mu+\nu)}$$
$$\times\iint(1-x^2-y^2)^\beta\,\Omega_{m,n}\,\mathfrak{B}_{\mu,\nu}\,dx\,dy.$$

Le second membre de cette expression, et par conséquent, le coefficient $\mathfrak{A}_{\mu,\nu}$ s'évanouissent sous la condition $\mu+\nu>m+n$.

en se fondant sur l'égalité (18), et la formule (27) prend la forme

$$\Omega_{m,n} = \mathfrak{A}_{0,m+n}\,\mathfrak{U}_{0,m+n} + \mathfrak{A}_{1,m+n-1}\,\mathfrak{U}_{1,m+n-1} + \ldots + \mathfrak{A}_{m+n,0}\,\mathfrak{U}_{m+n,0}.$$

On en conclut que $\Omega_{m,n}$ est une fonction linéaire des polynômes $\mathfrak{U}_{m,n}$, pour lesquels la somme des indices $\mu + \nu$ est égale à $m + n$; par exemple, les polynômes $\Omega_{3,0}$, $\Omega_{2,1}$, $\Omega_{1,2}$, $\Omega_{0,3}$ ne s'expriment que par des fonctions linéaires des polynômes $\mathfrak{U}_{3,0}$, $\mathfrak{U}_{2,1}$, $\mathfrak{U}_{1,2}$, $\mathfrak{U}_{0,3}$. D'après cela, rappelons-nous que le polynôme cherché $\mathfrak{F}(x, y)$ est déterminé en développant la fonction donnée $\varphi(x, y)$ en série de la forme $\sum A_{m,n}\Omega_{m,n}$, et en rejetant de cette série tous les termes pour lesquels $m + n > k$. Si nous changeons dans l'expression obtenue les polynômes $\Omega_{m,n}$ en $\mathfrak{U}_{m,n}$ au moyen de la dernière égalité, nous aurons le même polynôme sous la forme

$$\mathfrak{F}(x, y) = \sum \mathfrak{A}_{m,n}\,\mathfrak{U}_{m,n},$$

où $m + n \leqq k$, et à chacun des termes $A_{m,n}\,\Omega_{m,n}$ de la série précédente, m et n ayant de certaines significations déterminées, ne correspondra dans cette nouvelle série qu'un seul terme $\mathfrak{A}_{m,n}\mathfrak{U}_{m,n}$ avec les mêmes valeurs de m et n. Il en résulte que la fonction entière $\mathfrak{F}(x, y)$ s'obtiendra également bien par le développement de $\varphi(x, y)$ suivant les polynômes $\mathfrak{U}_{m,n}$, en négligeant toujours les termes en $\mathfrak{U}_{m,n}$ dans lesquels $m + n$ est supérieur à k.

Je vais faire deux applications du développement des fonctions qui résulte de la considération des polynômes $\Omega_{m,n}$, $\mathfrak{U}_{m,n}$, $\mathfrak{V}_{m,n}$. Je vais développer effectivement $\mathfrak{U}_{m,n}$ suivant $\Omega_{m,n}$, et $\Omega_{m,n}$ suivant $\mathfrak{V}_{m,n}$.

Si l'on pose

$$\mathfrak{U}_{m,n} = \sum A_{\mu,\nu}\,\Omega_{\mu,\nu},$$

on aura

$$A_{\mu,\nu} = K_{\mu,\nu} \iint (1 - x^2 - y^2)^{\beta}\,\mathfrak{U}_{m,n}\,\Omega_{\mu,\nu}\,dx\,dy,$$

$$K_{\mu,\nu} = \frac{\beta - \mu - \nu - 1}{\pi}\,\frac{2^{\nu}}{(2\beta - 1)(2\beta - 3)\ldots(2\beta - 2\mu - 1)}$$
$$\frac{\mu!\,\nu!}{(2\beta - 2\mu - 2)\ldots(2\beta - 2\mu - \nu - 1)}\,\frac{(\beta - 1)\ldots(\beta - \mu)}{(2\beta - 1)\ldots(2\beta - \mu)};$$

d'où l'on conclut, en s'appuyant sur le théorème VI, que $\mu + \nu$ doit être égale à $m + n$ et m ne doit pas surpasser μ. Pour que le coefficient $A_{\mu,\nu}$ ne soit pas nul, les nombres μ et m doivent encore être de même parité. On peut donc poser $\mu = m + 2k$, $\nu = n - 2k$, k pouvant prendre toutes les valeurs entières et positives comprises entre o et $\frac{n}{2}$, et, par conséquent,

$$\mathfrak{U}_{m,n} = \sum_k \mathfrak{A}_{m+2k,n-2k} \Omega_{m+2k,n-2k}.$$

De la même manière, on verra que

$$\Omega_{m,n} = \sum_k \mathfrak{B}_{m-2k,n-2k} \mathfrak{V}_{m-2k,n-2k}.$$

Les coefficients ont les valeurs

$$A_{m-2k,n-2k} = \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+2k)}{k!\,2^{m+2k}}$$
$$\times \frac{(\beta - m - k - 1)\ldots(\beta + m + n)}{(2\beta - 1)(2\beta + 3)\ldots(2\beta + 2m + 4k - 1)}$$
$$\times \frac{(2\beta + m + 2k - 1)\ldots(2\beta - 2m + 2k)}{(2\beta - 2m + 4k - 2)\ldots(2\beta + 2m + n + 2k + 1)},$$

$$\mathfrak{B}_{m-2k,n-2k} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+2k)}{k!\,2^{m+k}}$$
$$\times \frac{(2\beta - 1)(2\beta - 3)\ldots(2\beta + 2m - 2k - 1)}{(\beta - 1)(\beta + 2)\ldots(\beta + m)}.$$

En posant dans cette formule $\beta = 0$, on obtiendra les relations suivantes entre les polynômes $U_{m,n}$, $V_{m,n}$, $P_{m,n}$

$$U_{m,n} = \sum_k A_{m+2k,n-2k} P_{m+2k,n-2k}, \quad P_{m,n} = \sum_k \mathfrak{B}_{m-2k,n+2k} V_{m+2k,n+2k},$$

où

$$A_{m+2k,n-2k} = \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+2k)}{k!\,2^{m+2k}\,1.3.5\ldots(2m+4k-1)}$$
$$\frac{(m-k-1)\ldots(m+n)}{(2m-4k+2)\ldots(2m+n+2k+1)}\left[0 \leq k \leq \frac{n}{2}\right],$$

$$\mathfrak{B}_{m-2k,n-2k} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+2k)}{k!\,2^k}\;\frac{1.3.5\ldots(2m-2k-1)}{m!\,2^m}\left[0 \leq k \leq \frac{m}{2}\right].$$

Ces relations n'ont été indiquées par Didon dans aucun de ses Mémoires.

Je démontre ensuite le théorème suivant qui montre encore l'analogie entre les polynômes $\Omega_{m,n}$ et ω_l.

Théorème VIII. — *Le produit du polynôme $\Omega_{m,n}$ par l'intégrale double*

$$\int_{\varepsilon}\int_{\varepsilon} \frac{(1-u^2-v^2)^{\beta}\,du\,dv}{(x-u)(y-v)},$$

dans laquelle $\beta > -1$, étant développé en série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x et y, ne contient pas le terme en $\frac{1}{x^{\mu+1}y^{\nu+1}}$ pour toutes les valeurs entières et positives de μ et de ν dont la somme est inférieure à $m+n$, et aussi quand cette somme est égale ou supérieure à $m+n$, pour les valeurs de μ inférieures à m.

Avant de finir, je me propose de déterminer les fonctions auxquelles se réduit chacun des trois systèmes des polynômes $\Omega_{m,n}$, $\mathfrak{U}_{m,n}$, $\mathfrak{V}_{m,n}$ dans le cas de $\beta = \infty$, et j'ai trouvé que tous les trois systèmes ne se réduisent dans ce cas qu'à un seul et unique système de fonctions. Ces nouvelles fonctions, que nous désignerons par $\Xi_{m,n}$, peuvent être déterminées par l'une des égalités suivantes :

$$e^{a(2x-a)+b(2y-b)} = \sum \frac{a^m}{m!}\frac{b^n}{n!}\,\Xi_{m,n}, \quad \Xi_{m,n} = \xi_m(x)\,\xi_n(y);$$

d'où l'on conclut que les fonctions $\Xi_{m,n}$ sont aussi des polynômes entiers en x et y du degré $m+n$, que l'on obtiendra en multipliant les deux polynômes dans le système des fonctions $\xi_l(x)$ que nous avons considéré à la fin du Chapitre I. Chacun de ces deux polynômes ne dépend que d'une seule variable, et, en les multipliant, il faut les prendre avec des valeurs différentes des indices m et n.

Enfin, j'ajouterai que la généralisation de tous les résultats exposés dans le second Chapitre de mon Ouvrage, pour le cas d'un nombre quelconque de variables, ne présente aucune difficulté.

G. O.

MÉLANGES.

SUR LES FRAGMENTS DE HÉRON D'ALEXANDRIE CONSERVÉS PAR PROCLUS;

Par M. PAUL TANNERY.

1. Dans son *Commentaire sur le premier Livre d'Euclide* [1], Proclus cite six fois Héron d'Alexandrie.

La première, où il énumère (p. 41), parmi les subdivisions de la Mécanique, — « la *thaumatopœique* (construction de jouets ou d'artifices merveilleux), qui s'attache aux effets obtenus soit par les vents, comme en traitent et Ctésibios et Héron, soit, etc. » — se rapporte à l'Ouvrage bien connu des Πνευματικά, publié dans les *Veteres mathematici* de Thevenot (Paris, 1693).

Les cinq autres citations sont des fragments relatifs à la Géométrie élémentaire :

I (p. 196).

« Il ne faut d'ailleurs ni en réduire le nombre (des axiomes) au minimum, comme le fait Héron qui n'en pose que trois, — car c'est un axiome que le tout est plus grand que la partie; le géomètre (Euclide) l'emploie assez souvent dans ses démonstrations, comme aussi que les choses qui coïncident sont égales; celui-ci sert immédiatement pour le but de la proposition IV, — ni, etc.... »

Ainsi Héron n'aurait admis que les trois premiers axiomes connus par Proclus, — l'égalité entre elles de deux choses égales à une troisième, — l'égalité des sommes de parties égales, — l'égalité des différences de choses égales de part et d'autre.

II (p. 305).

Sur la proposition XVI du Livre Ier d'Euclide : « Dans tout triangle dont on prolonge un côté, l'angle extérieur du triangle est supérieur à l'un quelconque des intérieurs non adjacents.

---

[1] Nous citons l'édition *Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii*, de Friedlein, Leipzig, 1873.

» Cette proposition, énoncée incomplètement par certains auteurs, sans le membre de phrase *dont on prolonge un côté*, a fourni une occasion d'attaque, peut-être à plusieurs autres, en tous cas à Philippos, comme le dit le *mécanicien* Héron. Car en général, un triangle, en tant que tel, n'a point d'angle extérieur. »

III (p. 323).

Sur la proposition XX, que dans tout triangle la somme de deux côtés quelconques est supérieure au troisième.

« Il faut rappeler brièvement les autres démonstrations du théorème proposé, comme elles ont été données par les héroniens et Porphyre, sans prolonger de droite, comme l'a fait l'Élémentaire (Euclide).

» Soit le triangle ABC. Il faut montrer que $AB + AC > BC$. Divisez par moitié l'angle en A. Dans le triangle ABE, l'angle extérieur $\widehat{AEC} > \widehat{BAE}$. Mais $\widehat{BAE} = \widehat{EAC}$. Donc $\widehat{AEC} > \widehat{EAC}$, de sorte que le côté $AC > CE$. De même $AB > BE$. Car dans le triangle AEC, l'extérieur $\widehat{AEB} > \widehat{CAE} = \widehat{EAB}$, de sorte que $AB > BE$. Donc $AB + AC >$ la somme BC. Nous ferions la même démonstration pour les autres côtés. »

A la suite de cette démonstration, Proclus en donne deux autres; la dernière, faite par l'absurde, ne peut être attribuée à Héron, qui évitait ce procédé (voir le fragment suivant); la seconde revient à la première, mais elle en diffère en ce qu'on se borne à l'effectuer dans le cas où un côté est plus grand que chacun des deux autres, et qu'au lieu de mener la sécante AE comme bissectrice de l'angle en A, on lui fait intercepter sur le plus grand côté un segment égal à l'un des deux autres côtés; il ne reste donc qu'à démontrer l'inégalité pour l'autre segment. Ces simplifications apparentes et terre à terre semblent peu dignes d'un maître.

IV (p. 340).

Sur la proposition XXV : « Si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun, et l'un la base plus grande que l'autre, son angle compris entre les côtés égaux sera également plus grand. » La démonstration d'Euclide est faite par l'absurde.

« Voici comment cette proposition est démontrée, par Héron le mécanicien, sans réduction à l'impossible.

» Soient les triangles ABC, DEF et les mêmes hypothèses (savoir $AB = DE$, $AC = DF$, $BC > EF$).

» Puisque $BC > EF$, prolongez EF en prenant $EH = BC$. De même prolongez ED en prenant $DG = DF$. Le cercle décrit de D comme centre avec DF pour rayon passera par G; soit FKG ce cercle. Puisque $BC < AC + AB = EG$, et que $BC = HE$, le cercle décrit de E comme centre, avec EH pour rayon, coupera EG. Soit HK ce cercle, menez KD, KE de l'intersection commune des deux cercles à leurs centres.

» Puisque D est centre de GKF, $GD = DK = DF = AC$. D'autre part, puisque E est centre de HK, $EK = EH = BC$. Donc, puisque les côtés AB, AC, BC sont respectivement égaux à DE, DK, EK, $\widehat{BAC} = \widehat{EDK}$. Donc $\widehat{BAC} > \widehat{FDE}$. »

V (p. 429).

Sur la proposition XLVII, théorème du carré de l'hypoténuse.

« Ce que d'autres ont ajouté en plus, comme les héroniens et Pappus, oblige à recourir à des propositions du Livre VI, et n'a point de rapport avec le sujet présent. »

2. Les questions que soulèvent ces fragments sont surtout relatives à leur origine. Viennent-ils d'un commentaire particulier composé par Héron sur les *Éléments?* Ont-ils été tirés d'un autre Ouvrage, et quelle était, dans ce cas, la nature de cet Ouvrage?

M. Th.-H. Martin [1] admet l'existence du commentaire particulier; Héron aurait, d'ailleurs, composé un grand Ouvrage de Géométrie, connu, d'après Eutocius, sous le nom de *Métriques* (Μετρικά), et dont il nous resterait d'importants débris, appartenant à quatre parties distinctes :

1. *Prolégomènes aux éléments d'Arithmétique* (Τὰ πρὸ τῆς Ἀριθμητικῆς στοιχειώσεως).

---

[1] *Recherches sur la vie et les Ouvrages de Héron d'Alexandrie et sur tous les Ouvrages mathématiques grecs qui ont été attribués à un auteur nommé Héron.* Paris, 1854; voir p. 95-98, 102, 104, 120, 176.

II. *Prolégomènes aux éléments de Géométrie* (Τὰ πρὸ τῆς Γεωμετρικῆς στοιχειώσεως).

III. *Introductions géométriques* (Εἰσαγωγαὶ τῶν γεωμετρουμένων).

IV. *Introductions stéréométriques* (Εἰσαγωγαὶ τῶν στερεομετρουμένων).

Le savant éditeur de la collection des écrits héroniens (1), M. Hultsch (2), doute de l'existence du Commentaire particulier; mais reconnaissant, avec M. Th.-H. Martin, que les *Prolégomènes* sont relatifs aux *Éléments* d'Euclide, il les rejette hors du grand Ouvrage héronien, dont le titre semble avoir été *Géométrie* (Γεωμετρία ou Γεωμετρούμενα), et qui devait comprendre la partie *métrique* citée par Eutocius.

En somme, ces deux illustres érudits admettent, chacun sous une forme différente, un travail particulier de Héron sur Euclide.

M. Cantor (3) remarque, à bon droit, qu'il est très douteux *a priori* qu'un commentaire sur les *Éléments* ait été écrit dès le Ier siècle avant J.-C., et qu'on puisse surtout l'attribuer à un mathématicien aussi incontestablement original que Héron d'Alexandrie.

En ce qui concerne les *Prolégomènes*, exclusivement connus par le petit Traité des *Définitions des termes de Géométrie* (*Héron* (4), p. 1-40) qui en faisait partie, j'ai déjà soutenu, ailleurs, l'opinion de Friedlein qui refuse à cette compilation l'attribution au géomètre alexandrin. De l'aveu même de M. Hultsch, la rédaction actuelle de ce petit Traité est d'une époque très postérieure; à mes yeux, son authenticité, même sous une forme plus ancienne, serait inadmissible, en raison, d'une part, de l'absence dans le recueil des définitions spéciales de la *Geometria* (*Héron*, p. 44-46), bien plus sûrement héroniennes, et, d'un autre côté, de la présence, au contraire, d'importants emprunts faits à Posidonius, comme il est facile de l'établir d'après Proclus (Geminus).

(1) *Heronis Alexandrini Geometricorum et Stereometricorum reliquiæ*. Berlin, 1864. Nous citerons plus loin cette édition sous la rubrique (*Héron*).

(2) *Metrologicorum scriptorum reliquiæ*, I. Leipzig, 1864, p. 13-18.

(3) *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. Leipzig, 1880, p. 320.

(4) *L'Arithmétique des Grecs dans Héron d'Alexandrie* (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. IV, 2e série).

Ces *Prolégomènes* doivent donc être écartés, et nous restons en présence de l'hypothèse d'un commentaire spécial. Nous allons la discuter en étudiant les fragments reproduits plus haut.

3. Le premier point à établir, c'est que Proclus n'a pas lui-même d'ouvrage héronien entre les mains; il cite d'après Porphyre et Pappus.

Tout auteur d'un commentaire travaille sur ceux de ses prédécesseurs, s'il en a eu. Proclus n'a, d'ailleurs, guère d'originalité; presque tout, chez lui, est évidemment emprunté, et s'il cite souvent ses auteurs, il néglige aussi souvent de le faire. La source principale pour les prologues est la *Théorie des Mathématiques* de Geminus; pour le commentaire des *Propositions*, c'est évidemment le travail de Pappus.

L'existence de ce commentaire est assurée par Eutocius (*Archimède* de Torelli, p. 90); il doit avoir été complet, car la citation du commentateur d'Archimède se rapporte au Livre XII des *Éléments*, et des quatre que fait Proclus, il en est deux (p. 189 et 197) qui sont relatives aux axiomes.

Proclus ne paraît point, d'ailleurs, connaître l'Ouvrage qui nous reste de Pappus, la *Collection mathématique;* mais ce dernier nous fait suffisamment connaître la riche érudition de son auteur pour que nous soyons assurés qu'il a pu emprunter ses citations de Héron à des ouvrages quelconques de ce dernier, de Géométrie ou même de Mécanique, sans se borner à rechercher dans les commentaires précédemment écrits sur Euclide s'il y en avait déjà de son temps.

Le fragment V, dans lequel le nom de Pappus se trouve accolé à celui des héroniens, nous rappelle cependant l'intéressante généralisation du théorème sur le carré de l'hypoténuse, qui forme la proposition I du Livre IV de la *Collection mathématique*.

Dans un triangle quelconque ABC, *sur deux côtés* AB, BC, *on construit des parallélogrammes quelconques* ABED, BCFH, *on prolonge leurs côtés* ED, FH *jusqu'à leur rencontre en* G, *on joint* GB, *et l'on construit sur le troisième côté* AC *du triangle un autre parallélogramme dont le second côté soit* GB, *sous un angle égal à* $\widehat{BAC} + \widehat{DGB}$. *Le troisième parallé-*

logramme sera équivalent à la somme des deux précédents.

Je suis tenté d'attribuer à Héron ce théorème, que Pappus aura pu reproduire également dans son commentaire, avec d'autres généralisations. Mais si l'on se croit obligé de prendre à la lettre ce que dit Proclus, la nécessité des théories du Livre VI pour ce qu'avait ajouté Pappus, on ne peut méconnaître dans cette adjonction un théorème qui figure dans les *Éléments* (VI, 31), que si l'on construit sur les côtés d'un triangle rectangle des figures semblables et semblablement placées, la figure sur l'hypoténuse est équivalente à la somme des figures sur les côtés de l'angle droit.

Si l'on examine, au reste, la contexture de ce Livre VI des *Éléments*, il est clair que le cadre logique en est rempli après l'exposition de la théorie générale de la παραβολή (solution géométrique des problèmes du second degré), c'est-à-dire après la proposition 30, application nécessaire de cette théorie. Les trois propositions qui clôturent le Livre dans sa forme actuelle n'ont aucun lien ni entre elles, ni avec les précédentes. Ce sont de véritables hors-d'œuvre, et l'on sait, d'ailleurs, que la moitié de la dernière proposition est due à Théon. On peut donc parfaitement admettre que ce soit à cet éditeur d'Euclide qu'il faille attribuer l'incorporation aux *Éléments* de ces trois propositions, dont il aurait emprunté au moins la première au commentaire de Pappus.

Originairement elle viendrait de l'école héronienne, et peut-être du maître lui-même. Mais nous verrons plus loin qu'elle aurait, dans ce cas, été énoncée dans son Traité de Géométrie beaucoup plus tôt que dans un commentaire sur Euclide.

4. En dehors de Pappus, Proclus invoque pour ses citations de Héron un autre garant, qui est Porphyre.

L'existence d'un commentaire de ce fécond polygraphe sur Euclide n'est point établie d'une façon précise; mais on peut la conclure des appels que fait Proclus à son autorité.

Si le premier (p. 56) se rapporte nommément aux Συμμίκτα (*Mélanges*), Ouvrage en sept Livres, d'après Suidas; si le second (p. 252) peut se référer à un écrit philosophique, il en est quatre autres à la suite desquels viennent des démonstrations tout à fait semblables à celles que l'on peut rencontrer dans un commentaire.

Nous savons, d'ailleurs, que Porphyre avait écrit des *Introductions astronomiques*, c'est-à-dire, en fait, commencé à commenter Ptolémée; il nous reste enfin de lui un commentaire sur les *Harmoniques* de ce dernier mathématicien. Pappus, d'un autre côté, un peu plus jeune que Porphyre, a pu le connaître; la tradition lui attribue d'avoir achevé le travail sur les *Harmoniques* [1], et il a certainement commenté l'Almageste. Quoique la longue vie de Porphyre paraisse s'être surtout écoulée à Rome, tandis qu'on suppose mieux Pappus écrivant à Alexandrie, il n'en est pas moins dès lors naturel de voir dans le second, sinon le disciple, au moins l'héritier mathématique du premier, et l'on peut croire que le commentaire sur Euclide forma une partie de l'héritage.

Le travail de Porphyre connu de Proclus, soit directement, soit peut-être seulement par celui de Pappus, a-t-il été le premier? ou y a-t-il trace de commentaires antérieurs? Nous sommes, sur cette question, ramenés exclusivement soit à Héron, soit aux héroniens (οἱ περὶ Ἥρωνα).

Il est certain que, depuis qu'une école héronienne existait et publiait, sous le nom du maître, des traités et des recueils de problèmes sur la Géométrie pratique, en les mettant constamment au courant des changements des systèmes métriques, elle s'était habituée à les enrichir d'emprunts faits à Euclide [2] et à d'autres auteurs, d'abrégés et de compilations diverses. Ainsi a pu se constituer la fausse attribution à Héron du Traité des *Définitions*, dont j'ai parlé plus haut, parce que toutes les productions de l'école paraissaient sous le nom illustre du disciple de Ctésibios. Mais rien ne semble indiquer, dans cet ensemble de travaux, une tentative sérieuse de commenter les *Éléments*. Toutefois un érudit comme Porphyre, n'eût-il pas eu de valeur réelle comme géomètre, était suffisamment averti par l'existence de cette école, qu'il convenait, pour commenter Euclide, de faire des recherches dans les écrits de Héron, puisque ce dernier avait traité avec succès les mêmes sujets, suivant des tendances différentes. Porphyre, enfin,

---

(1) *Voir* Fabricius, *Biblioth. græca*, éd. Harles, t. V, p. 740.
(2) *Voir*, nommément, *Heron*, p. 41-43 et p. 115.

n'avait sans doute pas besoin, comme modèle, d'un commentaire déjà existant.

5. Nous avons recherché à quelles sources Proclus emprunte, selon toute probabilité, ses citations de Héron. Il convient maintenant d'en rapprocher les données un peu précises que l'on possède sur le contenu de la *Géométrie* de cet auteur, dont ces citations peuvent découler originairement. Or, dans l'écrit héronien qui présente le plus de caractères de fidélité, l'*Introduction de Géométrie*, avant le tableau du système métrique, se termine comme suit (Héron, p. 46) :

« Voici quels sont, pour le métrage, les points de repère fixes :

» *a*. Dans tout triangle, la somme de deux côtés quelconques est supérieure au troisième.

» *b*. Dans tout triangle rectangle, la somme des carrés des côtés de l'angle droit est égale au carré de l'hypoténuse.

» *c*. Dans tout cercle, la circonférence est $3\frac{1}{7}$ par rapport au diamètre.

» *d*. L'aire mesurée par le produit du diamètre et de la circonférence du cercle est égale à quatre cercles. »

Si Héron a réellement écrit une *Géométrie*, il s'est évidemment attaché à démontrer ces propositions et à en développer les conséquences.

Comme on le sait, les deux dernières sont dues à Archimède : il suffit de remarquer, en passant, que la Κύκλου μέτρησις (*Mesure du cercle*) du Syracusain qui nous a été conservée n'est qu'un extrait du Livre *Sur la circonférence du cercle*, aujourd'hui perdu, mais encore connu de Pappus, et que l'usage de faire cet extrait de la partie la plus importante peut dater du temps de Héron ; le dernier éditeur, avant Eutocius, de la *Mesure du cercle*, le mécanicien Isidore de Milet, n'aura fait que continuer la tradition du mécanicien d'Alexandrie.

Quant aux deux premières propositions, elles sont tirées d'Euclide, et il est remarquable que les fragments conservés par Pro-

clus, à l'exception de celui qui est relatif aux axiomes, se rapportent, II, III, IV à *a*, et V à *b*.

Nous avons déjà suffisamment parlé du fragment V; le fragment III est expressément la proposition *a* démontrée autrement que ne l'avait fait Euclide; II se rapporte à une proposition invoquée dans cette démonstration.

Quant à la relation du fragment IV, elle est moins claire, quoique la proposition *a* y soit invoquée, ce qui n'a pas lieu dans la démonstration correspondante d'Euclide; mais il appartient évidemment au même ordre d'idées : donner des règles permettant de contrôler la possibilité de figures auxquelles on suppose des dimensions déterminées.

Quant au fragment I — sur les axiomes —, peut-être la donnée a-t-elle été empruntée à Geminus, et non à Porphyre ou à Pappus; en tous cas, il n'est certainement pas tiré d'un commentaire, mais bien d'un traité original de Géométrie.

La conclusion de ces rapprochements serait donc négative en ce qui concerne l'existence d'un commentaire composé par Héron.

On peut, il est vrai, faire à cette conclusion une objection spécieuse tirée du fragment II. Le singulier renseignement historique qui s'y trouve ne semble, en effet, guère à sa place dans un traité didactique (¹).

Mais c'est supposer que ce traité était conçu dans la forme euclidienne, et nous avons tout droit de penser le contraire. S'il y a, en effet, un fragment bien authentique de la *Géométrie* de Héron, c'est le début (Héron, p. 43 et 106), qui raconte, « suivant ce que nous apprend l'ancienne tradition », l'invention de la Géométrie chez les Egyptiens. C'est le ton d'un écrivain qui se plaît aux digressions historiques, ce n'est plus la sévère nudité des œuvres classiques.

En résumé, nous admettons les conclusions suivantes :

1° Il n'y a aucune raison plausible de supposer que Héron ait commenté Euclide.

(¹) Le *Philippos* dont il y est parlé semble être le disciple de Platon, Philippe d'Oponte ou de Medma. Du moins on ne connaît aucun mathématicien postérieur du même nom. L'identité de ce personnage, sous les deux épithètes relatives à sa nationalité, a d'ailleurs été démontrée par Bœck (*Sonnenkreise der Alten*, p. 34-40).

2° Les citations faites par Proclus, de seconde main, se rapportent à une *Géométrie* composée par le disciple de Ctésibios.

3° Cet Ouvrage, spécialement destiné à l'enseignement de l'arpentage, se bornait, quant aux démonstrations, aux théorèmes pratiquement utiles à connaître pour les élèves, tout en se complétant par de nombreuses applications numériques.

4° L'exposition des théories s'y trouvait agrémentée de remarques instructives et de renseignements historiques qui la différenciaient d'une pure série de propositions mathématiques.

5° Il est possible que ce soit par cette voie indirecte, aussi bien que par Geminus, que nous soient parvenues diverses données que Proclus a empruntées à Eudème, dont il ne semble pas avoir eu l'*Histoire* entre les mains.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

CLIFFORD (W.-K.). — Mémoires mathématiques édités par R. Tucker avec une Préface de H.-J.-S. Smith. — In-8°, LII, 648 pages. Londres, Macmillan and C°.

William Kingdon Clifford, né à Exeter le 4 mai 1845, est mort emporté par la phthisie à Madère le 3 mars 1879. Cette fin prématurée excita d'universels regrets, non seulement en Angleterre, parmi les maîtres et les amis de Clifford, mais aussi en France, sur le continent, partout où la Géométrie et l'Analyse sont cultivées. Clifford s'était toujours occupé des questions les plus abstraites et les plus difficiles ; de son vivant, son nom n'a pas été aussi connu qu'il méritait de l'être, mais ceux d'entre nous qui se tenaient au courant de ses travaux n'hésitaient pas à leur accorder le plus haut degré d'estime et d'admiration ; ils s'expliquaient sans peine le jugement des plus grands géomètres de l'Angleterre qui faisaient reposer sur Clifford leurs meilleures espérances. Un grand nombre de travaux, accomplis dans des directions très variées par cet excellent géomètre, portaient la marque d'un esprit inventif et profondément philosophique.

En parcourant les Mémoires rassemblés avec un soin pieux par la veuve et les amis de Clifford, les uns déjà publiés du vivant de leur auteur, les autres inédits et trouvés dans ses papiers, on reconnaît sans peine une foule de vues originales et profondes que Clifford aurait certainement développées et qui se seraient montrées fécondes. M. Tucker, secrétaire honoraire de la Société mathématique de Londres, s'est chargé, dans la Préface, de retracer le plus simplement possible les faits principaux de la vie de Clifford, ses succès de professeur et de géomètre. Il nous donne aussi, dans leur ordre chronologique, la liste des publications de Clifford. Dans une Introduction fort étendue, qui vient à la suite, M. Smith apprécie les principaux travaux ; il montre avec autorité la place importante qu'ils doivent occuper dans le développement de la science moderne. Il les classe ensuite de la manière suivante :

Un premier groupe se rapporte à ce que l'on pourrait appeler

l'algèbre de la logique. Il comprend deux Mémoires sur les propositions composées.

Deux autres Mémoires se rapportent à la théorie des équations et de l'élimination. L'un d'eux, qui est très court, contient une démonstration du théorème que toute équation algébrique a une racine.

Un troisième groupe se compose de quatre Mémoires sur les fonctions thêta et les intégrales abéliennes. Nous y remarquons surtout un Mémoire *sur la forme canonique et la dissection des surfaces de Riemann*.

Une quatrième division comprend les Mémoires sur la théorie des invariants et des covariants, des recherches sur les théories nouvelles d'Algèbre appliquée à la Chimie et sur les nombres complexes alternés.

Mais c'est surtout de Géométrie que Clifford s'est occupé. Il a publié environ trente Mémoires sur la Géométrie synthétique et projective, sur l'application de l'Algèbre à la Géométrie, sur la Cinématique, sur la théorie géométrique de la transformation des fonctions elliptiques et enfin sur les conceptions généralisées de l'espace dont l'origine est dans un célèbre Mémoire de Riemann.

On voit, sans que nous insistions davantage, que la publication actuelle n'est pas seulement un hommage rendu à la mémoire de Clifford : c'est aussi un service rendu aux géomètres et aux analystes par MM. Tucker, Smith et tous ceux qui les ont aidés dans la tâche qu'ils avaient entreprise.

MÉLANGES.

RECHERCHES SUR LES FONCTIONS $2r$ FOIS PÉRIODIQUES DE r VARIABLES.

(Lettres de M. C. Weierstrass à M. C.-W. Borchardt.)

Traduction publiée avec l'autorisation de l'auteur.

Par M. J. MOLK.

Première Lettre (¹).

Dans les *Monatsberichte* de notre Académie (1869, p. 855), tu trouveras énoncé le théorème :

Si l'on désigne par $f(u_1, u_2, \ldots, u_r)$ une fonction univoque (²), *$2r$ fois périodique, ayant le caractère d'une fonction rationnelle pour toutes les valeurs finies des r variables $u_1, \ldots, u_r$; toute autre fonction, jouissant de ces propriétés et ayant les mêmes systèmes de périodes, peut être exprimée rationnellement à l'aide des $(r+1)$ fonctions $f_1, \frac{\partial f_1}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial f_1}{\partial u_r}$, ces dernières étant liées par une équation algébrique.*

Ce théorème, cher ami, correspond, comme tu le vois, à celui de M. Liouville, d'après lequel, $f_1(u)$ étant une fonction univoque doublement périodique, à deux infinis, toute autre fonction univoque $f(u)$, ayant les mêmes périodes que $f_1(u)$ et un nombre quelconque d'infinis, peut être mise sous la forme

$$f(u) = \frac{M + N f'_1(u)}{L},$$

L, M, N désignant des fonctions rationnelles entières de $f_1(u)$.

(¹) *Journal für Mathematik*, t. LXXXIX.

(²) Je me suis permis de traduire *eindeutig* par *univoque*, le mot *uniforme* me semblant devoir être réservé pour exprimer l'idée fondamentale de *Gleichmässigkeit; gleichmässige Convergenz* = convergence uniforme. Comparez : *Remarques sur quelques points de la théorie des fonctions analytiques par M. C. Weierstrass*. Traduction par M. J. Tannery. Paris, 1882.

La différence consiste seulement en ce que, d'après mon théorème, $f(u)$ peut être exprimée rationnellement en fonction de $f_1(u)$ et de $f'_1(u)$, $f_1(u)$ étant une fonction quelconque de l'espèce considérée, ayant les mêmes périodes que $f(u)$. On peut d'ailleurs facilement déduire ce théorème de celui de M. Liouville.

L'énoncé que je viens de donner est à peu près celui des *Monatsberichte,* mais il demande à être modifié.

Je dirai que toutes les fonctions univoques $2r$ fois périodiques $f(u_1, \ldots, u_r)$, ayant le caractère d'une fonction rationnelle pour tout système fini des variables $u_1, \ldots, u_r$, font partie d'une même *classe*. J'énoncerai alors le théorème en question de la manière suivante :

Toutes les fonctions $f(u_1, \ldots, u_r)$, faisant partie d'une classe déterminée, peuvent être exprimées rationnellement à l'aide de l'une d'entre elles $f_1(u_1, \ldots, u_r)$ et de ses dérivées partielles $\frac{\partial f_1}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial u_r}$. Le choix de f_1 est, en général, arbitraire ; il peut cependant se faire que l'on ait à exclure certaines fonctions de la classe considérée. Chaque fonction f est liée à ses r dérivées $\frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial u_r}$ par une équation algébrique.

Ce théorème n'est d'ailleurs qu'un cas particulier d'un autre plus général que je vais te communiquer. Mais il me semble nécessaire d'en faire précéder l'énoncé par quelques remarques ayant pour but de fixer exactement le caractère des fonctions auxquelles il se rapporte.

M. Liouville désigne, dans les *Leçons* que tu as rédigées ([1]), les fonctions qui font l'objet de ses recherches par *fonctions bien déterminées*, sans préciser davantage ce qu'il faut entendre par là. Mais il résulte des hypothèses qu'il fait dans la démonstration de ses théorèmes, et des résultats qu'il obtient, qu'il a toujours en vue des fonctions univoques d'une variable, n'ayant aucun point essentiel fini ([2]). En effet, ses théorèmes n'ont plus lieu pour d'au-

---

([1]) *Journal für Mathematik*, t. LXXXVIII.

([2]) Pour la terminologie employée par M. Weierstrass, consulter son Mémoire : *Zur Theorie der eindeutigen Functionen*, traduit par M. Picard (*Annales de l'École Normale supérieure*, 18[illegible]).

tres fonctions univoques. Par exemple,

$$F(u) = e^{\sin \operatorname{am} u}$$

est univoque et doublement périodique; cependant, on ne peut exprimer $F(u)$ rationnellement en fonction de $\sin \operatorname{am} u$ et de

$$\frac{d \sin \operatorname{am} u}{du}.$$

Cela tient à ce que tous les arguments u, pour lesquels

$$\sin \operatorname{am} u = \infty,$$

sont des points essentiellement singuliers de $e^{\sin \operatorname{am} u}$. En effet, le développement de $F(u)$ suivant les puissances entières de $(u - a)$ contient un nombre infini de termes à exposant négatif. Si donc on veut étendre les théorèmes de M. Liouville sur les fonctions doublement périodiques d'une variable au cas de fonctions $2r$ fois périodiques de r variables, il est manifeste que ce ne sera possible que pour des fonctions jouissant de propriétés particulières.

Définitions. — Lorsque je considère simultanément les variables $u_1, \ldots, u_r$, je nomme, pour abréger, chaque système de valeurs de ces variables un *point* dans le *domaine* de $u_1, \ldots, u_r$; $(a_1, \ldots, a_r)$ étant un point déterminé du domaine, et δ un nombre réel positif donné, l'ensemble des valeurs pour lesquelles

$$| u_k - a_k | < \delta, \quad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

forme le *voisinage* (δ) du point $(a_1, \ldots, a_r)$. Dans le cas où la valeur de δ n'est point fixée à l'avance, je parlerai simplement du *voisinage* de $(a_1, \ldots, a_r)$. Enfin, je conviens de remplacer $u - \infty$ par $\frac{1}{u}$.

Lorsqu'une fonction univoque $f(u_1, \ldots, u_r)$ peut être représentée dans le voisinage d'un point $(a_1, \ldots, a_r)$ par une série convergente de la forme

$$\sum A_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_r} (u_1 - a_1)^{\nu_1} (u_2 - a_2)^{\nu_2} \ldots (u_r - a_r)^{\nu_r} \quad (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r = 0, 1, \ldots, \infty),$$

je dirai que cette fonction A *régulière* au point $(a_1, \ldots, a_r)$

$\nu_1, \ldots, \nu_r$ sont des nombres entiers positifs, et les coefficients $A_{\nu_1, \ldots, \nu_r}$ sont indépendants de $u_1, \ldots, u_r$.

Dans toute considération où la forme de la série joue seule un rôle et où la valeur des coefficients est indifférente, je désignerai cette série par

$$P(u_1 - a_1, \ldots, u_r - a_r)$$

ou par

$$P(u_1, \ldots, u_r \mid a_1, \ldots, a_r).$$

L'ensemble des points où une fonction $f(u_1, \ldots, u_r)$ est régulière forme un *continuum* de $2r$ dimensions, qui est nécessairement limité. Tout point $(a'_1, \ldots, a'_r)$ situé sur la limite du *continuum* est un point *singulier* de la fonction considérée.

Il peut arriver que le produit de $f(u_1, \ldots, u_r)$ par une série entière $P_0(u_1, \ldots, u_r \mid a'_1, \ldots, a'_r)$, qui s'annule pour

$$u_1 = a'_1, \ldots, u_r = a'_r,$$

soit une fonction régulière au point $(a'_1, \ldots, a'_r)$. Alors, pour tous les points $(u_1, \ldots, u_r)$ situés dans le voisinage de $(a'_1, \ldots, a'_r)$, on peut mettre $f(u_1, \ldots, u_r)$ sous la forme

$$\frac{P_1(u_1, \ldots, u_r \mid a'_1, \ldots, a'_r)}{P_0(u_1, \ldots, u_r \mid a'_1, \ldots, a'_r)}.$$

Dans ce cas, nous dirons que $(a'_1, \ldots, a'_r)$ est un *point singulier non essentiel*. Dans tout autre cas, ce point singulier est *essentiel*.

Pour $r > 1$, il importe de distinguer entre ces deux genres bien différents de points singuliers non essentiels.

Si $(a'_1, \ldots, a'_r)$ désigne l'un de ces points, on peut toujours représenter $f(u_1, \ldots, u_r)$ par un quotient

$$\frac{P_1(u_1, \ldots, u_r \mid a'_1, \ldots, a'_r)}{P_0(u_1, \ldots, u_r \mid a'_1, \ldots, a'_r)},$$

tel que les séries entières P_0 et P_1 ne soient pas toutes deux divisibles par une série entière $P(u_1, \ldots, u_r \mid a'_1, \ldots, a'_r)$ s'annulant pour $u_1 = a'_1, \ldots, u_r = a'_r$.

Mais alors, si $P_1(a'_1, \ldots, a'_r \mid a'_1, \ldots, a'_r)$ n'est pas nulle, il est manifeste que la valeur de $f(u_1, \ldots, u_r)$ est infiniment grande pour

tous les points $(u_1, \ldots, u_r)$ situés dans un voisinage infiniment petit de $(a'_1, \ldots, a'_r)$ (¹); et, par suite, que $f(a'_1, \ldots, a'_r) = \infty$.

Si, au contraire, $P_1(a'_1, \ldots, a'_r \mid a'_1, \ldots, a'_r) = 0$, on peut démontrer qu'il existe, quelque petit que soit δ, dans le voisinage (δ) de $(a'_1, \ldots, a'_r)$, des points $(u_1, \ldots, u_r)$ tels que $f(u_1, \ldots, u_r)$ ait une valeur quelconque fixée à l'avance. Alors $f(a'_1, \ldots, a'_r)$ n'a aucune valeur déterminée.

Remarquons encore que l'ensemble des points où $f(u_1, \ldots, u_r)$ se comporte comme une fonction rationnelle, c'est-à-dire l'ensemble de ses points non singuliers et singuliers non essentiels, est un *continuum* à $2r$ dimensions dont la limite est formée par les points singuliers essentiels de la fonction.

Si $(a_1, \ldots, a_r)$ est un point déterminé à l'intérieur du *continuum* et si $f(a_1, \ldots, a_r)$ a une valeur finie bien déterminée, $f(u_1, \ldots, u_r)$ est une fonction *régulière* pour tous les points situés dans un voisinage déterminé de $(a_1, \ldots, a_r)$.

Si $f(a_1, \ldots, a_r) = \infty$, $r > 1$, il y a dans tout voisinage de $(a_1, \ldots, a_r)$ qui ne contient aucun point singulier de la fonction

$$\frac{1}{f(u_1, \ldots, u_r)}$$

un nombre infini de points, formant une variété $(2r-2)^{\text{ième}}$, où la fonction $f(u_1, \ldots, u_r)$ a une valeur infiniment grande, tandis qu'elle est régulière en tout autre point du domaine considéré.

Si enfin $f(a_1, \ldots, a_r)$ n'a aucune valeur déterminée, il y a non seulement dans le voisinage (δ) de $(a_1, \ldots, a_r)$ un nombre infini d'autres points singuliers non essentiels où la fonction $f(u_1, \ldots, u_r)$ a la valeur ∞, mais encore pour $r > 2$, un nombre infini de points où elle est indéterminée; et cela, quelque petit que soit δ. Les premiers forment une variété $(2r-2)^{\text{ième}}$; les derniers, une variété $(2r-4)^{\text{ième}}$.

J'ajoute à ce qui précède l'énoncé d'un théorème fondamental dont je ne ferai usage que plus tard.

(¹) C'est-à-dire que, quelque grand que soit un nombre donné G, on peut toujours déterminer un δ assez petit pour que, pour tous les points $(u'_1, \ldots, u'_r)$ du voisinage (δ) de $(a'_1, \ldots, a'_r)$, la valeur de $f(u'_1, \ldots, u'_r)$ soit plus grande que G.

Une fonction univoque $f(u_1, \ldots, u_r)$ n'ayant aucun point essentiellement singulier dans tout le domaine des variables $u_1, \ldots, u_r$, est une fonction rationnelle.

J'ai démontré ce théorème pour des fonctions d'*une* variable dans mon Mémoire cité tout à l'heure; pour des fonctions de *plusieurs* variables, la démonstration n'est pas de beaucoup aussi simple qu'il le semble au premier instant.

Je désire, enfin, appeler ton attention sur un dernier point.

Si, par un procédé quelconque, on forme à l'aide de r variables $u_1, \ldots, u_r$ un *continuum* à $2r$ dimensions, on peut toujours déterminer des fonctions univoques de $u_1, \ldots, u_r$, se comportant comme des fonctions rationnelles en tous les points situés à l'intérieur de ce *continuum*, et en aucun des points de sa limite. Les points singuliers essentiels d'une fonction univoque de r variables ne sont donc pas nécessairement isolés; il est, au contraire, possible qu'ils soient représentés par un ou plusieurs des complexes (1) que l'on peut former dans le domaine des r variables imaginaires.

Après ces remarques préliminaires, dont je compte faire souvent usage, je conviens, pour abréger, d'entendre par fonction $2r$ fois périodique de r variables, non seulement une fonction univoque, mais encore une fonction n'ayant aucun point essentiel fini.

Ceci posé, je démontre qu'il est possible, d'une infinité de manières, d'adjoindre à une fonction quelconque $f_1(u_1, \ldots, u_r)$, $2r$ fois périodique, d'autres fonctions

$$f_2(u_1, \ldots, u_r), \quad f_3(u_1, u_2, \ldots, u_r), \quad \ldots, \quad f_r(u_1, u_2, \ldots, u_r),$$

faisant partie de la même *classe* que f_1, et telles que le déterminant fonctionnel

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial u_k} \right| \quad (i, k = 1, 2, \ldots, r)$$

ne soit pas identiquement nul, c'est-à-dire telles que $f_1, f_2, \ldots, f_r$ soient indépendantes les unes des autres.

J'ai montré, dans un Mémoire publié dans les *Monatsberichte* (1876, p. 687) et intitulé *Nouvelle démonstration d'un théo-*

(1) Gebilde.

rème fondamental de la théorie des fonctions périodiques de plusieurs variables, que lorsque f_1 jouit des propriétés que nous lui avons supposées, le déterminant

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(u_1, \ldots, u_r)}{\partial u_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial f_1(u_1, \ldots, u_r)}{\partial u_r} \\ \dfrac{\partial f_1(u'_1, \ldots, u'_r)}{\partial u'_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial f_1(u'_1, \ldots, u'_r)}{\partial u'_r} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f_1(u_1^{(r-1)}, \ldots, u_r^{(r-1)})}{\partial u_1^{r-1}}, & \ldots, & \dfrac{\partial f_1(u_1^{(r-1)}, \ldots, u_r^{(r-1)})}{\partial u_r^{r-1}} \end{vmatrix}$$

n'était pas identiquement nul.

Si donc nous désignons par $c'_1, \ldots, c'_r; \ldots; c_1^{(r-1)}, \ldots, c_r^{(r-1)}$ des constantes par rapport à $u_1, \ldots, u_r$, et si nous posons

$$u'_\alpha = u_\alpha + c'_\alpha; \ \ldots; \ u_\alpha^{(r-1)} = u_\alpha + c_\alpha^{(r-1)} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, r),$$

nous pouvons donner à $c'_\alpha, \ldots, c_\alpha^{(r-1)}$ des valeurs telles que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(u_1, \ldots, u_r)}{\partial u_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial f_1(u_1, \ldots, u_r)}{\partial u_r} \\ \dfrac{\partial f_1(u_1 + c'_1, \ldots, u_r + c'_r)}{\partial u_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial f_1(u_1 + c'_1, \ldots, u_r + u'_r)}{\partial u_r} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f_1(u_1 + c_1^{(r-1)}, \ldots, u_r + c_r^{(r-1)})}{\partial u_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial f_1(u_1 + c_1^{(r-1)}, \ldots, u_r + c_r^{(r-1)})}{\partial u_r} \end{vmatrix}$$

ne soit pas identiquement nul.

Choisissons alors $f_2(u_1, \ldots, u_r) = f_1(u_1 + c'_1, \ldots, u_r + c'_r); \ldots;$ $f_r(u_1, \ldots, u_r) = f_1(u_1 + c_1^{(r-1)}, \ldots, u_r + c_r^{(r-1)})$. Il est manifeste que les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_r$ ont mêmes systèmes de périodes, et que leur déterminant fonctionnel n'est pas identiquement nul.

Soit maintenant $f_1(u_1, \ldots, u_r), \ldots, f_r(u_1, \ldots, u_r)$ un système quelconque de r fonctions indépendantes les unes des autres, et faisant partie de la même classe.

On peut démontrer ce théorème :

Supposons que les r variables $u_1, \ldots, u_r$ soient liées aux va-

riables $s_1, s_2, \ldots, s_r$ par les r équations

$$f_1(u_1, \ldots, u_r) = s_1, \quad f_2(u_1, \ldots, u_r) = s_2, \quad \ldots, \quad f_r(u_1, \ldots, u_r) = s_r.$$

Si l'on fait abstraction de systèmes particuliers $(s_1, s_2, \ldots, s_r)$ qui ne forment qu'une variété $(2r-2)^{ième}$, à chaque système de valeurs $s_1, s_2, \ldots, s_r$ correspond une infinité de points $(u_1, \ldots, u_r)$ ne faisant partie, ni des points singuliers des fonctions $f_1, \ldots, f_r$, ni des points pour lesquels le déterminant fonctionnel

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial u_k} \right| \quad (i, k = 1, 2, \ldots, r)$$

est nul. Mais, si nous groupons les points $(u_1, \ldots, u_r)$ correspondant à un même système $(s_1, \ldots, s_r)$, de manière que deux points $(u'_1, \ldots, u'_r)$ et $(u''_1, \ldots, u''_r)$ fassent partie du même groupe ou de groupes différents, selon que les différences $u''_1 - u'_1, \ldots, u''_r - u'_r$ forment un système de périodes des fonctions f, ou non, « le nombre m de ces groupes est fini et ne dépend pas du système $s_1, \ldots, s_r$ choisi ». Je nomme ce nombre m le degré *du système de fonctions $f_1, \ldots, f_r$.*

Ce théorème démontré, on en déduit les suivants :

Désignons par $f(u_1, \ldots, u_r)$ une fonction $2r$ fois périodique dont les systèmes de périodes contiennent tous ceux des fonctions $f_1, \ldots, f_r$ (1).

f est liée à $f_1, \ldots, f_r$ par une équation irréductible dont le degré par rapport à f est égal à m ou à un diviseur de m.

Entre toutes les fonctions $2r$ fois périodiques de la classe à laquelle appartiennent $f_1, \ldots, f_r$, il y en a une infinité qui sont liées à $f_1, \ldots, f_r$ par une équation irréductible de degré m. Si f_{r+1} désigne l'une de ces fonctions, $f(u_1, \ldots, u_r)$ peut être exprimée rationnellement en fonction de $f_1, f_2, \ldots, f_{r+1}$.

Les dérivées de $f_1, \ldots, f_{r+1}$ font partie de la classe de ces fonc-

(1) Il n'est point dit que les systèmes de périodes de f ne contiennent que ceux des fonctions $f_1, \ldots, f_r$.

tions. Si, donc R, R_1, ..., R_r désignent des fonctions rationnelles de f_1, ..., f_{r+1}, et si l'on pose

$$f = R(f_1, f_2, \ldots, f_{r+1}),$$

on a aussi

$$\frac{\partial f}{\partial u_k} = R_k(f_1, f_2, \ldots, f_{r+1}) \quad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

On peut élimier $f_1, f_2, \ldots, f_{r+1}$ entre ces $(r+1)$ équations et celle qui lie f_{r+1} à $f_1, f_2, \ldots, f_r$. On obtient ainsi, en général, f_k exprimée en fonction rationnelle de

$$f, \frac{\partial f}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial u_r}.$$

C'est le théorème que j'énonçais en commençant.

Je n'ai point recherché les conditions auxquelles doit satisfaire $R(f_1, \ldots, f_{r+1})$ pour que $f_1, \ldots, f_{r+1}$ puissent être vraiment exprimés rationnellement en fonction de f et de ses dérivées

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial u_r}.$$

C'est pourquoi j'ai dû modifier l'énoncé donné dans les *Monatsberichte*.

Le premier de ces théorèmes, qui permet de donner la définition du *degré* d'un système de r fonctions $2r$ fois périodiques, indépendantes les unes des autres et faisant partie de la même classe, est le plus difficile à démontrer. Cela vient principalement de ce que, pour $r > 1$, il existe dans le domaine de $(u_1, \ldots, u_r)$ des points singuliers où les fonctions $f_1, \ldots, f_{r+1}$ sont toutes ou en partie indéterminées.

Si tu veux bien me permettre de continuer à te communiquer mes résultats, je t'exposerai, dans une autre Lettre, la voie que j'ai suivie pour démontrer les théorèmes énoncés. Elle n'est point courte, il est vrai, mais je crois les démonstrations parfaitement rigoureuses. Elle m'a, d'ailleurs, amené au but que j'avais en vue dès le début de mes recherches : *montrer que toute fonction $f(u_1, \ldots, u_r)$ de l'espèce considérée peut être exprimée ration-*

nellement à l'aide d'un certain nombre de fonctions

$$\mathfrak{I}(v_1, \ldots, v_r)_\lambda \text{ [1]},$$

ayant toutes les mêmes modules, et dont les arguments $v_1, \ldots, v_r$ *sont fonctions linéaires et homogènes de* $u_1, u_2, \ldots, u_r$.

SUR LES INTÉGRALES ALGÉBRIQUES DES ÉQUATIONS LINÉAIRES;

Par M. GOURSAT.

Soit

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a\frac{dy}{dx} + by \tag{1}$$

une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients rationnels; si l'intégrale générale de cette équation est une fonction algébrique, il est clair que, entre deux intégrales quelconques, il existera une relation algébrique à coefficients constants. Mais la proposition réciproque n'a été, du moins à ma connaissance, établie nulle part; je me propose de montrer que, sauf des cas tout particuliers, quand deux intégrales distinctes de l'équation (1) sont liées par une relation algébrique, ces intégrales sont elles-mêmes des fonctions algébriques de la variable x.

Soient donc y_1, y_2 deux intégrales linéairement indépendantes de l'équation (1), liées par la relation $F(y_1, y_2) = 0$, où F désigne une fonction entière à coefficients constants. Des deux équations

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = a\frac{dy_1}{dx} + by_1, \tag{2}$$

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} = a\frac{dy_2}{dx} + by_2, \tag{3}$$

---

[1] Pour la définition des fonctions $\mathfrak{I}(v_1, \ldots, v_r)$, comparez : *Journal für Mathematik*, t. LXXXI, p. 170.

on tire

$$(4)\qquad b = \frac{\dfrac{d^2 y_2}{dx^2}\dfrac{dy_1}{dx} - \dfrac{d^2 y_1}{dx^2}\dfrac{dy_2}{dx}}{y_2\dfrac{dy_1}{dx} - y_1\dfrac{dy_2}{dx}},$$

D'ailleurs, si l'on considère y_2 comme une fonction de y_1, on a

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{\dfrac{dy_2}{dx}}{\dfrac{dy_1}{dx}},$$

$$\frac{d^2 y_2}{dy_1^2} = \frac{\dfrac{d^2 y_2}{dx^2}\dfrac{dy_1}{dx} - \dfrac{d^2 y_1}{dx^2}\dfrac{dy_2}{dx}}{\left(\dfrac{dy_1}{dx}\right)^3};$$

et la relation (4) devient

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2 = \frac{y_2 - y_1\dfrac{dy_2}{dy_1}}{\dfrac{d^2 y_2}{dy_1^2}}.$$

Désignons par u l'expression contenue dans le second membre; u sera liée à y_1 par une relation algébrique à coefficients constants $f(u, y_1) = 0$, qu'il sera facile de calculer en partant de la relation $F(y_1, y_2) = 0$.

La fonction y_1 de x vérifiera donc les deux équations différentielles

$$(2)\qquad \frac{d^2 y_1}{dx^2} = a\frac{dy_1}{dx} + by_1,$$

$$(5)\qquad \frac{1}{b}\left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2 = u;$$

différentions les deux membres de la dernière par rapport à x, et divisons par $\frac{dy_1}{dx}$. On obtient une nouvelle relation

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{1}{2b}\frac{db}{dx}\frac{dy_1}{dx} + \frac{b}{2}\frac{du}{dy_1},$$

qui, combinée avec l'équation (2), nous donne

$$\left(2ab - \frac{db}{dx}\right)\frac{dy_1}{dx} = b^2\left(\frac{du}{dy_1} - 2y_1\right).$$

Enfin, si l'on compare cette dernière avec l'équation (5), on obtient la relation

$$(6) \qquad \frac{\left(2ab - \frac{db}{dx}\right)^2}{b^3} = \frac{\left(\frac{du}{dy_1} - 2y_1\right)^2}{u}.$$

Si $\dfrac{\left(2ab - \frac{db}{dx}\right)^2}{b^3}$ ne se réduit pas à une quantité constante, en éliminant u et $\dfrac{du}{dy_1}$ entre l'équation (6) et les équations $f(u, y_1) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y_1} + \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{du}{dy_1} = 0$, on sera conduit à une relation algébrique entre x et y_1. L'*intégrale générale de l'équation* (1) *est donc une fonction algébrique*.

M. Appell a montré (*Annales de l'École Normale*, t. X, p. 418) comment on pouvait reconnaître l'existence d'une relation algébrique entre deux intégrales linéairement indépendantes de l'équation (1), et comment on pouvait calculer les coefficients constants qui entrent dans cette relation quand on se donne les valeurs initiales de ces deux intégrales et de leurs dérivées premières, pour une valeur de x qui ne coïncide pas avec un point singulier de l'équation différentielle. On pourra donc, dans ces cas, trouver l'intégrale générale de l'équation (1) par de simples éliminations.

Les conclusions précédentes sont en défaut si $\dfrac{\left(2ab - \frac{db}{dx}\right)^2}{b^3}$ ne contient pas x; mais, dans ces cas, il est aisé de reconnaître que l'intégration de l'équation (1) se ramène à des quadratures. Supposons d'abord que l'on ait $\dfrac{db}{dx} - 2ab = 0$; alors l'équation (1) admet les deux intégrales

$$y_1 = \sin[\varphi(x)], \quad y_2 = \cos[\varphi(x)],$$

où

$$\varphi(x) = \int \sqrt{b}\,dx.$$

Entre ces deux intégrales existe la relation

$$y_1^2 + y_2^2 = 1.$$

Si l'on a

$$\left(\frac{db}{dx} - 2ab\right)^2 = hb^3,$$

h étant différent de zéro, en faisant un changement de variable $x = f(\zeta)$ de façon à annuler le coefficient de $\frac{dy}{d\zeta}$, l'équation (1) devient

$$(1') \qquad \left(\frac{\sqrt{h}}{2}\zeta + \alpha\right)^2 \frac{d^2y}{d\zeta^2} = y;$$

elle admet les deux intégrales

$$y_1 = \left(\frac{\sqrt{h}}{2}\zeta + \alpha\right)^{r_1}, \quad y_2 = \left(\frac{\sqrt{h}}{2}\zeta + \alpha\right)^{r_2},$$

r_1 et r_2 désignant les deux racines de l'équation

$$hr(r-1) - 4 = 0.$$

Il y aura une relation algébrique entre y_1 et y_2, si les deux racines de cette équation sont commensurables entre elles.

Ces cas exceptionnels écartés, je remarque que les considérations précédentes s'appliquent sans modification à des équations différentielles linéaires du second ordre d'une forme plus générale que l'équation (1) : ce sont les équations

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \varphi(x, y)\frac{dz}{dx} + \psi(x, y)z,$$

où $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ désignent des fonctions rationnelles de x et de y, y étant liée à x par une relation algébrique $F(x, y) = 0$. De pareilles équations ont été considérées par M. Appell dans diverses communications. La méthode précédente prouve que, s'il existe une relation algébrique entre deux intégrales d'une équation de cette forme, l'intégrale générale est elle-même une fonction algébrique. Si le genre de la relation $F(x, y) = 0$ est égal à l'unité, alors x et y peuvent s'exprimer par des fonctions uniformes dou-

blement périodiques d'un paramètre t, et l'intégrale générale est elle-même une fonction algébrique de $\sin \operatorname{am} t$.

Enfin, je ferai remarquer que la même méthode s'applique à toute équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients quelconques, quand on connaît une relation, algébrique ou non, entre deux intégrales distinctes de cette équation. Elle permet de former l'intégrale générale par des différentiations et des éliminations, sauf, bien entendu, dans les cas exceptionnels que j'ai signalés plus haut.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

KLEIN (F.). — UEBER RIEMANN'S THEORIE DER ALGEBRAISCHEN FUNCTIONEN UND IHRER INTEGRALE, eine Ergänzung der gewöhnlichen Darstellungen. — Leipzig, bei Teubner, 1882.

Dans le semestre d'hiver 1880-1881 et dans le semestre d'été 1881, M. Félix Klein s'était proposé de traiter, dans le Cours dont il est chargé à l'Université de Leipzig, la théorie des fonctions à un point de vue spécialement géométrique. Étudier à fond la première partie du Mémoire de Riemann sur la théorie des fonctions abéliennes, montrer comment des considérations empruntées à la Physique permettent de se faire une idée assez nette et assez précise de l'emploi du principe de Dirichlet par Riemann, donner enfin aux étudiants une idée claire et exacte de ce que l'on doit entendre par surfaces de Riemann, tel est le but que M. Klein s'était proposé; tel est aussi le sujet de ce petit livre, où il a résumé et ordonné les leçons de ces deux semestres.

PREMIÈRE PARTIE.

Considérations préliminaires.

1. *Emploi des courants stationnaires dans le plan pour la représentation des fonctions de $x+iy$.* — Soit

$$w = u + iv, \quad z = x + iy, \quad w = f(z),$$

on a

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

et, par suite,

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

et de même

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

On considérera u comme un *potentiel de vitesse* (*Geschwind-*

igkeitspotential), en sorte que $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ sont les composantes de la vitesse avec laquelle un fluide se meut parallèlement au plan XY. L'équation (2) exprime alors que le courant est *stationnaire*. Les courbes $u =$ const. seront appelées *courbes de niveau*, les courbes $v =$ const., qui, d'après les équations (1), sont orthogonales aux précédentes, sont les *courbes de courant*.

La fonction $u + iv$ ainsi représentée est seulement déterminée à une constante près. De plus, les équations (1), (2) et (3) demeurent invariables quand on remplace u par v et v par $-u$. On est donc conduit à considérer un second état stationnaire où le potentiel de vitesse est v et où les courbes du courant sont $u =$ const. On a ainsi la représentation de la fonction $v - ui$, et nous désignons le courant correspondant sous le nom de courant *conjugué*.

Si, au point z_0, $\frac{dw}{dz}$, $\frac{d^2 w}{dz^2}$, ..., jusqu'à $\frac{d^\alpha w}{dz^\alpha}$ sont nuls, en ce point $(\alpha + 1)$ courbes $u =$ const. se coupent en faisant des angles égaux, et autant de courbes $v =$ const. viennent bissecter ces différents angles.

Un point de croisement de multiplicité supérieure peut être considéré comme la limite de plusieurs points de croisement simple.

2. *Considérations des points où $w = f(z)$ devient infini.* — On suppose que le courant différentiel $\frac{dw}{dz}$ ne possède aucune position singulière essentielle, ou, ce qui revient au même, que w ne peut devenir infini que comme une expression de la forme

$$A \log(z - z_0) + \frac{A_1}{(z - z_0)} + \frac{A_2}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{A_\nu}{(z - z_0)^\nu},$$

ν étant un nombre fini déterminé.

On a donc à considérer différentes sortes d'infinis : infini logarithmique, infini algébrique de multiplicité un, etc.

Voyons ce qui, dans la représentation par des courants, correspond aux différents cas.

Considérons d'abord un point d'infini logarithmique

$$w = A \log(z - z_0) + C_0 + C_1(z - z_0) + C_2(z - z_0)^2 + \dots;$$

$2 A i \pi$ est le résidu relatif à ce point.

Si A est réel, les courbes de niveau sont, dans le voisinage de z_0, de petits cercles; les courbes de courant, des rayons partant de ce point. $z = z_0$ est une source, et l'on trouve, pour son rendement, le quotient par i du résidu.

Si A est purement imaginaire, les deux systèmes de courbes se permutent; on dit alors qu'il y a au point z_0 un tourbillon.

Pour les points d'infini algébrique d'ordre 1, les courbes $u =$ const. et $v =$ const. sont, dans le voisinage du point z_0, de petits ovales. La fonction u prend, dans le voisinage de ce point, une valeur quelconque.

3. *Fonctions rationnelles et leurs intégrales. Déduction des points d'infini d'ordre supérieur de ceux d'ordre moindre.* — Soit

$$w = \frac{\Phi(z)}{\Psi(z)},$$

Φ et Ψ étant de degré n. En comptant chaque point avec son ordre de multiplicité, on peut dire qu'il y a n points d'infini algébrique et $2n - 2$ points de croisement.

Si l'on considère l'intégrale

$$w = \int \frac{\Phi(z)}{\Psi(z)} dz,$$

pour qu'elle reste finie pour $z = \infty$, il faut que le degré de Φ soit de deux unités inférieur à celui de Ψ; $\Phi = 0$ donne les points de croisement libres (c'est-à-dire qui ne coïncident pas avec des points d'infini). Si l'on compte chaque point d'infini aussi souvent que l'indique la multiplicité du facteur correspondant de Ψ, l'ensemble des points de multiplicité est inférieur de deux unités à celui des points de croisement.

La considération des fractions rationnelles et de leurs intégrales permet de déduire de singularités connues des singularités plus élevées.

4. *Réalisation expérimentale des courants considérés.* — Si l'on admet le principe de la superposition des singularités, il est évident que la seule question à se proposer est celle de la réalisation des formes de mouvement et des singularités les plus sim-

ples. On est amené ainsi à considérer les deux types suivants :

$$A \log(z - z_0) \quad \text{et} \quad \frac{A}{(z - z_0)^\nu}.$$

Au premier, et pour ne pas avoir à considérer $z = \infty$, on substitue

$$A \log \frac{z - z_0}{z - z_1},$$

qu'on divise d'ailleurs en deux parties, en posant $A = a + ib$.

1° $a \log \frac{z - z_0}{z - z_1}$. En z_0 on a une source de rendement $2a\pi$, en z_1 une autre de rendement $-2a\pi$. On n'a qu'à mettre en z_0 et en z_1 les deux pôles d'une batterie galvanique d'une force choisie convenablement pour réaliser un tel mouvement.

2° $ib \log \frac{z - z_0}{z - z_1}$. La chose est plus difficile à réaliser. On peut supposer z_0 relié à z_1 par une courbe qui ne se coupe pas; cette courbe doit être le siège d'une force constante électromotrice. Les points z_0 et z_1 seront alors des points à tourbillon.

Les formes de mouvement correspondant à $\frac{1}{(z - z_0)^\nu}$ pourraient se déduire des précédentes. On s'appuie sur ce que, en faisant coïncider des points d'infini logarithmique pour lesquels la somme des résidus est nulle, on obtient un point d'infini algébrique.

5. *Passage sur la sphère. Courant sur une surface courbe quelconque.* — On peut évidemment, dans tous les développements précédents, substituer au plan une sphère dont le plan serait la projection stéréographique, et alors il est tout à fait inutile de parler de la valeur $z = \infty$.

On peut considérer aussi des mouvements stationnaires sur une surface quelconque. Soit u une fonction de lieu sur cette surface, on trace les courbes $u =$ const., et l'on imagine que le fluide se meut normalement à ces courbes avec une vitesse égale à $\frac{du}{dn}$, en désignant par dn l'élément d'arc de la direction normale sur la surface; u sera encore appelé potentiel de vitesse. A u correspond une autre fonction v; les propriétés de u et v sont réciproques. Dès lors, ayant u et v, on appelle la combinaison $u + iv$

fonction complexe du lieu sur la surface. Quand une surface est appliquée conformément sur une seconde, toute fonction complexe du lieu sur la première surface se transforme en une fonction complexe de même espèce sur la seconde.

6. *Connexion de la théorie précédente avec l'étude des fonctions complexes d'une variable.* — Les différentes fonctions du lieu que l'on étudie sur la sphère sont des fonctions de la variable $x+iy$. Mais cela tient à un fait plus général : deux fonctions complexes du lieu sur une surface quelconque sont fonctions l'une de l'autre, dans le sens habituel attribué à cette expression dans la théorie des fonctions. Enfin, si, sur deux surfaces, on connaît deux fonctions complexes du lieu et si l'on rapporte les surfaces l'une à l'autre, en sorte que, aux points correspondants, correspondent aussi des mêmes valeurs de la fonction, les deux surfaces se trouvent par là-même rapportées conformément l'une à l'autre.

Il est évident que les théorèmes énoncés sont relatifs à des portions de surfaces; nous verrons plus tard ce qui arrive quand on considère dans leur entier des surfaces fermées.

7. *Encore une fois les courants sur la sphère. Exposé général de la question de Riemann.* — On appelle *courants uniformes* ceux pour lesquels, en chaque point de la sphère, il n'y a qu'un courant. Les courants considérés, pour lesquels n'existe d'autre genre d'infini que ceux qui ont été définis dans le n° 2, sont les courants uniformes les plus généraux qui existent sur la sphère. On peut se proposer de suivre un chemin tout différent de celui qu'on a suivi dans le premier Chapitre : commencer par l'étude des courants et développer ensuite la théorie de certaines fonctions analytiques. M. Klein substitue ainsi à l'emploi du principe de Dirichlet, qui formait la base de toute la théorie de Riemann et que Riemann avait probablement été conduit à employer par des considérations physiques, ces mêmes considérations physiques.

Mais, au lieu de se borner à la sphère, on peut évidemment prendre la question à un point de vue plus élevé et s'occuper des surfaces fermées. Sur ces surfaces nous aurons des courants uniformes, des fonctions complexes du lieu dont la comparaison nous fournira maints théorèmes d'Analyse.

Deuxième Partie.

Exposition de la théorie de Riemann.

8. *Classification des surfaces fermées d'après le nombre p.* — Un des caractères principaux pour une surface est le nombre que Riemann a désigné par la lettre p et qui indique combien on peut faire dans la surface de sections linéaires fermées, chacune d'elles formant une courbe sans point double, sans que la surface se sépare en plusieurs morceaux. Pour la sphère, $p = 0$.

Pour que deux surfaces puissent être rapportées univoquement l'une à l'autre, il suffit que les deux surfaces aient le même p.

Comme type de surface du genre p on peut prendre une sphère avec p anses. Relativement à chacune des anses, on peut considérer deux sections linéaires que, par analogie avec le cas du tore, on appelle *courbe méridienne* A_i et *courbe parallèle* B_i. Dès lors on peut supposer la surface normale de genre p coupée par $2p$ courbes, p méridiens et p parallèles, toute autre section allant d'un point du bord à un autre point quelconque du bord, la décomposant alors en plusieurs morceaux, deux au moins.

9. *Détermination première des courants stationnaires sur une surface donnée.* — En ne considérant que des infinis tels qu'il a déjà été dit (n° 2), et en exigeant que la somme de tous les résidus logarithmiques soit nulle, on a sur la surface que l'on considère des fonctions complexes du lieu, qui deviennent infinies en des points donnés quelconques, et d'ailleurs d'une façon donnée quelconque. Partout ailleurs la fonction est continue.

On peut concevoir sur la surface des courbes fermées qui ne décomposent pas la surface et d'où part dans un sens le fluide pour revenir dans l'autre ; on obtient ainsi des courants qui, en général, ne possèdent pas de discontinuité ; on a par suite ainsi des fonctions partout finies. Toute courbe fermée tracée sur la surface est équivalente à une combinaison de courbes A_i et de courbes B_i. Il en résulte que la fonction la plus générale que l'on puisse construire, et qui soit partout finie, est celle dont la partie réelle pos-

sède, relativement aux $2p$ sections normales, des modules de périodicité donnés quelconques.

10. *Courant stationnaire le plus général. Démonstration de l'impossibilité de courants d'autre espèce.* — La fonction de lieu la plus générale est ainsi définie : en des positions données quelconques, la fonction devient infinie (avec les conditions données relativement aux infinis); de plus, sa partie réelle possède aux $2p$ sections normales des modules de périodicité quelconques donnés. C'est là la fonction la plus générale qui, sur notre surface, réponde à un courant uniforme. Cela résulte de ce qu'il n'y a pas de fonction qui ne devienne nulle part infinie et pour laquelle les modules de périodicité de la partie réelle soient tous nuls.

11. *Exemples de courants. Courants sur le tore et le double tore.* — En général, le nombre des points de croisement est $\mu + 2p - 2$, en désignant par μ le nombre des infinis logarithmiques.

12. *Sur la formation de la fonction complexe de lieu la plus générale au moyen de fonctions simples.* — Considérons d'abord les fonctions partout finies. On peut toujours de bien des manières trouver $2p$ potentiels linéairement indépendants,

$$u_1, u_2, \ldots, u_{2p},$$

tels que tout autre potentiel partout fini peut être formé linéairement avec ceux-là,

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_{2p} u_{2p} + A.$$

Des u_i on peut déduire les v_i en prenant, par exemple, sur la surface un système de coordonnées x, y tel que u et v soient reliés par les équations

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

et cela en sorte que l'on obtient enfin $2p$ potentiels linéairement indépendants :

$$u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_p, v_p.$$

En posant $u_\chi + i v_\chi = w_\chi$, on obtient p fonctions partout finies

et linéairement indépendantes

$$w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_p.$$

Une fonction quelconque partout finie peut être dès lors constituée au moyen des fonctions w sous la forme

$$w = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \ldots + c_p w_p + C.$$

Si maintenant nous avons une fonction ayant des infinis, elle pourra être mise sous la forme

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_\mu + c_1 w_1 + c_2 w_2 + \ldots + c_p w_p + C,$$

F_1 étant une fonction qui est infinie *comme* la fonction proposée au point ξ, et qui a de plus, en un point pris quelconque y, un point logarithmique dont le résidu est égal et de signe contraire au résidu de la fonction donnée correspondant au point ξ y relatif.

13. *Plurivoquie de nos fonctions. Considération particulière des fonctions univoques.* — En général, deux chemins différents (c'est-à-dire non équivalents) conduisent à deux valeurs différentes de la fonction, quand on part d'une même valeur. Cette différence est composée de modules de périodicité correspondant aux points logarithmiques et des modules A_i et B_i.

On aura des fonctions univoques lorsque l'on astreindra tous les points d'infini à être algébriques et tous les A_i et B_i à être nuls. Supposons que tous les infinis algébriques soient simples et désignons par m leur nombre; en représentant par Z_i une fonction devenant simplement infinie au point d'indice i, on aura, pour la forme générale des fonctions ayant les m infinis donnés,

$$a_1 Z_1 + a_2 Z_2 + \ldots + a_m Z_m + c_1 w_1 + \ldots + c_p w_p + C.$$

Si on assujettit les A et les B à être nuls, on trouve qu'il ne peut y avoir de fonctions univoques du lieu que si $Z = p + 1$, et alors ces fonctions contiennent $m - p + 1$ constantes linéairement indépendantes. L'ensemble de ces fonctions existant sur la surface considérée forme donc un *continuum* à $2m - p + 1$ dimensions et la fonction $u + iv$ peut prendre une valeur donnée quelconque $u_0 + iv_0$ précisément en m positions.

14. *Surfaces ordinaires de Riemann sur le plan $x + iy$.* — On

peut figurer sur un plan la distribution des valeurs de la fonction que nous appelons alors $x + iy$ au lieu de $u + iv$. On obtient ainsi à la fois une application conforme de notre surface sur le plan, et aussi les surfaces à plusieurs feuilles et à points de ramification que l'on appelle *surfaces de Riemann*. Dans les conditions indiquées précédemment, la surface a m feuilles; à un point de croisement d'ordre ν, $\nu + 1$ feuilles se trouvent reliées en sorte que, si l'on tourne autour de ce point, on passe de la première feuille dans la deuxième, de la deuxième dans la troisième, ..., de la $(\nu + 1)^{\text{ième}}$ dans la première. En ces points la conformité ne subsiste plus. On voit dès lors le passage immédiat aux surfaces recouvertes de plusieurs feuilles.

On reconnaît aussi que le nombre p, ainsi que les modules de périodicité, sont des choses essentielles, tandis que la position et le mode d'existence des points de ramification ne sont que des faits secondaires.

15. *L'anneau, $p = 1$, et la surface à deux feuilles et quatre points de ramification sur le plan.* — Dans le cas du tore, M. Klein effectue réellement l'application sur le plan.

16. *Fonctions de $x + iy$ qui répondent aux courants étudiés.* — Soit w une fonction complexe de lieu qui sur notre surface est aussi bien que $x + iy$ univoque; w est une fonction algébrique de z. L'équation irréductible $f(w, z) = 0$ entre w et z est en w du m^{ieme} ordre et en z du n^{ieme}.

De plus, w_1 donne une nouvelle fonction univoque sur notre surface, w_1 est une fonction rationnelle de w et z, et réciproquement toute fonction rationnelle de w et z est une fonction de même caractère que w_1.

Si l'on considère les fonctions plurivoques sur la surface, on trouve qu'une telle fonction W est de la forme

$$W = \int R(w_1, z)\,dz,$$

et la réciproque est vraie : toute intégrale de cette espèce représente sur la surface une fonction du lieu.

17. *Portée et signification de nos considérations.* — Il résulte

des développements précédents que, en fait, c'est l'ensemble des fonctions algébriques et de leurs intégrales qui s'est présenté dans les recherches de M. Klein. On a vu combien des considérations physiques simples se prêtaient facilement à l'étude des caractères fondamentaux des fonctions. On reconnaît aussi, inversement, dans la théorie de Riemann, un moyen de simplifier l'étude analytique de l'application conforme des surfaces fermées l'une sur l'autre.

18. *Extension de la théorie.* — Au lieu de considérer seulement des surfaces applicables l'une sur l'autre conformément, on peut prendre également toute surface qui, par une déformation continue, peut se transformer en la surface donnée, et plus généralement tout composé géométrique dont les éléments correspondent univoquement et d'une façon continue à ceux de la surface primitive. Les surfaces normales considérées (n° 8) constituent un exemple de la première correspondance; les réseaux polygonaux, bien des fois employés par M. Klein (*Math. Annalen*, XIV), par M. Dyck (*Math. Annalen*, XVII), fournissent des exemples du second mode de représentation.

Troisième Partie.

Conséquences.

19. *Sur les modules des équations algébriques.* — M. Klein s'occupe maintenant de la détermination des modules des fonctions algébriques, c'est-à-dire de la détermination des constantes qui jouent dans les transformations univoques relatives à $f(w, z) = 0$ le rôle d'invariants. Il démontre que le nombre des modules est égal à 0 pour $p = 0$, égal à 1 pour $p = 1$, et à $3p - 3$ pour $p > 1$.

20. *Application conforme des surfaces fermées sur elles-mêmes.* — Il y a à distinguer deux sortes d'applications : l'une dans laquelle le sens des angles est conservé, l'autre où il y a pour ainsi dire réflexion des angles : applications de première et de seconde espèce. Les surfaces pour lesquelles $p = 0$ ou $p = 1$ peuvent d'une infinité de manières être représentées conformément sur elles-mêmes par des applications de première espèce ; pour

des surfaces à $p > 1$, cela est impossible. Si $p = 0$, l'application de première espèce se trouve définie quand on détermine les trois points correspondants à trois points donnés. Si $p = 1$, on peut faire correspondre à un point quelconque de la surface un second point à volonté, et, en général, il y a encore deux modes d'application; dans un cas particulier, il peut y en avoir quatre ou six.

Pour les surfaces de $p = 0$, il y a une infinité de transformations de seconde espèce qui peuvent les appliquer conformément l'une sur l'autre; si $p = 1$, il n'y a plus en général de telle transformation; de même pour $p > 1$. Il n'y a exception que si l'on a des surfaces symétriques.

21. *Examen particulier des surfaces symétriques.* — On dit que l'on a affaire à des surfaces symétriques quand il y a des transformations qui font correspondre par couples les points de la surface. Certains points dans ces transformations restent fixes et constituent les courbes de passage (*Uebergangscurven*). Le nombre de ces courbes ne peut jamais être plus grand que $p + 1$. A ce genre de recherches se rattachent les travaux de M. Dyck (*Math. Annalen*, XVII), de M. Cayley (*ibid.*, XV), etc.

22. *Application conforme de différentes surfaces l'une sur l'autre.* — Les surfaces $p = 0$ peuvent toujours être appliquées conformément l'une sur l'autre. Si $p > 0$, pour qu'il puisse y avoir application conforme des deux surfaces, il y a pour $p = 1$ deux équations de condition entre les constantes réelles des surfaces; pour $p > 1$, il y en a $6p - 6$. Si l'on a affaire à des surfaces symétriques, le nombre des conditions diminue; si $p = 1$, il suffit que les deux surfaces aient le même invariant; si $p > 1$, il n'y a plus à écrire que $3p - 3$ équations entre les constantes réelles des surfaces.

23. *Surfaces limitées et surfaces doubles.* — M. Klein, dans ce paragraphe, montre comment les considérations précédentes peuvent être étendues à des surfaces limitées par des bords (*Randcurven*) et aux surfaces doubles ou à un seul côté. Il montre alors les liens qui rattachent sa théorie à la méthode de Schottky (*Borchardt's Journal*, Bd. 83) et à celle de Schwarz [*Ueber die Abbildung geschlossener Polyederflächen auf die Kugel* (*Ber-*

liner Monatsberichte, 1865, p. 150 et suiv., et *Borchardt's Journal*, Bd. 70; p. 121-136; Bd. 75, p. 330].

24. *Remarque finale*. — M. Klein ne s'est occupé dans le Chapitre précédent que de la correspondance univoque établie entre deux surfaces au moyen de l'application conforme. Riemann avait aussi pensé aux correspondances plurivoques. On devrait imaginer les deux surfaces à examiner ayant plusieurs feuilles et appliquer conformément l'une sur l'autre ces deux surfaces à feuillets. Les points de ramification que peuvent posséder ces surfaces fourniraient de nouvelles constantes complexes dont la considération serait nécessaire. Un cas particulier a d'ailleurs été effectivement traité dans le n° 15 de ce Mémoire.

On voit dès lors, sans avoir traité à fond cette question, comment elle se rattache aux autres spéculations de Riemann ayant rapport à la théorie des fonctions et dont il a été question dans le Mémoire de M. Klein. G. B.

MÉLANGES.

NOTE SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS DE JACOBI A PLUSIEURS VARIABLES;

Par M. C. WEIERSTRASS.

(Séance du 4 mai 1882 de l'Académie de Berlin.)

Traduction publiée avec l'autorisation de l'auteur,

Par M. J. MOLK.

La fonction $\sigma(u \mid \omega\omega')$, que nous désignerons simplement par $\sigma(u)$, satisfait à l'équation

$$(1)\quad \begin{cases} \sigma(u+u_1)\,\sigma(u-u_1)\,\sigma(u_2+u_3)\,\sigma(u_2-u_3) \\ \quad +\,\sigma(u+u_2)\,\sigma(u-u_2)\,\sigma(u_3+u_1)\,\sigma(u_3-u_1) \\ \quad +\,\sigma(u+u_3)\,\sigma(u-u_3)\,\sigma(u_1+u_2)\,\sigma(u_1-u_2) = 0 \end{cases} \text{ [1]},$$

u, u_1, u_2, u_3 désignant quatre quantités quelconques.

---

[1] M. Weierstrass désigne par $\sigma(u)$ une fonction analytique univoque, ayant.

J'ai démontré ce théorème, pour la première fois, en 1862, dans mon cours à l'Université de Berlin.

La nature de cette équation est bien différente de celle des relations découvertes par Jacobi, entre les produits de fonctions $\mathfrak{I}$ prises quatre à quatre (page 507 du tome I de ses *Œuvres complètes*). Elle ne contient qu'*une seule* fonction, tandis que chacune des équations de Jacobi, que l'on peut d'ailleurs en déduire, contient deux ou plusieurs fonctions $\mathfrak{I}$.

On sait que des relations, analogues à celles que Jacobi a trouvées entre les fonctions $\mathfrak{I}$ à *un* argument existent aussi entre les fonctions $\mathfrak{I}$ à plusieurs arguments. Par contre, je ne crois pas que la généralisation suivante de l'équation (1) ait été jamais exposée.

La fonction $\sigma(u)$ peut être exprimée à l'aide de la fonction $\mathfrak{I}_1(x)$ de Jacobi, par la relation

$$\sigma(u) = C e^{auu} \mathfrak{I}_1(cu) \tag{2}$$

C, a, c désignant, ainsi que q qui paraît dans $\mathfrak{I}_1(x)$, des fonctions déterminées de ω, ω', indépendantes de u. Il est d'ailleurs facile de vérifier que l'équation (1) a encore lieu lorsque l'on y remplace $\sigma(u)$ par l'expression (2), en laissant les constantes q, a, c, C complètement arbitraires.

Je définis de même une fonction $\sigma(u, u', \ldots, u^{(\rho-1)})$ de ρ variables, en considérant une fonction impaire quelconque $\mathfrak{I}$ de ρ arguments,

$$\mathfrak{I}_1(v, v', \ldots, v^{(\rho-1)}),$$

---

pour toute valeur finie de son argument, le caractère d'une fonction rationnelle, et s'annulant une fois, aux points

$$w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega', \quad (\mu, \mu' = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots, \pm \infty).$$

On suppose que la partie réelle de $\frac{\omega'}{\omega i}$ est positive.

Cette fonction est impaire. Elle peut être représentée par une série entière, convergente pour toute valeur finie de u, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles entières de g_2 et g_3, les *invariants* de la fonction σ,

$$\frac{1}{60} g_2 = \sum_w{}' \frac{1}{w^4}, \quad \frac{1}{140} g_3 = \sum_w{}' \frac{1}{w^6}.$$

Comparez *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen,* formules rassemblées et publiées par M. Schwarz, d'après le cours de M. Weierstrass.

en y substituant à $v, v', \ldots, v^{(\rho-1)}$ des fonctions linéaires et homogènes de $u, u', \ldots, u^{(\rho-1)}$, dont le déterminant est différent de zéro, et en posant ensuite

$$\sigma(u, u', \ldots, u^{(\rho-1)}) = \mathrm{C}.e^{\left(\psi u, u', \ldots, u^{(\rho-1)}\right)}.\vartheta_1(v, v', \ldots, v^{(\rho-1)}),$$

où ψ désigne une fonction entière et homogène du second degré de $u, u', \ldots u^{(\rho-1)}$, et C une constante arbitraire.

Ceci posé, si $r = 2\rho$, choisissons arbitrairement $r+2$ systèmes d'arguments :

$$\begin{array}{llll} u, & u', & \ldots, & u^{(\rho-1)}, \\ u_1, & u'_1, & \ldots, & u_1^{(\rho-1)}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{r+1}, & u'_{r+1}, & \ldots, & u_{r+1}^{(\rho-1)}, \end{array}$$

et formons le produit

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma(u+u_1, \ldots)\,\sigma(u_2+u_3, \ldots)\ldots\sigma(u_r+u_{r+1}, \ldots) \\ .\sigma(u-u_1, \ldots)\,\sigma(u_2-u_3, \ldots)\ldots\sigma(u_r-u_{r+1}, \ldots) \end{array} \right\}$$

où, pour abréger, nous n'avons écrit que le premier argument de chaque fonction σ. Permutons ensuite les indices $1, 2, \ldots, r+1$, de la manière suivante : Faisons d'abord parcourir à ces $r+1$ indices un cycle complet; dans chacune des permutations ainsi obtenues, répétons la même opération avec les $r-1$ derniers indices; dans chacune de ces permutations, avec les $r-3$ derniers indices, et ainsi de suite [1]

A chaque permutation correspond un produit (3) de fonctions σ; *la somme de ces produits est identiquement nulle.*

La démonstration de ce théorème est facile. Il suffit de remplacer dans le produit (3) chaque facteur par la série qui le représente; on peut alors transformer cette expression en une suite de produits dans lesquels chaque facteur ne dépend que de l'un des systèmes d'arguments considérés. Permutant alors les indices $1, 2, \ldots, r+1$ de la manière indiquée, on voit que la somme des termes obtenus est identiquement nulle.

---

[1] Pour $\rho = 2$, par exemple, $r = 4$ et les permutations, obtenues par le procédé indiqué, sont

1 2 3 4 5,	2 3 4 5 1,	3 4 5 1 2,	4 5 1 2 3,	5 1 2 3 4,
1 2 4 5 3,	2 3 5 1 4,	3 4 1 2 5,	4 5 2 3 1,	5 1 3 4 2,
1 2 5 3 4,	2 3 1 4 5,	3 4 2 5 1,	4 5 3 1 2,	5 1 4 2 3.

Le nombre des termes de l'équation augmente très rapidement avec ρ; il est égal à 1, 3, 5, ..., $(r+1)$.

Si l'on remplace $u, u', \ldots$ par $u_0, u'_0, \ldots$, et si l'on pose

$$\sigma(u_\alpha + u_\beta,\ u'_\alpha + u'_\beta,\ \ldots)\ \sigma(u_\alpha - u_\beta,\ u'_\alpha - u'_\beta,\ \ldots) = S_{\alpha,\beta}$$

et

$$S = \sum \left\{ \begin{array}{l} \sigma(u_0 + u_1, \ldots)\ \sigma(u_2 + u_3, \ldots)\ \ldots\ \sigma(u_r + u_{r+1}, \ldots) \\ .\sigma(u_0 - u_1, \ldots)\ \sigma(u_2 - u_2, \ldots)\ \ldots\ \sigma(u_r - u_{r+1}, \ldots) \end{array} \right\},$$

on voit que $S_{\alpha,\alpha} = 0$ et $S_{\alpha,\beta} = - S_{\beta,\alpha}$, et l'on a identiquement

$$S^2 = |\ S_{i,k}\ | \quad (i,\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ r+1).$$

On peut donc aussi démontrer le théorème énoncé, en prouvant que le déterminant

$$|\ S_{i,k}\ | \quad (i,\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ r-1)$$

est nul pour des valeurs quelconques de $u_0, u'_0, \ldots;\ u_1, u'_1, \ldots;\ u_{r+1}, u'_{r+1}, \ldots$. Des théorèmes connus conduisent à ce résultat [1].

Remplaçons dans l'équation $S = 0$

$$\begin{array}{llll} u, & u', & \ldots \text{ par } u + \dfrac{w}{2}, & u' - \dfrac{w'}{2}, \quad \ldots; \\ u, & u'_1, & \ldots \text{ par } u_1 - \dfrac{w}{2}, & u'_1 - \dfrac{w'}{2}, \quad \ldots; \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{r+1}, & u'_{r+1}, & \ldots \text{ par } u_{r+1} + \dfrac{w}{2}, & u'_{r+1} + \dfrac{w'}{2}, \quad \ldots; \end{array}$$

nous obtiendrons

$$(4)\quad 0 = \sum \left\{ \begin{array}{l} .\sigma(u - u_1 - w, \ldots)\,\sigma(u_2 - u_3 + w, \ldots) \ldots \sigma(u_r + u_{r+1} + w, \ldots) \\ .\sigma(u - u_1, \ldots) \ldots\ \sigma(u_2 - u_3, \ldots) \ldots\ldots \sigma(u_r - u_{r+1}, \ldots) \end{array} \right\},$$

la somme étant étendue à toutes les permutations indiquées.

Dans la théorie des fonctions elliptiques on déduit des conséquences nombreuses de la formule (1). Je laisse ici de côté les conséquences non moins nombreuses que l'on peut déduire de la for-

---

(1) C'est Jacobi qui a, le premier, donné une méthode pour former l'expression dont le carré est un déterminant de Pfaff, et que M. Cayley nomme, pour cette raison, *Pfaffian*. (*Zur Pfaff'schen Integrationsmethode*, t. 2 du *Journal de Crelle*.)

mule (4) par des méthodes analogues. Par contre, je désire appeler l'attention sur une question à laquelle donne naissance l'équation $S = 0$, et qui se rapporte à la théorie des fonctions.

On peut démontrer directement, sans rien savoir de la fonction $\sigma(u)$, qu'il existe une fonction transcendante entière de la variable u, contenant *quatre* constantes arbitraires, telle que l'équation (1) soit vérifiée lorsqu'on y remplace $\sigma(u)$ par cette fonction.

A cet effet, on cherche d'abord s'il est possible de satisfaire identiquement à l'équation (1), en y remplaçant $\sigma(u)$ par une série entière; on voit alors que cette série ne saurait contenir que des puissances impaires de u, et que ses coefficients peuvent être exprimés en fonctions rationnelles et entières des quatre premiers d'entre eux, qui restent arbitraires. A l'aide de l'équation (1) elle-même, on démontre ensuite que cette série entière est convergente, quelles que soient les valeurs que l'on donne à la variable u et aux quatre constantes arbitraires; elle représente, par suite, une fonction jouissant des propriétés énoncées.

Si maintenant nous posons $\varphi(u) = \frac{d^2 \log \sigma(u)}{du^2}$, nous tirons de l'équation (1) la relation

$$\left[\frac{d\varphi(u)}{du}\right]^2 = A\varphi^3(u) + B\varphi^2(u) + C\varphi(u) + D,$$

où A, B, C, D sont des constantes. Cette relation nous montre la connexité des fonctions σ définies par l'équation (1) avec la théorie des fonctions elliptiques.

Mais alors on est amené à se demander s'il ne serait pas possible de démontrer directement, d'une manière analogue, l'existence d'une fonction transcendante entière de ρ variables $u, u', \ldots, u^{(\rho-1)}$, telle que l'équation (4) soit vérifiée lorsqu'on y remplace $\sigma(u, u', \ldots, u^{(\rho-1)})$ par cette fonction.

Il suffirait également de montrer d'abord qu'il est possible de satisfaire identiquement à l'équation (4) en y remplaçant $\sigma(u, u', \ldots, u^{(\rho-1)})$ par une série entière de $u, u', \ldots, u^{(\rho-1)}$. Sans doute l'expression des coefficients de cette série, en fonction d'un certain nombre de constantes arbitraires, se présentera sous une forme bien plus compliquée que dans le cas d'une variable u. Ces coefficients sont, en effet, nécessairement des fonctions algé-

briques des constantes arbitraires ; cela résulte déjà de l'existence, pour $\rho > 1$, de plusieurs fonctions impaires $\sigma(u, u', \ldots, u^{\rho-1})$, contenant les mêmes constantes arbitraires et satisfaisant à l'équation (4); de 6 par exemple pour $\rho = 2$. Cependant le grand développement auquel est parvenu le mécanisme de l'Algèbre me permet de croire que le problème posé ne saurait être considéré aujourd'hui comme impossible à résoudre.

QUELQUES ERREURS RÉCEMMENT DÉCOUVERTES DANS LES TABLES NUMÉRIQUES.

Monsieur et cher collègue,

Un calculateur belge, M. V. Fauvel, de Trazegnies, me transmet la liste d'erreurs suivante dans divers recueils de tables :

1. Lebesgue. *Tables pour la décomposition des nombres en leurs facteurs premiers*, p. 14 :

$P_5 = 350{,}369{,}909$ au lieu de $349{,}662\ldots$

2. Thoman. *Tables de logarithmes à 27 décimales pour les calculs de précision :*

Log 45, 5e tranche, lire 63169, p. 51, au lieu de 61369.

3. Namur. *Tables de logarithmes à 12 décimales*, etc. :

Page 8, log 637983 répond à 434932 16059 et non à 434932 16509.

Page 9, log 638187 répond à 4346973 57352 et non à 4346973 57452; log 638188 répond à 4346985 58281 et non à 4346985 58381.

Page 10, log 638332 répond à 4348325 16093 et non à 4348325 16393.

4. Callet. *Tables portatives de logarithmes*, etc., p. 211.

Le 29e et le 30e chiffre décimal du logarithme népérien de 1087 sont 45 et non 54.

5. HOPPE. *Tafeln zur dreissigstelligen logarithmischen Rechnung*, p. 13, T. III.

La 31[e] figure du logarithme népérien de un centième est 7 et non 9.

Veuillez agréer, Monsieur et cher collègue, mes salutations distinguées.
P. MANSION.

P. S. M. Fauvel m'a envoyé tous les calculs à l'appui.

SUR L'INVENTION DE LA PREUVE PAR NEUF;

PAR M. PAUL TANNERY.

Il est suffisamment établi que la *preuve par neuf* nous vient des Arabes, et au moins très probable qu'elle a été empruntée par ceux-ci aux Hindous, comme le témoignent Avicenne et Maxime Planude. Supposer qu'elle fût connue des anciens Grecs semble d'ailleurs, à première vue, une hypothèse difficile à soutenir; comme ils employaient en effet des caractères spéciaux pour représenter les dizaines et les centaines, il leur eût fallu, pour pratiquer la preuve en question, substituer mentalement à ces caractères leurs correspondants dans la série des unités, leurs *pythmènes* (bases) suivant l'expression d'Apollonius (¹).

Les opérations sembleraient donc atteindre un degré de complication assez grand pour n'avoir jamais été usitées, quand même les Grecs auraient connu les principes de la preuve par 9.

Mais, si l'on peut établir au contraire que le calcul par sommation du résidu d'un nombre par rapport à 9 était un exercice courant dans les écoles grecques, sans que l'on sache cependant dans quel but on l'y pratiquait, ne pourrait-on pas conclure sans trop de hardiesse que ce but inconnu était précisément la preuve

(¹) *Pappi Alexandrini collectionis quæ supersunt*, ed. Hultsch. Berlin, 1876, liv. II. — Voir mon essai l'*Arithmétique des Grecs dans Pappus* dans les *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 2[e] série, t. III, p. 354.

par 9? Or ce que je viens d'avancer comme fait me paraît résulter d'un long passage que saint Hippolyte consacre à la réfutation d'une superstition passablement puérile (¹), et notamment d'un endroit (p. 81) où il dit : « Je pense que ces hommes étant de loisir et d'ailleurs exercés au calcul auront voulu profiter de l'art appris par eux dès leur enfance pour s'en glorifier vainement et se déclarer devins. »

Cette superstition consistait à traiter les mots et particulièrement les noms propres comme si les lettres qui les formaient avaient représenté des nombres, à calculer les résidus par rapport à 9, et à en tirer des conséquences. Ainsi le résidu pour Ἕκτωρ est 1, pour Πάτροκλος, 7; donc Hector devait être vaincu par Patrocle. 1 étant plus petit que 7.

Sans m'arrêter à ces futiles rapprochements, dont saint Hippolyte multiplie les exemples, je vais relever les données historiques que nous fournit ce passage.

P. 72, l. 68. Le calcul en question est appelé Pythagorien (Πυθαγορείῳ ψήφῳ).

P. 72, l. 80. Le *pythmène* des milliers, centaines, dizaines, unités est défini comme chez Apollonius.

P. 74, l. 97. Le sens de ce mot est étendu à la somme des pythmènes des lettres formant un nombre. Le pythmène du nombre sera égal au pythmène de cette somme, la sommation étant naturellement répétée jusqu'à ce qu'on tombe sur un résultat égal ou inférieur à 9.

P. 74, l. 14. On peut aussi obtenir le pythmène d'un nombre en cherchant le reste de la division par 9.

P. 76, l. 27. C'est là le pythmène suivant le *canon annéadique* (règle novenaire). Mais on peut aussi considérer le pythmène suivant la règle septenaire, c'est-à-dire le résidu par rapport au module 7.

P. 76, l. 34. Si le reste de la division est nul, on prendra pour pythmène, non pas zéro, comme nous le ferions, mais le module lui-même.

(¹) *S. Hippolyti episcopi et martyris refutationis omnium hæresium librorum decem quæ supersunt*, ed. Duncker, Gœttingue, 1859, liv. IV, p. 72-81. S. Hippolyte vivait vers la fin du IIᵉ siècle après J.-C.

P. 109-112. Des calculs analogues, faits sur des mots grecs, sont donnés comme dérivés de la sagesse égyptienne.

On ne peut, en tout cas, pas méconnaître dans ces données l'extension du concept du *pythmène*, tel qu'il apparaît chez Apollonius, au sens de résidu par rapport à un module quelconque, et cette extension semble impliquer nécessairement la connaissance de cette proposition que, par rapport à un module donné, le résidu du produit est le même que celui du produit des résidus, c'est-à-dire la dernière proposition qui nous manque pour compléter les principes de la preuve par 9.

Je m'abstiendrai des rapprochements faciles à faire entre cette expression de *pythmène* et celle qu'employait Avicenne, et que l'on peut traduire par *noyau* [1]. Mais, restant chez les Grecs, je dois signaler un autre indice de l'habitude du calcul par sommation des *pythmènes* novenaires.

C'est dans les *Théologoumènes de l'Arithmétique*, VI, la proposition que, dans un groupe quelconque de trois nombres consécutifs et se terminant par un multiple de 3, le résidu, par rapport à 9, est 6.

En effet,

$$(3n+1)+(3n+2)+(3n+3)=9n+6.$$

Il n'y a pas d'ailleurs à s'étonner de voir saint Hippolyte faire remonter jusqu'à Pythagore et aux Égyptiens les calculs dont il parle ; s'il n'y a pas d'autre preuve de leur antiquité, elle peut être supposée sans absurdité.

Au reste la tradition est constante, car on ne peut méconnaître, dans les pratiques que raille l'apologiste chrétien, cette « divination numérique » que Pythagore aurait, suivant la légende, enseignée à Abaris [2]. Jamblique le répète en deux endroits dont l'un, au moins, semble avoir pour source primitive le conte d'*Abaris*, composé par Héraclide du Pont, disciple de Platon.

---

(1) Montferrier, *Dictionnaire des Sciences mathématiques*, article *Arithmétique*. Cette traduction d'une partie du traité inédit d'Avicenne était inconnue de M. Cantor dans les *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, p. 699.

(2) *De Vita pythagorica liber*, éd. Kiessling, Leipzig, 1815, p. [illegible] et [illegible].

Les polynômes P sont donnés par les formules

$$P_n = \left[\frac{d^n \left(hz \dfrac{e^{xz} - e^{-xz}}{e^{hz} - e^{-hz}} \right)}{dz^n} \right]_{z=0}.$$

Les polynômes de degré impair admettent les racines $-h$, o, $+h$; les polynômes de degré pair admettent une racine comprise dans chacun des intervalles de cette suite ; il n'y a pas d'autre racine réelle.

D'après cela, une fonction quelconque de x pourra, dans l'intervalle de $-h$ à $+h$, se développer par la série indéfinie

$$y = P_0 (\text{moy.}\, y)^{+h}_{-h} + P_1 \left(\text{moy.}\, \frac{dy}{dx} \right)^{+h}_{-h} + \ldots .$$

Voici les premiers termes du développement

$$\begin{aligned} y = (\text{moy.}\, y)^{+h}_{-h} &+ \frac{3x}{3.1!} \left(\text{moy.}\, \frac{dy}{dx} \right)^{+h}_{-h} \\ &+ \frac{3x^2 - h^2}{3.2!} \left(\text{moy.}\, \frac{d^2y}{dx^2} \right)^{+h}_{-h} \\ &+ \frac{3x^3 - 3h^2x}{3.3!} \left(\text{moy.}\, \frac{d^3y}{dx^3} \right)^{+h}_{-h} \\ &+ \frac{3x^4 - 6h^2 + \frac{7}{5}h^4}{3.4!} \left(\text{moy.}\, \frac{d^4y}{dx^4} \right)^{+h}_{-h} \\ &+ \ldots \end{aligned}$$

Quand l'intervalle considéré diminue indéfiniment, la série précédente devient celle de Maclaurin.

Mathieu (*E.*). — Remarques sur les Mémoires relatifs à la théorie de la lumière renfermés dans les *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* de Cauchy. (201-214).

Brassinne. — Détermination des trois axes d'un corps, sur lesquels les forces centrifuges exercent, pendant la rotation, une action maximum. (215).

Si en un point d'un corps on détermine les trois axes principaux, et si par chacun d'eux on mène un plan qui divise en parties égales l'angle des plans rectangulaires dont il est l'intersection, les trois perpendiculaires menées par le point donné aux plans bissecteurs seront les axes sur lesquels l'action des forces centrifuges est maximum.

Mathieu (*E.*). — De la polarisation elliptique par réflexion sur les corps transparents, pour une incidence voisine de l'angle de polarisation. (219-238).

D'après les théories de Fresnel et de Neumann, il existe un angle d'incidence pour lequel la lumière naturelle est polarisée complètement, angle trouvé auparavant par Brewster au moyen de l'expérience. D'après les recherches de

M. Jamin, il existe cependant très peu de substances diaphanes qui polarisent complètement la lumière dans le plan d'incidence; mais l'intensité du rayon réfléchi peut seulement être très petite. Il en résulte que, dans le voisinage de l'incidence calculée par la loi de Brewster, un rayon de lumière polarisée dans un azimut quelconque donne lieu à un rayon réfléchi polarisé elliptiquement, l'ellipse de vibration étant en général très allongée. Reprenant la théorie de Neumann, M. Mathieu recherche quelle petite perturbation modifie cette théorie : « Cette perturbation », dit-il, « provient d'une très petite perte de force vive qui se fait sur le plan réflecteur, en sorte que les rayons réfléchi et réfracté ne prennent pas toute la lumière qui sort du rayon incident.

« Imaginons un rayon de lumière tombant sur un corps diaphane et polarisé perpendiculairement au plan d'incidence; je démontre qu'à la rencontre du plan réflecteur il se fait en général dans les rayons réfléchi et réfracté un changement de phase par rapport au rayon incident. Quand l'incidence varie depuis zéro jusqu'à l'angle droit, le changement de phase dans le rayon réfléchi varie depuis une fraction très petite de la demi-ondulation jusqu'à la demi-ondulation. Quand le rayon incident est au contraire polarisé dans le plan d'incidence, le changement de phase du rayon réfléchi reste toujours très petit. Si donc l'on suppose que l'on décompose un rayon polarisé dans un azimut quelconque en deux pareils rayons, la polarisation elliptique pour une incidence voisine de l'angle de Brewster dépendra surtout du changement de phase du premier rayon composant. »

Combescure (*É.*). — Sur quelques questions concernant les forces centrales. (239-275).

Dans le deuxième Tome de la première série du *Journal de Mathématiques*, Binet a considéré, au lieu des trois équations ordinaires relatives au mouvement produit par une force centrale, un système de n équations présentant la forme caractéristique des équations mentionnées : M. Combescure reprend et développe cette idée, en introduisant à la place du rayon vecteur la racine carrée d'une forme quadratique générale des coordonnées. Il traite le cas d'un milieu résistant et divers exemples particuliers.

Teixeira (*G.*). — Sur le développement des fonctions implicites en une série. (276-282).

Il s'agit de développer en série ordonnée suivant les puissances de x une fonction u définie par les deux équations

$$u = f(y),$$
$$y = t + x\varphi_1(y) + x^2\varphi_2(y) + \ldots + x^n\varphi_n(y);$$

l'auteur parvient au développement suivant :

$$u = f(t) + xf'(t)\varphi_1(t) + \ldots$$
$$+ \frac{x^n}{1.2\ldots n}\sum \frac{d^b f'(t)[\varphi_1(t)]^\alpha\ldots[\varphi_n(t)]^\lambda}{1.2\ldots\alpha\times 1.2\ldots\beta\times\ldots\times 1.2\ldots\lambda\, dt^b},$$

où l'on doit donner à α, β, γ, ..., λ toutes les valeurs entières et positives qui satisfont à l'équation

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + n\lambda = n$$

et où b est donné par la formule

$$b = 1 + \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda.$$

Ce développement contient naturellement comme cas particulier la formule de Lagrange.

André (*D.*). — Intégration, sous forme finie, d'une quatrième espèce d'équations différentielles linéaires, à coefficients variables. (283-288).

L'auteur a donné, dans un Mémoire inséré dans le *Journal de Mathématiques* (3ᵉ série, t. VI, 1880, p. 27-48), un procédé pour intégrer trois espèces d'équations différentielles linéaires. Ce Mémoire a été analysé dans le *Bulletin* (2ᵉ série, t. IV, 2ᵉ Partie, p. 269). Nous renvoyons à cette analyse pour les définitions et les notations; la quatrième espèce, dans le genre des équations à dérivée régulière, que l'auteur, dans cette addition à son Mémoire, apprend à intégrer est caractérisée par la fonction $F(n)$, que définit l'égalité

$$F(n) = \frac{1}{p(p+1)\ldots(p+n-1)f(n)},$$

dans laquelle p est un nombre quelconque non entier, et où $f(n)$ représente un polynôme quelconque entier par rapport à n et à des exponentielles de la forme a^n. L'intégration, sous forme finie, s'obtient à l'aide de fonctions algébriques rationnelles et d'expressions irrationnelles de la forme $(1-ax)^p$: elle dépend de la sommation de la série dont le terme général U_n est donné par l'égalité

$$U_n = \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{1.2\ldots n} u_n x^n,$$

où $u_n = f(n) v_n$ est le terme général d'une série récurrente proprement dite. M. André effectue cette sommation et parvient ainsi, par la voie décrite dans son premier Mémoire, à l'intégrale cherchée. Comme application il considère l'équation

$$(2x^2 - 3x + 1)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{16}{3}x - 4\right)\frac{dy}{dx} + \frac{8}{9}y = 0,$$

dont l'intégrale est

$$y = \frac{C_1}{\sqrt[3]{1-x}} + \frac{C_2}{\sqrt[3]{1-2x}}.$$

Cornaglia. — De la propagation verticale des ondes dans les liquides. (289-340).

Resal. — Recherches sur la théorie mathématique de la capillarité. (341-374).

I. *Formules fondamentales.* — 2. Forme de la surface capillaire. — 3. Influence d'une paroi sur la surface de contact. — 4. Rappel des résultats de l'expérience.

II. *Phénomènes capillaires relatifs aux liquides pesants.* — 5. Forme que prend la surface d'un liquide au contact d'une lame verticale. — 6. Forme de

la surface d'un liquide entre deux lames verticales parallèles dont l'une est mouillée et l'autre non mouillée par le liquide. — 7. Forme d'un liquide entre deux lames parallèles de même nature. — 8. Deux lames parallèles et verticales sont très rapprochées l'une de l'autre. — 9. De la surface capillaire dans un tube circulaire d'un faible diamètre. — 10. Expression du volume d'un liquide compris entre sa surface libre et un plan horizontal déterminé, quelle que soit la forme de la section du tube. — 11. Liquides superposés dans un tube circulaire capillaire. — 12. Forme d'une très petite goutte d'un liquide reposant sur un plan horizontal qu'elle ne mouille pas. — 13. Goutte très large. — 14. Liquides soustraits à l'action de la pesanteur. — 15. La surface diffère peu d'une sphère. — 16. La surface diffère peu d'un tore.

III. *Des liquides uniquement soumis à leurs actions mutuelles.* — 17. Équation générale des surfaces de révolution dont la moyenne courbure est constante.

Poincaré (*H.*). — Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. (375-424).

L'auteur se propose d'étudier les courbes définies par une équation différentielle du premier ordre

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y},$$

où X et Y sont des polynômes entiers en x, y.

Pour éviter les difficultés que pourrait présenter l'étude des branches infinies, il suppose la courbe projetée sur une sphère, l'œil étant au centre. Le plan de l'équateur (parallèle au plan de la courbe) partage la sphère en deux hémisphères; à chaque point (x, y) de la courbe correspondent deux points $(x, y, 1)$, $(x, y, 2)$ situés chacun dans un hémisphère. Une telle courbe est dite *caractéristique.*

En général, par un point de la sphère passe une caractéristique et une seule.

I. *Définitions et généralités.* — Un *cycle sphérique* est une courbe telle qu'après avoir décrit un arc fini, on revienne au point de départ : tel est, par exemple, un cercle de la sphère; toute courbe algébrique se compose de un ou plusieurs cycles.

Une *spirale sphérique* est une courbe qui coupe un cycle sphérique en un seul point; exemple : la loxodromie.

Les deux portions d'une même caractéristique qui se trouvent de part et d'autre d'un de ses points forment deux *demi-caractéristiques* distinctes, à moins que la courbe considérée ne soit fermée.

Si l'on divise une caractéristique qui n'offre ni point double, ni point d'arrêt en deux demi-caractéristiques, si l'une de ces demi-caractéristiques ne coupe aucun des cycles algébriques qu'en un nombre fini de points, la caractéristique donnée est un cycle.

Un *polycycle* est une courbe fermée qui présente des points doubles.

Un *système topographique* est un système de cycles et de polycycles tracés sur la sphère tels que par chaque point passe un cycle ou un polycycle et un seul, excepté en quelques points singuliers par lesquels ne passe aucun cycle.

Les points doubles des polycycles sont des *cols,* les points singuliers par lesquels ne passe aucun cycle sont des *fonds*, ou des *sommets*.

Le lieu des points où chacun des cycles d'un système topographique est tangent à une caractéristique est la courbe des contacts.

II. *Étude des caractéristiques dans le voisinage d'un point de la sphère.* — Soient α, β les coordonnées de ce point et

$$X = a_0 + a_1(x-\alpha) + a_2(y-\beta) + \ldots,$$
$$Y = b_0 + b_1(x-\alpha) + b_2(y-\beta) + \ldots.$$

Si a_0 et b_0 ne sont pas nuls à la fois, par le point (α, β) passera une caractéristique et une seule.

Soient $a_0 = b_0 = 0$. Si l'équation

$$(a_1-\lambda)(b_2-\lambda) - b_1 a_2 = 0$$

a deux racines différentes λ_1 et λ_2 et si le rapport de ces racines est positif ou imaginaire, l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$$

est de la forme

$$Z_1^{\lambda_1} Z_2^{-\lambda_2} = \text{const.},$$

où Z_1 et Z_2 sont des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $x-\alpha$, $y-\beta$ et s'annulant pour $x=\alpha$, $y=\beta$.

Si le point (x, y) se rapproche indéfiniment du point (α, β) suivant une certaine courbe, la tangente à cette courbe en α, β et la limite de la tangente à la caractéristique en x, y forment un faisceau homographique. Il y a maintenant lieu de distinguer divers cas selon la nature de cette homographie.

Si les droites doubles du faisceau homographique sont réelles et si deux droites conjuguées quelconques ne sont pas l'une dans l'angle aigu, l'autre dans l'angle obtus formé par ces deux droites doubles, l'intégrale générale est de la forme

$$Z_1^{\lambda_1} Z_2^{-\lambda_2} = \text{const.},$$

où Z_1 et Z_2 sont des fonctions réelles de x et de y; λ_1, λ_2 des nombres réels positifs, toutes les caractéristiques qui pénètrent dans une région de la sphère assez voisine du point (α, β) pour que les séries Z_1, Z_2 soient convergentes vont passer par le point singulier (α, β); le point est un *nœud*.

Si deux droites conjuguées quelconques des faisceaux sont situées de part et d'autre des droites doubles (réelles), deux caractéristiques seulement passeront par le point; la démonstration de ce fait a été donnée par MM. Briot et Bouquet (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXVIe cahier). Le point singulier est un *col*.

Si les droites doubles sont imaginaires, sans que le faisceau soit en involution, les caractéristiques sont des spirales qui s'approchent indéfiniment du point singulier (α, β) : ce point est alors un *foyer*.

Enfin, si le faisceau est en involution avec des droites doubles imaginaires; ou bien les caractéristiques sont des spirales et le point (α, β) est un foyer, ou elles forment un système topographique dont le point (α, β) est un sommet; ce point est alors un *centre*.

M. Poincaré étudie en outre quelques cas plus particuliers et montre comment

l'étude des points situés sur l'équateur peut être ramenée à l'étude des cas précédents.

III. *Distribution des points singuliers.*— Après avoir prouvé que tout système de caractéristiques admet des points doubles, l'auteur établit que, sans nuire à la généralité, on peut supposer :

1° Que les polynômes X, Y sont de même degré;

2° Que si X_2 et Y_2 sont les termes de degré le plus élevé de X et de Y, on n'a pas identiquement

$$xY_2 - yX_2 = 0;$$

3° Que les courbes $X = Y = 0$ ne se coupent nulle part en plusieurs points confondus et ne se coupent pas sur l'équateur;

4° Que l'équation homogène

$$xY_2 - yX_2 = 0$$

n'a pas de racines multiples.

L'équateur est alors une caractéristique; de plus on peut supposer que tous les points singuliers sont des *nœuds,* des *cols* ou des *foyers.*

Le nombre des points singuliers étant toujours pair est au moins égal à 2.

Tout point singulier situé sur l'équateur est un nœud ou un col.

M. Poincaré introduit ensuite une considération importante, celle de l'*indice* d'un cycle. Soit un cycle situé tout entier dans un hémisphère. Ce cycle divise la sphère en deux régions, dont l'une, située tout entière dans l'un des hémisphères, s'appellera l'*intérieur* du cycle.

Si le cycle est tout entier dans le premier hémisphère, on dira qu'un point mobile décrit le cycle dans le sens positif s'il a constamment l'intérieur du cycle à sa gauche; si, au contraire, le cycle était dans le second hémisphère, un point décrirait le cycle dans le sens positif s'il en avait constamment l'intérieur à sa droite.

Supposons qu'un point mobile décrive le cycle dans le sens positif et considérons les variations de l'expression $\frac{Y}{X}\cdot$ Soit h le nombre de fois que cette expression saute de $-\infty$ à $+\infty$, soit k le nombre de fois que cette expression saute de $+\infty$ à $-\infty$. Soit

$$i = \frac{h - k}{2};$$

le nombre i s'appellera l'indice du cycle.

On peut ramener le calcul de l'indice d'un cycle quelconque au calcul de l'indice des différents cycles infiniment petits qui le composent.

Un cycle infiniment petit qui ne contient à son intérieur aucun point singulier a pour indice zéro.

Un cycle infiniment petit qui contient à son intérieur un point singulier a pour indice ± 1.

L'indice d'un cycle situé tout entier dans l'un des hémisphères est

$$-(N + F - C),$$

en désignant par N le nombre des nœuds, par F celui des foyers, par C le nombre des cols situés à l'intérieur du cycle.

L'indice de l'équateur est $N' - C' - 1$, en désignant par $2N'$ le nombre des nœuds, par $2C'$ le nombre des cols situés sur l'équateur.

La courbe $X = 0$ et la courbe $Y = 0$ se composent d'un certain nombre de cycles.

Considérons deux quelconques de ces cycles; ils se couperont en un certain nombre de points.

Soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$ les $2n$ points d'intersection de ces deux cycles rangés d'après l'ordre où on les rencontre en parcourant l'un des deux cycles, le cycle $X = 0$, par exemple, dans le sens positif : *Si deux points consécutifs sont situés dans un même hémisphère, l'un est un nœud, l'autre est un col.*

IV. *Théorie des contacts.* — L'objet principal de ce Chapitre est l'étude du nombre de points où un arc ou un cycle donné touche une caractéristique, c'est-à-dire du nombre des contacts de cet arc ou de ce cycle.

Le nombre des contacts d'un cycle algébrique est toujours pair à la condition :

1° Que l'on compte un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre pour n contacts;

2° Qu'un point anguleux du cycle donné soit considéré comme un ou comme deux contacts selon que la caractéristique qui y passe y touche ou y traverse le cycle;

3° Qu'un point singulier compte pour $n+1$ contacts si le cycle a, en ce point, un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre avec une caractéristique;

4° Qu'un foyer qui est un point anguleux du cycle donné soit compté pour un contact;

5° Qu'un col ou un nœud qui est un point anguleux du cycle donné soit compté pour un ou deux contacts, selon la position des tangentes au cycle en ce point.

Si, entre deux points de la sphère, on peut mener un arc quelconque sans contact, on peut aussi mener entre ces deux points un arc algébrique sans contact.

Si AB est un arc algébrique sans contact, si AA_1 et BB_1 sont deux arcs de caractéristiques, on peut mener de A_1 à B_1 un arc sans contact.

Si AB et A_1B_1 sont deux caractéristiques, si AA_1 et BB_1 sont deux arcs algébriques qui ne coupent AB et A_1B_1 en aucun autre point que A, B, A_1 ou B_1, les nombres des contacts de AA_1 et de BB_1 sont de même parité.

Si un arc de caractéristique qui ne passe par aucun point singulier est *sous-tendu* par un arc de courbe, le nombre des contacts de cet arc de courbe est impair.

(L'expression *sous-tendu* signifie que les deux branches de courbe formées par la caractéristique prolongée au delà des deux points qui limitent les deux arcs sont toutes deux intérieures ou extérieures au cycle formé par les deux arcs.)

ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA, diretti dal prof. FRANCESCO BRIOSCHI.

Tome X; 1880-1881.

Brioschi. — Sur une propriété des équations différentielles linéaires du second ordre. (1-3).

Généralisation d'une proposition due à M. Hermite (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* 23 décembre 1879). Soient y_1 et y_2 deux solutions de l'équation

$$y'' + py' + qy = 0,$$

dont le produit $y_1 y_2 = z$ est connu : on peut former une équation différentielle linéaire du second ordre

$$Y'' + lY' + mY = 0,$$

dont les solutions soient

$$Y_1 = y_1 u_1, \quad Y_2 = y_2 u_2,$$

u_1, u_2 étant des fonctions connues de x; en faisant

$$P = Y_1 Y_2' - Y_2 Y_1',$$

$$l = -\frac{P'}{P}, \quad m = -\frac{1}{P}(Y_2' Y_1'' - Y_1' Y_2''),$$

P et m s'expriment au moyen des quantités p, q, u_1, u_2, z et de leurs dérivées; les formules prennent un intérêt particulier quand on suppose que u_1 et u_2 sont des solutions d'une équation différentielle linéaire telle que

$$u'' + \lambda u' + \mu u = 0 :$$

on a alors

$$P = Cwe^{-\int p dx} + Dze^{-\int \lambda dx}$$

et

$$m = \frac{1}{P}\Big\{ P'' - \frac{3}{2}(p - \lambda)P' + 3\left(q + \mu + \frac{1}{2}\lambda p\right)P$$
$$- Cwe^{-\int p dx}\left[p' - \frac{1}{2}p^2 - 2q\right] + Dze^{-\int \lambda dx}\left[\lambda' - \frac{1}{2}\lambda^2 - 2\mu\right]\Big\},$$

où $w = u_1 u_2$ et où C, D sont des constantes.

Brioschi. — Sur une classe d'équations différentielles linéaires du second ordre. (4-9).

Suite des recherches publiées sous le même titre dans le volume précédent : Soit

$$y'' + py' + qy = 0$$

une équation différentielle linéaire du second ordre; une forme binaire d'ordre n, $F(x) = (y_1, y_2)$, où y_1, y_2 représentent un système fondamental d'intégrales satisfera à une équation linéaire d'ordre $n + 1$; soient

$$H(x) = h(y_1, y_2) = f_{11} f_{22} - f_{12}^2,$$
$$\Theta(x) = \theta(y_1, y_2) = 2(f_1 h_2 - f_2 h_1);$$

on aura, comme il a été vu plus haut,

$$H(x) = \frac{\Delta^2}{n^2(n-1)C^2}\left[nFF'' - (n-1)F'^2 - npFF' + n^2 qF^2\right],$$

$$\Theta(x) = \frac{\Delta}{n(n-2)C}\left[2(n-2)FH' - nHF'\right].$$

où $\mu = e^{\int p dx}$ et où C est une constante; soient

$$P_0 = 1, \quad P_1 = 0, \quad P_2 = H(x), \quad P_3 = \Theta(x),$$

$$P_{r+1} = \frac{\mu}{n(n-r)C}\left[r(n-2)F'P_r - nFP'_r\right] + \frac{r(n-1)}{n-r}P_2P_{r-1};$$

l'équation différentielle d'ordre $n+1$, à laquelle satisfera $F(x)$, sera

$$\frac{\mu}{C}\left[(n-2)F'P_n - FP'_n\right] + n(n-1)P_2P_{n-1} = 0;$$

pour $n = 2$ on retombe sur l'équation connue du troisième degré.

Cette équation prend la forme

$$2\varphi\delta F''' + 3\gamma\delta F'' + (\gamma + \gamma'\delta + 8\psi\delta)F' + 4(\psi + \psi'\delta)F = 0$$

en supposant l'équation en y écrite sous la forme

$$y'' + \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{1}{\delta}\right)y' + \frac{\psi}{\varphi}y = 0.$$

En supposant

$$\varphi(x) = 4x^3 - g_2x - g_3, \quad \gamma(x) = \varphi' + \frac{\varphi}{\delta} = ax^2 + bx + c,$$

$$\delta x = lx + m, \quad \psi(x) = \alpha x + \beta,$$

on trouve aisément que $-\frac{m}{l}$ est une racine e de $\varphi(x)$ et que

$$a = 4(\rho + 3), \quad b = 4\rho e, \quad c = 4\rho e^2 - g_2(\rho + 1), \quad \delta = \frac{1}{\rho}(x - e),$$

en faisant $l = \frac{1}{\rho}$.

Les substitutions

$$x - e_1 = (e_2 - e_1)\,\mathrm{sn}^2 u, \quad x - e_2 = (e_1 - e_2)\,\mathrm{cn}^2 u, \quad x - e_3 = (e_1 - e_3)\,\mathrm{dn}^2 u,$$

en supposant $k^2 = \frac{e_2 - e_1}{e_3 - e_1}$, donnent, à la place de l'équation en y et x, l'équation en x et u

$$\frac{d^2y}{du^2} + \rho(e_3 - e_1)\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{x - e}\frac{dy}{du} + \frac{\alpha x + \beta}{e_3 - e_1}y = 0,$$

qui fournit trois types distincts, suivant que l'on prend pour e l'une ou l'autre des racines e_1, e_2, e_3 de $\varphi(x)$; si, en particulier, on détermine les constantes α, β, ρ de façon que l'on ait

$$\psi + \psi'\delta = 0,$$

l'équation du troisième ordre en $F(x)$ admettra une solution de la forme $F(x) = \text{const.}$, et les trois équations dont on vient de parler seront

$$\frac{d^2y}{du^2} - \frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}\frac{dy}{du} - m^2k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,y = 0,$$

$$\frac{d^2y}{du^2} + \frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}\frac{dy}{du} + m^2k^2\,\mathrm{cn}^2 u\,y = 0,$$

$$\frac{d^2y}{du^2} + k^2\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\frac{dy}{du} + m^2\,\mathrm{dn}^2 u\,y = 0.$$

et en se servant de la relation $y_1 y_2 =$ const., on trouve qu'elles admettent respectivement comme intégrales particulières

$$X = \frac{1}{2} \log \frac{\operatorname{dn} u + k \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u - k \operatorname{cn} u},$$

$$Y = - i \operatorname{arc} \sin (k \operatorname{sn} u),$$

$$Z = - i \operatorname{am} u.$$

Enfin M. Brioschi montre qu'on peut encore déterminer les constantes de façon que l'équation en $F(x)$ soit vérifiée par un polynôme du degré n.

Casorati. — Le calcul des différences finies interprété et accru de nouveaux théorèmes; utilité de ce calcul dans les recherches actuelles relatives aux fonctions de variables complexes. (10-45).

I. *Première interprétation.* — Appelons *couronne* la portion du plan d'une variable imaginaire x comprise entre deux cercles ayant le point x_1 pour centre commun : soit y une fonction analytique de x ayant en x_1 telle singularité que l'on voudra, mais n'admettant aucun point singulier à l'intérieur de la couronne, en sorte que, x_0 étant un point de cette couronne, y puisse être développée en une série procédant suivant les puissances entières de $x - x_0$, convergente à l'intérieur d'un cercle qui n'ait pas de points en dehors de la couronne. Soit maintenant Δy la *différence* de la fonction y, c'est-à-dire l'accroissement qu'elle subit quand la variable partant du point x de la couronne revient en ce point après avoir fait un tour dans le sens direct, accroissement qui sera nul si la fonction est *monotrope* dans la couronne.

De l'équation

$$\Delta \log (x - x_1) = 2 \pi i = \varpi$$

résulte que la fonction $\log(x - x_1)$ se comporte, relativement aux *différences* dont s'occupe M. Casorati, comme la variable indépendante dans le calcul ordinaire des différences : on est ainsi amené à introduire la variable

$$t = \frac{\log (x - x_1)}{2 \pi i},$$

d'où

$$x - x_1 = e^{\varpi t}.$$

Les fonctions monotropes (qu'on représentera dorénavant par la lettre φ) ont la période $\Delta t = 1$; on aura

$$\Delta \varphi = 0, \quad \Delta (\varphi y) = \varphi \Delta y.$$

L'auteur introduit, outre les symboles Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, dont le sens est éclairci par ce qui précède, les symboles θy, $\theta^2 y$, $\theta^3 y, \ldots, \theta^n y$ est la valeur que prend la fonction y quand on y remplace t par $t + n$: on a, par exemple,

$$\Delta y = \theta y - y.$$

L'opération θy est éminemment distributive.

Si l'on désigne par $F(u, v, w, \ldots)$ une fonction uniforme des variables u, v, w, ... qui sont elles-mêmes des fonctions de la variable x ou t, on a évidem-

ment

$$\theta^n F(u, v, w, \dots) = F(\theta^n u, \theta^n v, \theta^n w, \dots).$$

On convient encore d'écrire $(\theta - a)y$ à la place de $\theta y - ay$, en sorte que

$$(\theta - 1)y = \Delta y;$$

d'après cela, les équations symboliques

$$\theta - 1 = \Delta, \quad 1 + \Delta = \theta$$

se comprennent d'elles-mêmes.

Si A_0, A_1, ..., A_n sont des quantités constantes par rapport à t et si l'on désigne par $a_1, a_2, \dots, a_n$ les racines de l'équation

$$A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_{n-1} z + A_n = 0,$$

on pourra écrire

$$A_0 \theta^n y + A_1 \theta^{n-1} y + \dots + A_{n-1} \theta y + A_n y = A_0 (\theta - a_1)(\theta - a_2) \dots (\theta - a_n) y.$$

Différentiation finie. — En faisant

$$t^{(n)} = t(t-1)\dots(t-n+1),$$

on a

$$\theta t^{(n)} = (t+1) t^{(n-1)}, \quad \Delta t^{(n)} = n t^{(n-1)};$$

plus généralement, si on fait

$$F = \Phi_0 t^{(n)} + \Phi_1 t^{(n-1)} + \dots + \Phi_n,$$

les Φ étant, comme il a été dit au début, des fonctions monotropes, on aura

$$(\theta - a) a^t F = a a^t [n \Phi_0 t^{(n-1)} + (n-1) \Phi_1 t^{(n-2)} + \dots + \Phi_{n-1}].$$

Intégration finie. — La solution la plus générale de l'équation

$$(\theta - a) y = a^t (\Phi_0 t^{(n)} + \dots + \Phi_n)$$

est

$$y = \frac{a^t}{a} \left(\Phi_0 \frac{t^{(n+1)}}{n+1} + \dots + \Phi_n \frac{t}{1} + \Phi_{n+1} \right),$$

Φ_{n+1} étant une fonction monotrope arbitraire.

La solution la plus générale de l'équation

$$(\theta - a)^\lambda y = 0$$

est

$$y = \frac{a^t}{a^{\lambda-1}} \left[\Phi_0 \frac{t^{(\lambda-1)}}{(\lambda-1)!} + \Phi_1 \frac{t^{(\lambda-2)}}{(\lambda-2)!} + \dots + \Phi_{\lambda-1} \right].$$

En introduisant la variable x, on peut écrire,

$$y = (x - x_1)^\alpha \{ \varphi_0 [\log(x - x_1)]^{\lambda-1} + \dots + \varphi_{\lambda-1} \};$$

M. Casorati intègre encore l'équation

$$A_0 \theta^n y + A_1 \theta^{n-1} y + \dots + A_n y = 0,$$

où les coefficients sont des constantes.

On aperçoit de suite la liaison de ces recherches et des résultats exposés par

M. Fuchs dans son Mémoire sur les fondements de la théorie des équations différentielles linéaires, concernant le mode d'existence des solutions d'une telle équation dans le voisinage d'un point singulier.

II. *Critérium pour reconnaître si plusieurs fonctions sont liées entre elles par une relation linéaire à coefficients d'une nature particulière.* — Les fonctions

$$y_1, \; y_2, \; \ldots, \; y_n,$$

de la variable x auront entre elles, dans la couronne de centre x, une relation linéaire, homogène, à coefficients monotropes, si l'on a identiquement

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ \theta y_1 & \theta y_2 & \ldots & \theta y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta^{n-1} y_1 & \theta^{n-1} y_2 & \ldots & \theta^{n-1} y_n \end{vmatrix} = 0.$$

La réciproque est vraie.

M. Casorati l'établit en s'appuyant sur une transformation du déterminant précédent donnée par M. Hermite (*Journal de Liouville*, t. XIV, p. 25 et 26).

Au lieu de ce déterminant, on peut évidemment prendre celui où l'opération Δ remplace l'opération θ. Enfin on déduit de là, sans difficulté, une proposition analogue pour reconnaître si les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont liées entre elles par une relation linéaire et homogène dont les coefficients reprennent leur valeur à la fin de ν tours de la variable.

III. *Application aux fonctions définies par une équation algébrique à coefficients monotropes.* — Si l'on désigne par z une quelconque des racines z_1, $z_2, \ldots, z_n$ en un point x de la couronne, on devra avoir

$$(\theta^\nu - 1) z = 0;$$

ν étant le nombre des éléments du système circulaire auquel appartient la racine z, il en résulte que l'on a nécessairement

$$z = (x - x_1)^{\frac{1}{\nu}} \varphi_1 + (x - x_2)^{\frac{2}{\nu}} \varphi_2 + \ldots + (x - x_\nu)^{\frac{\nu-1}{\nu}} \varphi_{\nu-1} + \varphi_\nu.$$

IV. *Application aux fonctions définies par une équation différentielle linéaire à coefficients monotropes.* — On trouve ici une équation aux différences qui correspond à l'équation *fondamentale* de M. Fuchs.

Soit

$$D^m y + p_1 D^{m-1} y + \ldots + p_{m-1} D y + p_m y = 0,$$

l'équation proposée.

A cette équation se joint, pour toute valeur particulière de la variable indépendante, une équation aux différences linéaires d'ordre m, à coefficients constants, qui caractérise le mode d'existence des intégrales de l'équation différentielle proposée aux environs de ce point. Cela résulte de ce que le déterminant

$$\begin{vmatrix} y & D y & \ldots & D^m y \\ \theta y & D\theta y & \ldots & D^m \theta y \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta^m y & D\theta^m y & \ldots & D^m \theta^m y \end{vmatrix}$$

est nul quand on y remplace y par l'intégrale générale de l'équation différentielle proposée; on en conclut l'existence d'une relation à coefficients constants

$$A_1 \theta^m y + A_1 \theta^{m-1} y + \ldots + A_m y = 0,$$

On voit aussi que, à une telle équation, correspond inversement une équation différentielle linéaire à coefficients monotropes dans la couronne.

L'équation algébrique

$$A_1 \theta^m + A_1 \theta^{m-1} + \ldots + A_m = 0$$

est l'équation fondamentale de M. Fuchs; l'intégration de l'équation en θy conduit naturellement l'auteur aux résultats développés par M. Fuchs dans le Mémoire cité; les *sous-groupes* de M. Hamburger, le théorème de M. Jürgens sont aussi des conséquences faciles de la même étude.

V. *Application aux fonctions définies par une équation différentielle linéaire à coefficients polytropes.* — Supposons que les coefficients soient des fonctions rationnelles de x et de z, z étant défini par une équation de la forme

$$z^n + \psi_1 z^{n-1} + \ldots + \psi_{n-1} z + \psi_1 = 0;$$

soit ν le nombre des éléments du système circulaire autour de x_1, auquel appartient la racine z de cette équation que l'on considère, on sera conduit, en suivant la même voie que précédemment, à une équation fondamentale aux différences

$$A_0 \theta^{m\nu} y + A_1 y \theta^{(m-1)\nu} + \ldots + A_{m-1} \theta^{2\nu} y + A_m y = 0,$$

à coefficients constants : M. Casorati en conclut la forme de l'intégrale générale, à savoir

$$y = (x - x_1)^{\frac{r_1}{\nu}} f_1 + (x - x_1)^{\frac{r_2}{\nu}} f_2 - \ldots - (x - x_1)^{\frac{r_m}{\nu}} f_m,$$

forme valable quand toutes les racines de l'équation fondamentale algébrique sont distinctes et où les f sont des fonctions qui reprennent la même valeur après r tours de la variable.

VI. *Interprétation du calcul des différences; son utilité particulière dans les recherches sur les fonctions périodiques d'une seule variable indépendante.*—Les détails dans lesquels nous sommes entrés permettent de bien apercevoir le point de vue auquel s'est placé M. Casorati : dans ce Chapitre, il montre avec quelle facilité sa méthode permet de traiter les questions résolues par M. Picard et M. Mittag-Leffler dans les *Comptes rendus* du 21 juillet 1879, du 19 février 1880, du 16 février 1880; le *Bulletin* a rendu compte de ces recherches; notons encore cette proposition :

Entre plusieurs fonctions doublement périodiques de seconde espèce, pour lesquelles les multiplicateurs relatifs à la première période sont distincts entre eux, comme aussi les multiplicateurs relatifs à la seconde période, il ne peut exister aucune relation linéaire homogène à coefficients doublement périodiques.

VII. *Application aux équations linéaires à coefficients périodiques.* — La condition nécessaire et suffisante pour la double périodicité des coefficients de

l'équation différentielle est que l'intégrale complète puisse s'exprimer linéairement au moyen de m fonctions doublement périodiques de seconde espèce.

VIII. *Nouvelle interprétation utile dans les recherches sur la périodicité simultanée relativement à plusieurs variables indépendantes.*

Beltrami (*E.*). — Sur quelques nouveaux théorèmes de M. C. Neumann sur les fonctions potentielles. (46-63).

L'auteur dit, avec quelque modestie, que son Mémoire est consacré à la démonstration de quelques-uns des théorèmes énoncés par M. Neumann (*Mathematische Annalen,* t. XVI, p. 409-431, 432-438) et relatifs à la théorie du potentiel (M. Beltrami ne s'est occupé que de ceux de ces théorèmes qui concernent le potentiel newtonien). Toutefois, l'élégance des démonstrations de M. Beltrami n'est pas le seul mérite de son travail; les beaux théorèmes de M. Neumann, en effet, concernent des surfaces fermées, tandis que M. Beltrami établit des propositions analogues concernant des portions de surface limitées par un contour.

Ces portions de surfaces sont rapportées à des coordonnées quelconques u, v; on suppose toutefois que le réseau des courbes u, v qui décompose la portion de surface en éléments superficiels est analogue au réseau de parallèles aux axes de coordonnées dans le plan qui représente la surface. Il est utile d'établir d'abord quelques propositions générales, en se plaçant au point de vue de l'auteur dans son Mémoire *Sulle variabili complesse in una superficie qualunque* (*Annali...*, série II; t. I, § 1).

Soient ξ, η, ζ les coordonnées d'un point quelconque (u, v) de la surface; on indiquera dans ce qui suit les dérivées prises par rapport à u par un accent, celles prises par rapport à v par un indice.

En posant

$$\begin{aligned} \mathrm{E} &= \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2, \\ \mathrm{F} &= \xi'\xi_1 + \eta'\eta_1 + \zeta'\zeta_1, \\ \mathrm{G} &= \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2, \\ \mathrm{H} &= \sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2} > 0, \end{aligned}$$

l'élément linéaire sur la surface sera

$$\mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2,$$

et le cosinus directeur $\alpha = \frac{d\xi}{dn}$, $\beta = \frac{d\eta}{dn}$, $\gamma = \frac{d\zeta}{dn}$ de la normale seront données par les formules

$$\begin{aligned} \mathrm{H}\alpha &= \eta'\zeta_1 - \eta_1\zeta', \\ \mathrm{H}\beta &= \zeta'\xi_1 - \zeta_1\xi', \\ \mathrm{H}\gamma &= \xi'\eta_1 - \xi_1\eta'; \end{aligned}$$

Si l'on suppose que la surface a partout une courbure finie, on peut regarder, dans le voisinage de la surface, regarder les coordonnées ξ, η, ζ d'un point quelconque de l'espace comme des fonctions uniformes de u, v, n; u, v étant les coordonnées du pied de la normale n, et l'on aura

$$\begin{aligned} d\xi &= \xi'\,du + \xi_1\,dv + \alpha\,dn, \\ d\eta &= \eta'\,du + \eta_1\,dv + \beta\,dn, \\ d\zeta &= \zeta'\,du + \zeta_1\,dv + \gamma\,dn; \end{aligned}$$

ces formules résolues par rapport à du, dv, dn, donnent, après une transformation facile,

$$du = \frac{1}{H}(M_\xi\, d\xi + M_\eta\, d\eta + M_\zeta\, d\zeta),$$

$$dv = \frac{1}{H}(N_\xi\, d\xi + N_\eta\, d\eta + N_\zeta\, d\zeta),$$

$$dn = \alpha\, d\xi + \beta\, d\eta + \gamma\, d\zeta,$$

en convenant de représenter par les symboles M_φ, N_φ, où φ est une fonction quelconque de u, v, les expressions

$$M_\varphi = \frac{G\varphi' - F\varphi_1}{H}, \quad N_\varphi = \frac{E\varphi_1 - F\varphi'}{H}.$$

On déduit de là

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{1}{H}(M_\varphi \xi' + N_\varphi \xi_1) + \alpha \frac{d\varphi}{dn},$$

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = \frac{1}{H}(M_\varphi \eta' + N_\varphi \eta_1) + \beta \frac{d\varphi}{dn},$$

$$\frac{d\varphi}{d\zeta} = \frac{1}{H}(M_\varphi \zeta' + N_\varphi \zeta_1) + \gamma \frac{d\varphi}{dn};$$

puis, en représentant par $\Delta_1(\varphi, \psi)$ l'*invariant bilinéaire* des deux fonctions φ et ψ de u et de v,

$$\Delta_1(\varphi, \psi) = \frac{1}{H^2}[G\varphi'\psi' - F(\varphi'\psi_1 + \varphi_1\psi') + E\varphi_1\psi_1],$$

on trouve

$$(1) \qquad \frac{d\varphi}{d\xi}\frac{d\psi}{d\xi} + \frac{d\varphi}{d\eta}\frac{d\psi}{d\eta} + \frac{d\varphi}{d\zeta}\frac{d\psi}{d\zeta} = \Delta_1(\varphi, \psi) + \frac{d\varphi}{dn}\frac{d\psi}{dn}.$$

Considérons ensuite l'intégrale

$$\int \mu\, \Delta_1(\varphi, \psi)\, d\sigma,$$

étendue à tous les éléments de la surface et où μ, φ, ψ sont des fonctions uniformes de u, v admettant, les deux premières, des dérivées premières, et la troisième des dérivées secondes ; on la transforme en se servant des théorèmes donnés par M. Beltrami dans le Mémoire cité et exprimés par les formules

$$\int\int \chi'\, du\, dv = \int \left(E \frac{du}{d\nu} + F \frac{dv}{d\nu}\right) \frac{\chi\, ds}{H},$$

$$\int\int \chi_1\, du\, dv = -\int \left(G \frac{du}{d\nu} + G \frac{dv}{d\nu}\right) \frac{\chi\, ds}{H},$$

où les intégrales du second membre sont étendues à tous les éléments ds du contour et où ν désigne la direction de l'élément linéaire de σ conduit normalement vers l'intérieur de la surface à l'élément ds du contour.

On arrive ainsi à la formule

$$(2) \qquad \int \mu\, \Delta_1(\varphi, \psi)\, d\sigma = -\int [\mu\, \Delta_2\varphi + \Delta_1(\varphi, \mu)]\psi\, d\sigma - \int \mu \frac{d\varphi}{d\nu} \psi\, ds.$$

où

$$\Delta_2 \varphi = \frac{1}{H}\left[(M_\varphi)' + (N_\varphi)_1\right]$$

est le paramètre différentiel du second ordre de la fonction φ.

Ces résultats s'appliquent à la théorie du potentiel d'une masse répandue sur une surface. Soit en général

$$V = \int h\psi\, d\sigma$$

un tel potentiel, où h est la densité et ψ une fonction de la distance r de l'élément *potentiant* $d\sigma$ au point *potentié* x, y, z ; ψ se réduira à $\frac{1}{r}$ pour le potentiel newtonien.

En remarquant que $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}$ et appliquant les formules (1) et (2), on trouvera aisément

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int [h\Delta_2 \xi - \Delta_1(h, \xi)]\psi\, d\sigma - \int h\alpha \frac{\partial \psi}{\partial n}\, d\sigma - \int h \frac{d\xi}{\partial \nu}\psi\, ds;$$

en remplaçant ψ par $\frac{1}{r}$ et supprimant l'intégrale finale relative au contour de la surface, on obtient l'une des formules de M. Neumann. On peut remarquer que la masse totale qui figure dans le potentiel du second membre, savoir

$$\int [h\Delta_2 \xi - \Delta_1(h, \xi)]\, d\sigma + \int h \frac{d\xi}{\partial \nu}\, ds,$$

est nulle d'après la formule (2).

Le calcul de la dérivée d'un potentiel de la forme

$$W = \int g \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma \quad \text{ou} \quad \int g \frac{\partial \psi}{\partial n}\, d\sigma$$

est un peu plus compliqué : on met d'abord cette dérivée sous la forme

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \int \frac{\partial g}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial n}\, d\sigma - \int \left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(g\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right)\alpha + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(g\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)\beta + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(g\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\right)\gamma\right] d\sigma;$$

puis, en utilisant l'identité

$$\int_s (X\, d\xi + Y\, d\eta + Z\, d\zeta)$$
$$= \int \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial \eta} - \frac{\partial Y}{\partial \zeta}\right)\alpha + \left(\frac{\partial X}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z}{\partial \xi}\right)\beta + \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} - \frac{\partial X}{\partial \eta}\right)\gamma\right] d\sigma,$$

dans laquelle l'intégrale du premier membre est étendue aux éléments du contour de la surface parcourue dans le sens positif, on parvient à l'expression

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \int \frac{\partial g}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial n}\, d\sigma - \int g\nabla\psi\, d\sigma$$
$$- \int \left(\frac{\partial g}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial g}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \frac{\partial g}{\partial \zeta}\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\right)\alpha\, d\sigma - \int_s g\left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\, d\zeta - \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\, d\eta\right).$$

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

J.-L. HEIBERG. — LITERARGESCHICHTLICHE STUDIEN ÜBER EUKLID. — Leipzig, Teubner. 1882. In-8°. 224 pages.

Le savant danois qui vient de s'illustrer par une édition critique d'Archimède a entrepris d'accomplir la même tâche pour Euclide ; dès aujourd'hui, comme prémisse de cette œuvre qui réclamera un travail assidu de plusieurs années, il publie un important ensemble d'études historiques et philologiques sur l'auteur des *Éléments*.

La première des six Sections qui composent le Volume est consacrée aux renseignements fournis par les Arabes. M. Heiberg arrive à reconstituer, d'une façon probante, l'origine des données historiques sur la vie d'Euclide qui nous viennent de cette source ; il démontre que ces données ne peuvent dériver d'une tradition grecque en dehors des documents que nous possédons, que par conséquent elles sont tout à fait inutilisables. Quant aux écrits du géomètre grec, il établit que désormais l'on ne peut guère espérer de recherches dans les manuscrits arabes, ni quelque réforme importante pour le texte des ouvrages qui subsistent, ni la découverte de quelqu'un de ceux qui ont été perdus. Cependant il reconnaît une traduction du Livre Περὶ διαιρεσέων (*Sur les divisions*), non pas dans le Traité de Mahomet de Bagdad, qu'a recueilli l'édition de Gregory, mais bien dans un écrit du Ms supplément arabe 952, 2, de la Bibliothèque Nationale, sur lequel Woepcke a donné une notice très complète (*Journal asiatique*, 1851, p. 233 et suiv.).

La seconde Section (sur la vie et les écrits d'Euclide) est également traitée avec un sens critique qu'on ne saurait trop louer. Pour la vie, malheureusement, on ne saura jamais sans doute qu'une chose : c'est qu'Euclide vivait à Alexandrie sous Ptolémée Ier, qu'il florissait par conséquent vers l'an 300 avant Jésus-Christ. Quant aux écrits que nous possédons et dont l'authenticité est contestée, je remarque que M. Heiberg nie celle du fragment *De levi et ponderoso* et de l'*Introduction harmonique*. Il admet, au con-

traire, que ni les *Phénomènes* ni les *Optiques* ne sont supposés; mais il constate que le texte connu s'écarte notablement de la rédaction originaire. Toutefois il espère que celle-ci peut être à très peu près retrouvée, en particulier dans le manuscrit de Vienne, gr. 103. Comme spécimen, il publie, dans la quatrième Section de son Volume, le texte des *Optiques* d'après ce manuscrit. Quant aux *Catoptriques*, sans se prononcer définitivement, il fait sérieusement valoir les raisons qui militent contre l'authenticité.

La troisième Section, relative aux écrits perdus, réunit tous les renseignements que l'on peut trouver sur les *Porismes*, les *Lieux en surface* et les *Coniques*. La discussion relative au premier de ces Ouvrages est particulièrement remarquable; j'y reviendrai du reste plus loin, me contentant, pour le moment, d'en mentionner la conclusion, à savoir que la restitution tentée par Chasles ne peut certainement, quelle qu'en soit la haute valeur, être considérée comme définitive.

Des deux dernières Sections, la première est consacrée à des recherches sur les anciens commentateurs d'Euclide. Hypsiclès ouvre la marche comme auteur du Livre XIV des *Éléments*; pour le Livre XV, il doit être attribué à un condisciple d'Eutocius, élève de l'architecte-ingénieur Isidore de Milet. Viennent ensuite Héron d'Alexandrie [1], Porphyre, Pappus, Proclus, les Scoliastes et les Byzantins, Isaac Argyrus, Barlaam et Psellus.

M. Heiberg établit, sans réplique possible, à mon sens, que Proclus n'a pas continué, comme il s'était proposé de le faire, son prolixe commentaire, borné au premier Livre des *Éléments*. Les scolies qui se rapportent aux autres Livres doivent en général remonter au travail de Pappus, lequel, au contraire, semble bien avoir été complet. Son étude sur le Livre X, particulièrement détaillée, subsiste peut-être, traduite en arabe, dans le manuscrit de la Bibliothèque Nationale dont nous avons déjà parlé. Woepcke, il est vrai, a lu pour le nom de l'auteur grec « B. l. s. » ou « B. n. s. le Roumi », et l'a identifié avec l'astrologue Vettius Valens. M. Heiberg démontre que cette identification est insoutenable. En tout cas, la traduction complète du Traité est très

(1) *Mémoires présentés à l'Académie des Sciences*, 1856, t. XIV, p. [illegible]

désirable, et, seule, elle peut permettre de résoudre la question d'attribution.

La dernière Section enfin (pour l'histoire du texte) renferme un recueil, soigneusement fait, des citations d'Euclide par les auteurs grecs jusqu'au XIVe siècle après Jésus-Christ. Ce recueil n'a pas la prétention d'être complet, mais, pour ma part, je n'ai pu y découvrir qu'une seule lacune [1].

En résumé, le travail de l'illustre érudit, par le soin avec lequel il est composé et par la publication de tous les textes intéressant son sujet, sera désormais indispensable à quiconque voudra faire des recherches sur Euclide et ses œuvres.

Je pourrais, à la vérité, faire quelques réserves sur quatre ou cinq points sur lesquels je ne partage pas l'opinion de M. Heiberg. Mais comme j'ai déjà eu l'occasion de les discuter ici-même, et que l'Ouvrage que j'examine n'apporte pas en réalité de nouveaux arguments que j'aie à combattre, je préfère me borner, avant d'aborder la question des Porismes, à quelques remarques qui me sont suggérées par les abondantes citations et les lumineux développements du savant philologue. Qu'il me permette d'essayer d'apporter ainsi mon humble pierre à l'édifice qu'il élève.

On considère l'écrit des Ψευδάρια comme absolument perdu. Or, M. Heiberg fait remarquer (p. 38, note) qu'il a été connu d'Alexandre d'Aphrodisias; celui-ci le mentionne dans son commentaire sur Aristote σοφιστ. ἐλέγχ., sous le titre : les Ψευδογραφήματα d'Euclide. Il me semble dès lors que c'est à cet Ouvrage qu'Alexandre a dû emprunter ce qu'il dit de la fausse quadrature du cercle par Antiphon, et de celle par les lunules, fragments conservés par Simplicius [2]. On expliquerait ainsi la conservation des faux théorèmes attribués à tort à Hippocrate de Chios, et qu'Aristote connaissait déjà. Peut-être pourrait-on faire aussi remonter à la même source ce que l'on sait de la quadrature de Bryzon [3].

Dans les citations de Pappus qu'il est amené à faire, M. Heiberg propose d'importantes corrections au texte de l'excellente édition

---

[1] Pour la mention de la proposition III, 3, dans *Simplicii in Aristotelis physicorum libros quatuor priores*, ed. Diels. Berlin, Reimer, 1882, p. 651.

[2] Ouvrage cité, p. 54, 55, 56, 57, peut-être 58.

[3] *Alexand. Aphrod. comment. in Aristot. sophist. elench.*, fol. 30.

de M. Hultsch. En présence de ses conjectures hardies et de ses heureuses explications, j'ai été quelque peu surpris de le voir s'arrêter devant quelques passages et y reconnaître une corruption, sans essayer d'y porter remède.

Pour l'un d'eux, relatif à l'analyse des *Données* d'Euclide, la difficulté est, à la vérité, très sérieuse. Après avoir dit que six théorèmes (les propositions 56-61) concernent des parallélogrammes et des *paraboles* de figures données d'espèce, Pappus continue : « Des cinq suivants, le premier (62) est γραφόμενον (*écrit*); les quatre autres concernent des triangles. » (Hultsch, p. 638, 11; Heiberg, p. 222, note 4.)

Hultsch traduit avec Commandin γραφόμενον « *in lineis* » (*en lignes*), comme s'il y avait ἐν γραμμαῖς. M. Heiberg se contente de remarquer qu'il faudrait alors ἐν εὐθείαις (*en lignes droites*). Je me demande si le texte n'est pas intact et si Halley ne l'a pas bien traduit « *primum jam descriptum est* », c'est-à-dire : « le premier théorème rentre dans ceux dont je viens de parler. »

Il est certain, en effet, que la proposition 62 des *Données* dont il s'agit a un rapport intime avec la précédente, 61; Pappus aurait donc dû la classer avec les six antérieures. Toutefois le début de l'énoncé a pu le tromper au premier regard, et il aura mis à part cette proposition 62. Puis, quand, l'ayant mieux lue pour la bien qualifier, il a reconnu son erreur, il aura constaté celle-ci dans les termes que nous avons vus, au lieu de corriger ce qu'il avait déjà écrit. Si cette hypothèse implique une assez singulière précipitation de rédaction, elle ne m'en semble pas moins la plus plausible que l'on puisse faire.

Quoi qu'il en soit, je proposerai avec plus de confiance l'explication des deux autres passages dont M. Heiberg signale l'obscurité. Le premier est au début de l'analyse du Traité des *Lieux plans* d'Apollonius (Hultsch, p. 662, 5-10).

Pappus vient d'exposer qu'Apollonius classe les lieux en *éphectiques* (quand un point est lieu d'un point, une ligne d'une ligne, etc.), en *diexodiques* (quand une ligne est lieu d'un point, une surface d'une ligne, etc.), et en *anastrophiques* (quand une surface est lieu d'un point, un volume d'une surface). Il continue ensuite dans un passage quelque peu corrompu, mais que

M. Hultsch ne me paraît pas avoir eu bien raison de considérer comme interposé :

« Des lieux traités dans l'ἀναλυόμενος (c'est-à-dire dans la collection des ouvrages d'Analyse à laquelle Pappus consacre son Livre VII), les *éphectiques* sont ceux des *données* de position. »

Pappus veut dire, sans doute, que les points, lignes, figures, déterminés de position dans les *Données* d'Euclide, doivent être considérés comme des lieux éphectiques. Mais à ces propositions des *Données* on peut joindre celles qui présentaient le même caractère dans d'autres ouvrages d'Analyse, dans les *Porismes* notamment.

« Les lieux dits *plans* (droites et cercles), les lieux *solides* (coniques) et les lieux *grammiques* (courbes plus complexes ; il faut ajouter au texte καὶ οἱ avant γραμμικοί, l. 7) sont les lieux *diexodiques* de points. Les *lieux en surface* (les surfaces traitées comme lieux dans les Livres qui portaient l'intitulé : τόποι πρὸς ἐπιφανείᾳ) sont *anastrophiques* de points, *diexodiques* de lignes : toutefois les *grammiques* se démontrent d'après les *lieux en surface*. »

Si l'on se reporte aux définitions des lieux *diexodiques* et *anastrophiques*, ce passage n'offre aucune difficulté. Il suffit de remarquer que, tandis que l'ἀναλυόμενος comprenait des Traités intitulés : *Lieux plans*, *Lieux solides*, ou *Lieux en surface*, il n'en avait pas pour les *Lieux grammiques* ; c'est ce qui motive la remarque finale, que ces derniers lieux apparaissaient comme divisés (par intersection) des *Lieux en surface*, traités par Euclide.

Voici de même la traduction du premier lemme donnée par Pappus sur les *Lieux en surface* (Hultsch, p. 1004, 17-22) :

« Soit une droite AB, une autre CD donnée de direction, si le rapport de $AD \times DB$ à DC^2 est donné, C se trouvera sur une conique.

» Si maintenant AB cesse d'être donnée de position (par conséquent reste donnée de longueur) et que les points A, B, au lieu d'être fixes, soient assujettis à se trouver sur des droites (lire εὐθείαις au lieu de εὐθεῖα) données de position AE, EB ; si enfin C n'est pas dans le même plan, il se trouvera sur une surface donnée de position. Cela a été démontré. »

La figure des manuscrits, reproduite par Hultsch, est absurde, mais on voit immédiatement de quoi il s'agit. Une droite AB de

longueur fixe a ses extrémités glissant sur deux droites AE, EB (qui se coupent en E); elle entraîne dans son mouvement une conique dont elle est le diamètre, et dont les cordes conjuguées restent parallèles à une direction donnée en dehors du plan AEB. Le lieu de cette conique est évidemment une surface, d'ailleurs passablement complexe.

Il semble probable qu'Euclide avait considéré le cylindre engendré dans le cas où les droites AE, EB, au lieu de se couper, sont parallèles. Pappus aura cru bon de mentionner dans toute sa généralité une proposition dont l'auteur des *Lieux en surface* avait implicitement fait une application toute restreinte.

J'arrive enfin à la question si discutée du sens à attribuer au mot *porisme*. M. Heiberg l'a traitée avec une clarté bien rare dans ce qui a été écrit sur cette matière; l'exposé des résultats auxquels il arrive mérite donc d'intéresser le lecteur. Cependant, peut-être n'a-t-il pas toujours été jusqu'au bout de sa pensée; si j'essaye, dans ce qui suit, de la préciser, peut-être m'arrivera-t-il à mon tour de la dépasser. J'espère, cependant, qu'il ne me démentira point.

Le mot *porisme* a eu dans l'antiquité deux sens essentiellement différents, qui n'ont entre eux aucun rapport, quoique leur origine soit suffisamment explicable par la racine du mot. L'un de ces sens a été celui de corollaire; l'autre a désigné une certaine forme de propositions intermédiaires entre les théorèmes et les problèmes.

La distinction de cette classe de propositions doit remonter à l'époque immédiatement antérieure à celle d'Euclide, alors que l'on discutait, dans l'École après Platon, si tout était théorème ou si tout était problème. La constitution de cette classe des *porismes* pour les propositions d'un caractère ambigu fut le moyen terme qui servit à résoudre la difficulté.

C'est à cette époque qu'il faut rapporter les anciennes définitions que donnent Proclus et Pappus; si obscures qu'elles soient, elles s'interprètent au mieux de la façon suivante.

Dans le théorème, la figure est tracée; il s'agit de *démontrer* qu'une certaine relation énoncée existe entre les éléments; dans le problème, une partie au moins de la figure est à *construire*, d'après certaines conditions énoncées; dans le porisme enfin, la

figure est tracée comme dans le théorème, mais il y a à *trouver* entre ses éléments une relation non énoncée, et qui permette de déterminer l'un d'eux d'après les autres.

En d'autres termes, le porisme peut être considéré comme un théorème dont l'énoncé est incomplet ou bien comme un problème qui, par sa position même, est supposé résolu.

En choisissant ce terme de *porisme* comme titre de propositions touchant un ensemble de matières relativement restreint, Euclide s'astreignit-il exactement à les énoncer sous la forme correspondant au concept que nous avons essayé de définir? On ne peut le savoir, puisque son Ouvrage est entièrement perdu, et que Pappus peut avoir dénaturé sensiblement la forme des deux seuls énoncés qu'il nous ait conservés.

Mais, si Euclide a pu laisser incomplètes, dans ses énoncés, certaines constructions se déduisant immédiatement des autres données, et en dehors de la solution même de la question proposée, il n'en est pas moins clair qu'il a dû conserver le caractère général des porismes, essentiellement approprié à la recherche analytique.

Les porismes d'Euclide devaient donc présenter des questions dont la solution s'offrait comme nécessairement possible, et comme absolument déterminée. Sur ces deux points, ils différaient essentiellement des problèmes, dont l'énoncé pouvait être soumis à contenir des conditions relatives à leur possibilité (διορισμός), et auxquels les anciens regardaient toujours comme suffisant de satisfaire par une solution unique, sans s'inquiéter de savoir s'il y en avait d'autres.

En tous cas, la rédaction même des trois Livres des *Porismes* semble avoir entraîné une modification ultérieure du concept originaire, et Pappus nous apprend que ce concept avait été dénaturé par des auteurs plus récents. Il leur reproche, d'une part, d'avoir cru suffisant d'établir la possibilité d'une construction supposée, sans déterminer la relation pouvant servir à la faire, d'un autre côté de s'être attachés à une circonstance particulière et accidentelle en définissant le porisme « un théorème de lieu dont les données sont incomplètes ».

Le sens de cette définition, deviné par Chasles sous une traduction vraiment incompréhensible en elle-même : « Le porisme est

inférieur, par l'hypothèse, au théorème local », ressort suffisamment de ce que nous avons dit. Mais notre illustre compatriote s'est trompé en admettant que le mot *lieu* avait pour les anciens le même sens que pour nous. Si l'on se reporte à la définition des *lieux éphectiques*, que nous avons donnés plus haut, il est clair que pour nous ce ne sont nullement des lieux géométriques, et que, pour les anciens, une proposition concluant : « Telle droite passe par un point déterminé » était une proposition de lieu.

Si la situation du point est donnée dans l'énoncé de cette proposition, elle constituera d'ailleurs un théorème ; si, au contraire, il est demandé de trouver le point fixe par lequel doit passer la droite mobile, on aura un porisme.

Il convient également de remarquer que le problème *local*, tel que le définit Chasles : « Trouver la nature, la grandeur et la position du lieu commun à une infinité de points soumis à une loi commune », ne semble jamais avoir été posé sous cette forme chez les anciens, au moins pour les questions de *lieux plans* ou *solides*. Ils ont toujours défini, dans les énoncés, si le *lieu diexodique* à trouver était une droite, un cercle ou une des trois coniques. Leurs propositions de lieux étaient donc, en général, de véritables porismes. P. T.

MÉLANGES.

DEUX CAS PARTICULIERS DE LA TRANSFORMATION BIRATIONNELLE;

PAR M. P. H. SCHOUTE,

de Grõningue (Hollande).

Dans ce qui suit, je m'occupe de deux cas particuliers bien simples de la transformation birationnelle. Je commence dans le plan par la transformation par droites symétriques et je continue par celle par cercles symétriques. Ensuite, au moyen de la transformation par rayons vecteurs réciproques, j'indique la relation intime qui existe entre les deux transformations considérées. Enfin j'étudie dans l'espace la transformation par plans symétriques et

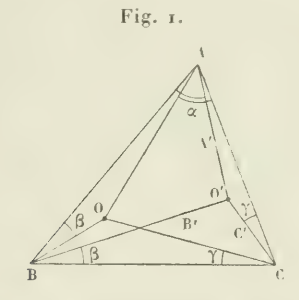
j'indique dans quel cas la transformation par sphères symétriques est possible (¹).

Je suppose que le lecteur s'est familiarisé avec la théorie générale de la transformation birationnelle de M. Cremona, comme on le trouve dans le Mémoire excellent de M. le colonel du génie Dewulf (*Bulletin*, t. III, p. 200).

I. — *La transformation par droites symétriques.*

1. On joint les sommets A, B, C d'un triangle de référence (*fig.* 1) à un point quelconque O du plan de ce triangle par les droites AO, BO, CO et l'on construit les droites AA′, BB′, CC′ situées symé-

Fig. 1.



triquement à AO, BO, CO par rapport aux bissectrices des angles A, B, C du triangle. Ces droites AA′, BB′, CC′ passent par un même point O′, car l'équation

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(A-\alpha)}\,\frac{\sin\beta}{\sin(B-\beta)}\,\frac{\sin\gamma}{\sin(C-\gamma)}=1,$$

qui est vérifiée, parce que les droites AO, BO, CO passent par un même point, indique en même temps que les droites AA′, BB′, CC′ concourent en un même point.

(¹) A l'occasion de la solution d'une question d'équilibre, l'équilibre d'un triangle donné, dont les sommets s'appuient sur les faces d'un angle trièdre donné, M. F.-J. van den Berg, professeur à Delft, a trouvé, principalement par l'analyse, en se servant des coordonnées trilinéaires, quelques-uns des théorèmes suivants : les théorèmes des articles 1, 4, 6, 14, 29 et 30. Ils m'ont engagé à étudier la même matière au moyen de la théorie des transformations birationnelles.

2. Les points O et O′ forment une transformation birationnelle, parce qu'à un point quelconque O du plan correspond un point déterminé O′, et réciproquement; de plus, cette transformation est une transformation birationnelle en involution, parce que les points O et O′ se correspondent doublement, c'est-à-dire que le point O′ se place en O quand on a mis le point O en O′.

Les points O et O′ pouvant être les deux foyers d'une conique qui touche les côtés du triangle ABC, la correspondance est celle qui existe entre les deux foyers de toutes les coniques qui touchent ces trois droites [1].

3. Chaque point d'un des côtés du triangle ABC correspondant au sommet opposé, ce côté tout entier doit correspondre au sommet opposé. Les sommets du triangle de référence sont donc des points fondamentaux simples de la transformation et les côtés opposés en sont les courbes fondamentales.

On voit sans peine que les trois points A, B, C sont les seuls points fondamentaux, parce qu'à chaque autre point du plan correspond un point déterminé.

4. A une droite AO passant par un des trois points fondamentaux que nous venons de trouver, correspond évidemment une droite AO′ passant par le même point fondamental. D'où l'on déduit que la courbe qui correspond à une droite quelconque est une conique passant par les sommets du triangle ABC et que le réseau des coniques passant par A, B, C correspond au réseau des droites du plan.

---

[1] La théorie des coniques présente encore bien d'autres transformations birationnelles. Je n'en cite que deux exemples, qui forment des transformations birationnelles tangentielles en involution, la correspondance des deux axes d'une conique qui passe par trois points fixes ou qui touche trois droites fixes.

Dans les deux cas cités, la transformation a une droite fondamentale triple, la droite l_∞ située tout entière à l'infini, et six droites fondamentales simples qui sont : dans le premier cas, les trois perpendiculaires aux côtés du triangle formé par les trois points aux points milieux de ces côtés et les trois droites qui joignent ces points milieux entre eux ; dans le second cas, les six bissectrices des trois angles du triangle formé par les trois tangentes.

Dans les deux cas, l'enveloppe correspondant à un point quelconque est de la quatrième classe, etc.

Plus directement on trouve le dernier résultat de la manière suivante. Quand le point O parcourt une droite quelconque l, les faisceaux de rayons [1] AO et BO sont perspectifs; donc les faisceaux des rayons symétriques AO′ et BO′ sont projectifs. L'ensemble des points d'intersection de leurs rayons homologues, c'est-à-dire le lieu des points O′ qui correspondent aux points O de la droite quelconque l, est donc une conique qui passe par les points A et B. Mais si, dans les raisonnements, on remplace un des deux faisceaux AO et BO par le faisceau CO, on trouve que cette conique passe de même par le point C; donc, la conique qui correspond à une droite quelconque l passe par les trois points fondamentaux A, B, C.

En particulier, on trouve que le cercle circonscrit au triangle ABC correspond à la droite l_∞ du plan qui se trouve tout entière à l'infini, car, les faisceaux de rayons AO et BO des points O de l_∞ étant congruents, les faisceaux des rayons symétriques AO′ et BO′ le sont aussi, etc. Eu égard à la fin de l'article 2, ce cas particulier démontre un théorème connu : *Le lieu des foyers des paraboles qui touchent trois droites données est le cercle circonscrit au triangle formé par ces droites.*

5. Il y a quatre points et six droites qui coincident avec leurs éléments correspondants. Les points, ce sont le centre du cercle inscrit et les centres des cercles exinscrits au triangle ABC; les droites, ce sont les six droites qui passent par deux de ces quatre points, les six bissectrices des angles du triangle ABC. J'indique les points par M, M_a, M_b, M_c et les droites par A_+, A_-, B_+, B_-, C_+, C_-, le signe + représentant la bissectrice d'un angle même du triangle, le signe — représentant la bissectrice d'un angle adjacent.

Eu égard à la fin de l'article 2, les résultats de cet article-ci sont bien évidents.

6. La courbe correspondante d'une conique C^2, qui passe par deux des trois points fondamentaux, A et B par exemple, est

(1) Par rapport à la terminologie, j'ai suivi M. O. Chemin dans sa traduction du travail excellent de M. Th. Reye, *Leçons sur la Géométrie de position.*

encore une conique par ces deux points. Car à une conique quelconque correspond une courbe quartique, dont A, B, C sont des points doubles. Et quand la conique passe par A et B, la courbe correspondante se compose d'une partie accessoire, les droites BC et CA qui correspondent aux points A et B, et d'une partie essentielle, une conique qui passe par A et B.

Quand la conique C^2 par A et B contient encore deux des points M, qui ne sont pas en ligne droite avec A et B, c'est-à-dire M et M_c ou M_a et M_b, elle coïncide avec sa conique correspondante. Car le faisceau des coniques qui passent par A, B, M, M_c coupe la droite $M_a M_b$ ou C_- suivant une involution, qui ne diffère guère de l'involution des points correspondants de cette droite, puisque ces deux involutions ont les mêmes points doubles, les points M_a et M_b. D'où il s'ensuit que les deux coniques doivent coïncider, parce qu'elles passent par les mêmes six points, les quatre points A, B, M, M_c et les deux points d'intersection de C^2 avec C_-. Le centre de l'involution des points correspondants sur cette conique C^2 est situé sur la droite C_-, parce que les deux points d'intersection de C^2 avec C_- correspondent l'un à l'autre. La droite C_- est donc le lieu des centres d'involution des points correspondants de toutes les coniques C^2 du faisceau, déterminé par les points de base A, B, M, M_c. Ce qui se démontre de la même manière de chacune des six droites A_+, A_-, etc., par rapport à un faisceau déterminé de coniques.

7. Au faisceau de rayons l, dont un des points M est le centre, correspond le faisceau de coniques C^2, dont A, B, C et le point M en question sont les points de base. Les tangentes à ces coniques au point M forment un faisceau de rayons l', qui est projectif au faisceau de rayons l. Mais ces deux faisceaux projectifs coïncident, parce qu'ils ont trois éléments correspondants communs, les droites MA, MB, MC. Donc, chaque courbe qui passe par un des points M est touché en ce point par sa courbe correspondante. Et quand un des points M est un point multiple d'une courbe C^n, ce point se trouve avec le même degré de multiplicité sur la courbe correspondante, tandis que les tangentes aux deux courbes en ce point coïncident.

On retrouve donc le résultat de l'article précédent, que chaque

conique qui passe par A, B, M et M_ρ correspond à elle-même. Car les deux coniques ont communs les quatre points A, B, M, M_ρ et les tangentes en M et M_ρ. Réciproquement, l'article précédent aurait pu conduire au résultat que nous venons de trouver.

8. Chaque droite contient deux points qui correspondent l'un à l'autre, les points d'intersection de cette droite et sa conique correspondante. En particulier la droite l_∞ coupe le cercle circonscrit au triangle ABC en deux points correspondant l'un à l'autre. D'où l'on déduit qu'à chaque cercle qui passe par deux des trois points A, B, C correspond encore un cercle passant par ces deux points.

Comme on le voit sans peine, le précédent contient la solution de la question suivante : *Déterminer les foyers d'une conique, qui touche trois droites données et dont un des axes est donné en position.*

9. Le lieu des points correspondants, qui sont en ligne droite avec un point donné P, est une courbe du troisième ordre D^3, qui correspond à elle-même. Car cette courbe passant une fois par P, chaque droite par P en contient le point P et les deux points d'intersection de la droite avec sa conique correspondante. En P la courbe est touchée par la droite qui joint le point P à son point correspondant P'; elle passe par les points A, B, C (parce que le point d'intersection de PA avec BC correspond au point A, etc.) et par les quatre points M.

La courbe D^3 est encore l'ensemble des points d'intersection des courbes homologues de deux faisceaux projectifs, dont l'un est le faisceau de rayons ayant P pour centre et l'autre le faisceau des coniques correspondantes ayant les points A, B, C et P' pour base. D'où l'on déduit d'une manière non moins simple les propriétés du lieu.

D'un autre côté, chaque courbe du troisième ordre qui passe par A, B, C et les quatre points M ne peut différer de sa courbe correspondante, parce que ces deux courbes ont au moins onze points communs, les trois points A, B, C et les quatre points M où elles se touchent. Le réseau des courbes D^3 qui passent par les sept points (les points A, B, C et les points M) est donc projectif au réseau des points P du plan.

Autrefois j'ai étudié en général la correspondance entre les deux points de base mobiles d'un faisceau de courbes planes du troisième ordre ayant sept points de base fixes (Association française, congrès de Montpellier, *Annuaire* de 1879, p. 194-206). De cette correspondance la transformation par droites symétriques forme un cas très particulier (voir *loc. cit.*, p. 100, *fig.* 15, colonne 2, case du milieu, où les trois points 1 correspondent aux points A, B, C, tandis que les quatre points sans chiffre correspondent aux points M).

10. L'indication de courbes L^n d'un ordre plus élevé n, qui coïncident avec leurs courbes correspondantes L', n'offre en général plus de difficulté. On n'a qu'à observer que :

1° La courbe L' doit s'accorder à la courbe L^n en ordre (à cette fin on doit faire passer L^n une ou plusieurs fois par les points A, B, C);

2° Le nombre des conditions simples équivalent à celles qui expriment que la courbe L^n passe par les points simples et multiples assignés ne doit pas surpasser $\frac{n(n+3)}{2}$;

3° Les points simples et multiples qui déterminent L^n doivent être choisis de manière qu'ils ne déterminent qu'une seule courbe L^n de l'ordre désiré;

4° Le nombre des points communs à L^n et sa courbe correspondante doit surpasser n^2.

Ainsi l'on trouve les courbes suivantes :

(a) Chaque courbe E^4 (du quatrième ordre) qui passe deux fois par A et M et une fois par B, C, M_b, M_c et deux points correspondants O et O'. J'indique ces courbes par le symbole

$$4(A^2BC,\ M^2M_bM_c,\ OO');$$

(b) Chaque courbe F^5 caractérisée par

$$5(A^2B^2C,\ M^2M_a^2M_b^2M_c,\ OO');$$

(c) Chaque courbe G^6 avec le symbole

$$6(A^2B^2C^2,\ M^2M_a^2M_b^2M_c^2,\ OO'),\ \ldots.$$

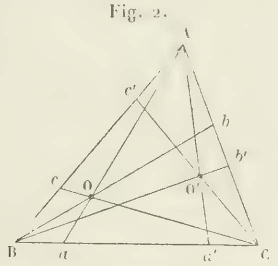
J'observe encore qu'on peut remplacer les deux points O et O' par les points où chaque cercle est coupé par la droite l (pour

obtenir comme cas particuliers des courbes circulaires, des quartiques, des quintiques, des sextiques circulaires, qui coïncident avec leurs courbes correspondantes.

Il va sans dire que les droites qui joignent les points correspondants des courbes E^4, F^5, G^6 ne passent pas par un même point comme dans le cas des courbes D^3, mais qu'elles enveloppent des courbes nouvelles.

11. Pour la construction des droites symétriques, on a renversé dans chaque angle du triangle ABC les deux parties α et $A-\alpha$, β et $B-\beta$, γ et $C-\gamma$ déterminées par les droites AO, BO, CO. Si, au lieu de renverser ces parties des angles, on renverse les segments déterminés par les prolongements de AO, BO, CO sur les côtés opposés, on trouve encore trois droites passant par un même point O'.

Fig. 2.



Car le théorème du marquis de Céva donne par rapport aux droites Aa, Bb, Cc (*fig.* 2), qui passent par un point O, l'équation

$$\frac{Ab}{bC}\,\frac{Bc}{cA}\,\frac{Ca}{aB}=1,$$

qui dans la forme

$$\frac{b'C}{Ab'}\,\frac{c'A}{Bc'}\,\frac{a'B}{Ca'}=1$$

exprime que les droites Aa', Bb', Cc' passent par un même point O'. Ainsi l'on trouve encore une transformation birationnelle en involution. Parce qu'il y a une grande analogie entre cette transformation nouvelle et celle par droites symétriques, j'indiquerai seulement les différences entre les deux transformations.

12. La démonstration directe de l'article 4 doit subir un petit changement de nomenclature. De plus, à la droite l, correspond.

au lieu du cercle circonscrit au triangle ABC, une ellipse qui touche en A, B, C les droites menées par ces points parallèlement aux côtés opposés BC, CA, AB. Seulement, si le triangle de référence ABC est équilatère, cette ellipse est encore un cercle. Mais dans ce cas les deux transformations sont identiques.

Quand la droite l_x correspond à une ellipse, les points où cette droite est coupée par un cercle quelconque ne correspondent plus l'un à l'autre; à un cercle par A et B ne correspond donc plus un cercle, etc. De plus, les points M qui correspondent à eux-mêmes sont, dans la nouvelle transformation, le centre de gravité du triangle ABC et les trois points d'intersection des droites par A, B, C parallèles aux côtés opposés, etc.

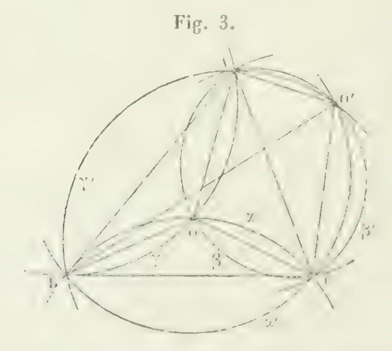
13. Une combinaison des deux constructions, le renversement des parties des angles et le renversement des segments sur les côtés du triangle, conduit encore à une transformation qui présente beaucoup d'analogie avec celles que nous avons étudiées. A la droite l_x correspond une autre ellipse et les points M y ont une autre signification, etc.

Les transformations considérées ne sont toutes que des cas particuliers de la transformation quadratique générale où les trois points simples A, B, C sont les seuls points fondamentaux.

II. — *La transformation par cercles symétriques.*

14. Si trois cercles α, β, γ (*fig.* 3) décrits sur les côtés d'un

Fig. 3.



triangle ABC comme cordes ont un point commun O et que l'on fasse subir à chaque cercle une demi-révolution autour de la corde

sur laquelle il a été décrit, on obtient trois cercles α', β', γ' symétriques aux premiers par rapport aux côtés du triangle; ces cercles passent encore par un même point O′.

Si l'on représente par a, b, c les angles BOC, COA, AOB contenus dans les cercles α, β, γ par rapport aux côtés du triangle, on a

$$a + b + c = 360^\circ,$$

parce que les trois cercles α, β, γ passent par un même point O. Mais, sous la forme

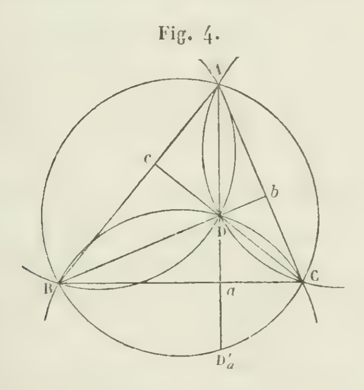
$$b = (180^\circ - a) + (180^\circ - c),$$

cette équation exprime également que le point d'intersection O′ des cercles α' et γ' se trouve aussi sur β', etc.

15. Les points O et O′ forment une transformation birationnelle en involution.

16. A chacun des points A, B, C correspond un cercle, le cercle qu'on obtient en faisant subir au cercle circonscrit au triangle ABC une demi-révolution autour du côté opposé du triangle. Ces cercles passent par un même point D (*fig.* 4), le point d'intersection des

Fig. 4.



trois hauteurs du triangle; car, dans le cercle circonscrit et dans le triangle, on a

$$Ba.aC = Aa.aD'_a$$
$$Ba.aC = Aa.Da;$$

ce qui prouve que les deux segments aD'_a et Da sont égaux et que

le cercle symétrique au cercle circonscrit par rapport à BC passe par D, etc. Mais ce raisonnement prouve en même temps que les cercles symétriques à BCD par rapport à BC, à CAD par rapport à CA et à ABD par rapport à AB, coïncident avec le cercle circonscrit au triangle, c'est-à-dire que ce cercle circonscrit tout entier correspond au seul point D. Les quatre points A, B, C, D sont donc des points fondamentaux doubles, ayant des cercles pour courbes fondamentales.

17. Les points d'intersection de deux courbes fondamentales ne pouvant être que des points fondamentaux, les points circulaires à l'infini ω et ω_1 sont deux points fondamentaux imaginaires, dont le degré de multiplicité sera indiqué plus loin.

18. Si le point O s'est éloigné infiniment dans une direction donnée, le point O' se trouve aussi à l'infini, mais au premier abord la direction de ce dernier point n'est pas évidente.

19. Les trois côtés du triangle correspondent à eux-mêmes. Sur chacune de ces droites les points correspondants forment une involution, dont un des points doubles est situé à l'infini (suivant l'article précédent), une involution hyperbolique équilatère, dont l'autre point double, le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet opposé sur le côté en question, est le milieu des segments formés sur la droite par les points correspondants.

20. Quand à chaque point de la droite l_∞ correspond un point bien déterminé (de cette même droite), ce qui est la seule supposition admissible, la transformation birationnelle ne connaissant pas un lieu de points fondamentaux, chaque point de l_∞ doit coïncider avec son point correspondant; car ces points déterminent sur cette droite une involution avec trois points doubles, les points d'intersection de l_∞ avec les côtés du triangle, etc.

21. Les points A, B, C, D, ω, ω_1 sont les seuls points fondamentaux de la transformation.

22. La courbe correspondante d'une droite quelconque l est une

courbe C^5 dont les points A, B, C, D sont des points doubles. Elle passe un nombre de fois encore indéterminé par ω et ω_1 et a une asymptote parallèle à l.

La courbe a des points doubles aux points A, B, C, D, ces points étant des points doubles de la transformation. Elle est du cinquième ordre, parce qu'elle est coupée par un côté AB du triangle en cinq points, les deux points doubles A, B et le point O' correspondant au point d'intersection O de l et AB.

23. Les points ω et ω_1 sont des points fondamentaux doubles de la transformation et des points doubles de chaque courbe C^5 (qui est donc une quintique bicirculaire); car deux courbes C^5 ne se coupent en dehors du point O', correspondant au point d'intersection O des droites correspondantes, qu'en des points fondamentaux; et les quatre points doubles communs A, B, C, D équivalent à seize points simples communs, les deux points communs ω et ω_1 équivalant à huit points simples communs, résultat qui n'est d'accord qu'autant que ω et ω_1 sont des points doubles de chaque courbe C^5, etc.

24. La transformation en question admet donc six points fondamentaux doubles, les points A, B, C, D, ω, ω_1. La courbe fondamentale de chacun des quatre points réels est la conique passant par les cinq autres points; la courbe fondamentale d'un des points ω, ω_1 est la conique passant par le point même et par les quatre points réels.

25. La courbe correspondante d'une droite l par un des points A, B, C, D, ω, ω_1 est une courbe C^3, qui passe deux fois par le point fondamental sur l et une fois par les autres points fondamentaux; et chaque droite qui joint deux des points fondamentaux correspond à elle-même.

26. Les points correspondants forment sur chacune des droites AD, BD, CD, qui correspondent à elles-mêmes, une involution hyperbolique équilatère; de ces involutions les points a, b, c (*fig.* 4) sont les points doubles non situés sur l_∞. Donc les six côtés du quadrangle complet ABCD correspondent à eux-mêmes et contiennent des involutions hyperboliques équilatères ayant pour

point double le point d'intersection du côté en question avec le côté opposé.

27. La courbe correspondante d'une conique qui passe par quatre des six points fondamentaux est encore une conique : car la courbe C^{10}, qui correspond à une conique quelconque, se compose, quand la conique passe par quatre points fondamentaux, d'une partie accessoire, les quatre courbes fondamentales de ces quatre points, et d'une partie essentielle, une conique. En général, cette conique correspondante passe par les mêmes points fondamentaux que la conique donnée ; seulement quand celle-ci contient ω sans ω_1, celle-là contient ω_1 sans ω.

28. A chaque cercle passant par deux des quatre points A, B, C, D correspond donc encore un cercle par ces mêmes points. Ce théorème, évident pour les combinaisons BC, CA, AB, est nouveau pour les combinaisons AD, BD, CD ; et l'on voit sans peine que ces cercles correspondants sont symétriques l'un à l'autre par rapport aux droites AD, BD, CD, car deux cercles correspondants par C et D coupent AB en deux couples de points correspondants dont c est le point milieu, etc. On retrouve donc la même transformation, quand on remplace le triangle de référence ABC par un des triangles BCD, CAD, ABD : ce que l'on ne peut pas encore déduire du seul fait que chaque sommet du quadrangle ABCD est le point de rencontre des hauteurs dans le triangle formé par les trois autres sommets.

De plus, au lieu des trois groupes symétriques de cercles BC, CA, AB, on peut se servir des trois groupes symétriques de cercles décrits sur AB, BD, CD, pour déterminer la correspondance en question ; ce qui nous sera utile au Chapitre suivant.

Toutefois la correspondance est déjà déterminée par deux quelconques des six groupes de cercles symétriques.

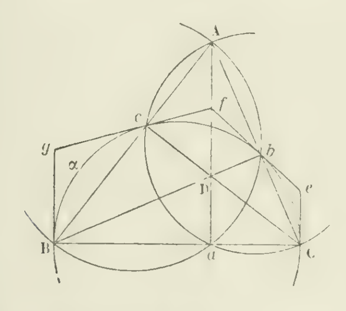
29. A chaque conique passant par A, B, C, D (et, comme on sait, cette conique est toujours une hyperbole équilatère), correspond encore une hyperbole équilatère qui contient les mêmes points fondamentaux. Mais ces courbes coïncident, parce qu'elles ont six points communs, les quatre points A, B, C, D et deux points sur l_∞.

30. Les droites qui lient les points correspondants d'une hyperbole équilatère par A, B, C, D passent par le centre de cette courbe. Car ces droites passent par un point, parce que les points correspondants forment une involution sur la courbe, et ce centre d'involution doit coïncider avec le centre de figure de la courbe, parce qu'il doit se trouver sur les deux asymptotes, eu égard à l'article 20.

31. Le lieu des centres d'involution, c'est-à-dire des centres de figure des hyperboles équilatères passant par les points A, B, C, D, c'est le cercle circonscrit au triangle *abc*, le cercle des neuf points par rapport au triangle de référence ABC; car le point correspondant à D sur une de ces hyperboles, c'est le quatrième point d'intersection de l'hyperbole avec le cercle circonscrit au triangle ABC, et l'on voit sans peine que le lieu des points milieux des rayons vecteurs du cercle circonscrit au triangle ABC par rapport au point D comme pôle est le cercle des neuf points du triangle ABC, le milieu du rayon vecteur DD'_a (*fig.* 4) étant le point *a*, etc.

32. De plus, les cercles décrits sur les côtés du triangle ABC comme diamètre correspondent à eux-mêmes, chacun de ces cercles étant symétrique à soi-même par rapport au côté corres-

Fig. 5.



pondant du triangle. Et l'article 28 montre que la même propriété convient aux cercles décrits sur AD, BD, CD comme diamètre.

Dans chacun des cercles décrits sur un des côtés du quadrangle complet ABCD comme diamètre, le centre d'involution des points

correspondants est le point milieu du côté opposé; car sur le cercle α, décrit sur BC comme diamètre, les points b et c sont les points doubles de l'involution (*fig.* 5) et les tangentes en ces points au cercle α se coupent au point milieu de AD. Car le triangle Cbe formé par la corde Cb de α et les deux tangentes à α aux deux extrémités de cette corde étant isoscèle, le triangle semblable Abf est aussi isoscèle, etc.; ce qui montre que les tangentes en b et c au cercle α s'intersectent en un point f de AD situé à égale distance de A, b, c. Mais le cercle passant par A, b, c passe aussi par D; donc f est le point milieu de AD.

33. Cherchons les courbes d'un ordre plus élevé qui correspondent à elles-mêmes.

La courbe qui correspond à une courbe du troisième ordre passant par les six points fondamentaux est encore une courbe du troisième ordre par ces points; car, dans ce cas, la courbe C^{15} avec six points sextuples se compose des six coniques fondamentales et d'une courbe du troisième ordre passant par les points fondamentaux.

Les courbes D^3 symbolisées par $3(ABCD\omega\omega_1, abc)$ correspondent à elles-mêmes; car les deux courbes correspondantes ont dix points communs, les neuf points indiqués et le troisième point d'intersection des deux courbes avec l_∞. Au premier abord il peut sembler paradoxal qu'on parle d'une pluralité de courbes D^3 passant par neuf points donnés, tandis que neuf points quelconques déterminent une courbe unique du troisième ordre. Mais les neuf points entre parenthèses dans le symbole donné peuvent être les neuf points de base d'un faisceau de courbes du troisième ordre; car on démontre sans peine que les courbes $3(ABCD\omega\omega_1, a, OO')$ passent en même temps par b et c, parce que la supposition contraire mène à l'un des deux résultats absurdes suivants : ou que cette courbe contient les points d'intersection de l_∞ avec AB, AC, BD et CD, ou qu'elle coupe encore un de ces côtés en deux points correspondants. On voit donc qu'il y a une infinité de courbes du troisième ordre passant par les six points fondamentaux et les trois points a, b, c; mais que cette infinité ne saurait être qu'un faisceau, toutes les courbes passant par neuf points fixes.

Les courbes E^4 avec le symbole $4(A^3BCD\omega\omega_1, OO')$ coïncident avec leurs courbes correspondantes; car la courbe correspondante est une courbe de la même nature et les deux courbes ont dix-huit points communs, neuf au point A, cinq aux autres points fondamentaux, les deux points O et O′ et deux points sur l_∞, etc.

Nous trouverons plus loin des courbes du cinquième ordre, qui correspondent à elles-mêmes.

34. Chaque droite l contient deux couples de points correspondants, car elle coupe sa courbe correspondante C^5 en dehors de l_∞ en quatre points.

35. Les points correspondants qui sont en ligne droite avec un point donné P se trouvent sur une courbe F^5 par P qui touche en ce point la droite PP′; car chaque droite par P coupe cette courbe au point P et aux quatre points indiqués dans l'article précédent. Les points A, B, C, D sont des points doubles de la courbe (car la droite PA coupe deux fois la courbe fondamentale de A, le cercle BCD). Elle passe une fois par les points a, b, c, ω, ω_1 et touche la droite l_∞ en ω et ω_1.

Il va sans dire que les courbes F^5 coïncident avec leurs courbes correspondantes. Leur symbole est $5(A^2B^2C^2D\,\omega\omega_1, abc)$ et elles forment un réseau correspondant au réseau des points P.

36. La courbe F^5, dont le point P se trouve sur le cercle des neuf points du triangle ABC (le cercle abc), se compose de deux parties; car elle doit contenir l'hyperbole équilatère par A, B, C, D et P, et, par suite, encore une courbe du troisième ordre par les six points fondamentaux et par a, b, c. Cette courbe du troisième ordre est une des courbes D^3 trouvées plus haut.

La courbe F^5, dont le point P est le point milieu d'un des six côtés du quadrangle complet ABCD, se compose de trois parties, une hyperbole équilatère, un cercle et une droite.

37. Les droites qui lient entre eux les points correspondants situés sur une courbe D^3 passent par un même point de cette courbe, le sixième point d'intersection de la courbe avec le cercle

abc. Ce théorème est une conséquence immédiate de l'article précédent; car les courbes D^3 qui font partie d'une courbe F^5 se présentent en nombre infini, chaque point du cercle *abc* donnant lieu à une de ces courbes, ce qui prouve qu'elles forment un faisceau ayant les mêmes points de base que le faisceau trouvé à l'article 33.

Mais le théorème en question peut être démontré d'une manière plus directe; car les points correspondants d'une des courbes D^3 de l'article 33 sont les points d'intersection mobiles de D^3 avec une hyperbole équilatère par A, B, C, D (cette hyperbole correspondant aussi à elle-même); et la génération d'une courbe du troisième ordre au moyen de deux faisceaux projectifs, un faisceau de rayons et un faisceau de coniques, apprend par inversion du raisonnement que les droites en question passent par un point fixe de la courbe D^3, le point opposé (*punto opposto*) du quadrangle ABCD par rapport à la courbe D^3.

Les points correspondants d'une courbe E^4 sont bien les points d'intersection mobiles de cette courbe avec une hyperbole équilatère par A, B, C, D; mais les droites qui lient les points correspondants de E^4 enveloppent une courbe au lieu de passer par un point fixe.

Quand on représente les points d'intersection d'une droite quelconque l avec le cercle *abc* par r et s, on trouve qu'un des deux couples de points correspondants situés sur l appartient à l'hyperbole équilatère de r et à la courbe D^3 de s, tandis que l'autre couple fait partie de l'hyperbole équilatère de s et de la courbe D^3 de r; et réciproquement, les deux points d'intersection mobiles d'une hyperbole équilatère par A, B, C, D et d'une des courbes D^3 se trouvent sur la droite qui joint les deux centres d'involution de ces deux courbes.

38. Au moyen des hyperboles équilatères, des courbes D^3, E^4, F^5, nous trouverions sans peine des courbes d'un ordre plus élevé qui correspondent à elles-mêmes. Mais cet examen ne jouissant pas de cette simplicité qui a caractérisé les résultats obtenus, je passe à un autre sujet. (*A suivre.*)

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

HERMITE (C.). — COURS PROFESSÉ PENDANT LE 2e SEMESTRE DE L'ANNÉE 1881-1882, rédigé par M. ANDOYER, élève de l'École Normale supérieure. — Paris, 1882. Hermann, libraire, rue de la Sorbonne, 1 vol. in-4°, 202 p. lith.

M. Hermite a rendu un grand service à ceux qui étudient les Mathématiques en autorisant la publication du Cours qu'il professe avec tant d'éclat à la Faculté des Sciences de Paris.

Ce n'est pas sans étonnement qu'on trouvera, dans les *vingt-cinq* Leçons que comporte ce Cours, tant de matières touchées ou approfondies; il convient, avant d'en faire l'énumération, de rappeler la nature de l'enseignement donné par M. Hermite.

Le programme de la licence ès sciences mathématiques est, chaque année, entièrement développé à la Faculté des Sciences de Paris : cinq professeurs, deux maîtres de conférences suffisent à cette tâche. Deux chaires sont, en fait, consacrées à l'enseignement du Calcul différentiel et intégral; M. Bouquet occupe l'une pendant deux semestres, M. Hermite occupe l'autre pendant un seul semestre. Leur enseignement est strictement élémentaire et ne dépasse pas les limites du programme de la licence; mais on jugera qu'il ne peut être complet et au courant de la Science que grâce au rare talent et aux efforts extraordinaires de ceux qui le donnent, si l'on veut bien penser à l'étendue du programme et au développement considérable que les découvertes récentes ont donné à quelques-uns de ses Chapitres.

M. Hermite s'est chargé d'enseigner ce qui concerne les applications du Calcul intégral à la quadrature et à la rectification des courbes, à l'évaluation des aires des surfaces courbes et des volumes; la théorie générale des fonctions d'une variable imaginaire; l'application de cette théorie à l'étude des intégrales eulériennes et des fonctions elliptiques.

Cinq Leçons sont consacrées à la partie géométrique; les applications sont naturellement choisies en vue de ce qui suivra; ainsi la rectification des coniques, ou la quadrature des cubiques planes con-

duisent à la considération des intégrales de la forme $\int f(x,y)\,dx$, où $f(x,y)$ est une fonction rationnelle de x et de y, et où y est la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré en x : c'est, pour le professeur, l'occasion d'exposer, d'après Legendre, la réduction des intégrales de cette espèce aux intégrales elliptiques, d'indiquer quelques-uns des résultats si simples obtenus à ce propos par M. Tchebychef, de signaler enfin quelques cas de réduction d'intégrales elliptiques à des fonctions algébrico-logarithmiques ([1]). Dans la même partie de son Cours, M. Hermite trouve l'occasion de préparer l'introduction des intégrales prises entre des limites imaginaires en considérant des intégrales de la forme $\int_{t_0}^{t_1} f(x,y)\,dt$, où x et y sont des fonctions réelles de la variable réelle t.

Trois Leçons sont ensuite employées à l'exposition des propriétés les plus simples des fonctions d'une variable imaginaire, à la définition des intégrales prises entre des limites imaginaires, à la démonstration du théorème fondamental de Cauchy relatif à ces intégrales. Dans ces Leçons et celles qui suivent, M. Hermite tire le plus grand parti de l'expression simple donnée par M. Darboux dans le *Journal de M. Resal* ([2]) pour les intégrales de la forme $\int_a^b f(x)\,F(x)\,dx$, où $f(x)$ est une fonction continue de la forme $\varphi(x)+i\psi(x)$ de la variable réelle x, où a et b sont des quantités réelles, où $f(x)$ enfin est une fonction constamment positive entre les limites de l'intégration ; il signale une autre expression des intégrales de cette nature due à M. Weierstrass. La méthode suivie pour établir le théorème de Cauchy est celle que M. Carl Neumann a développée au début de ses Leçons sur les intégrales abéliennes. Dans les quatre Leçons qui suivent, M. Hermite expose les conséquences immédiates du théorème de Cauchy et les principes, dus à M. Weierstrass et à M. Mittag-Leffler, de la théorie des fonctions uniformes ; il y donne la décom-

(1) Voir *Sur une formule d'Euler* (*Journal de M. Resal*, t. VI, p. 5); *Bulletin*, 2e série, t. IV, IIe Partie, p. 267, et t. III, Ire Partie, p. 226.

(2) *Sur les développements en série des fonctions d'une variable*. IIIe Série, t. II, p. 291. — Voir *Bulletin*, 2e série, t. I, IIe Partie, p. 333.

position d'une fonction transcendante entière en facteurs primaires et l'expression générale des fonctions uniformes admettant un nombre infini de points singuliers, isolés, essentiels ou non, dont l'ensemble admet le point ∞ pour limite unique, expression donnée par MM. Mittag-Leffler dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* pour l'année 1882. La marche suivie par M. Hermite est celle qu'il a ouverte dans sa lettre au géomètre suédois (¹), insérée dans le tome XII des *Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*. Dans cette lettre, à la vérité, le théorème de M. Mittag-Leffler n'est établi que dans le cas où tous les points singuliers sont des pôles; mais la même méthode conduit au théorème général.

Le professeur s'arrête ensuite un peu (Leçons XIII, XIV et XV) sur les intégrales eulériennes : la forme donnée par M. Weierstrass à la fonction $\frac{1}{\Gamma(x)}$, celle que M. Prym a obtenue pour la fonction $\Gamma(x)$ elle-même, fournissent des applications immédiates des résultats établis dans les Leçons précédentes; outre les propriétés élémentaires de la fonction $\Gamma(x)$, déduites de la considération de la série qui représente la dérivée seconde de $\log\Gamma(x)$, M. Hermite démontre la formule de Laplace, relative au calcul approché de $\Gamma(x)$, quand x est un nombre entier très grand.

Dans les deux Leçons qui suivent, il développe, comme dans la lettre déjà citée à M. Mittag-Leffler, cette idée si simple et si naturelle que la notion de coupure et ce genre spécial de discontinuité auquel elle correspond s'offrent d'eux-mêmes, au début du Calcul intégral, dans la considération d'une intégrale définie où figure un paramètre variable.

Le théorème de Cauchy sur le nombre de racines d'un polynôme contenues à l'intérieur d'un contour, l'établissement de la série de Lagrange, quelques indications sur la nature des séries qui proviennent de la résolution par rapport à y d'une équation algébrique entre y et x, en particulier la démonstration du célèbre théorème d'Eisenstein à ce sujet et l'énoncé de la curieuse proposition de M. Tchebychef sur les séries à coefficients rationnels qui peuvent représenter des fonctions composées de fonctions algé-

---

(¹) Voir *Bulletin*, 2e série, t. V, Ire Partie, p. 260.

briques, exponentielles et logarithmiques, sont l'objet de la XVIIIe et de la XIXe Leçon. Les deux Leçons suivantes sont consacrées à l'étude de la nature des fonctions multiformes qui proviennent de l'intégration soit de fonctions uniformes, soit de fonctions multiformes, ainsi qu'aux moyens de rendre ces fonctions uniformes par l'introduction d'un système convenable de coupures.

Enfin les éléments de la théorie des fonctions doublement périodiques sont l'objet des dernières Leçons.

Le professeur montre comment on peut construire une fonction transcendante entière satisfaisant aux équations fonctionnelles

$$\Phi(x+a) = \Phi(x),$$
$$\Phi(x+b) = e^{-\frac{ki\pi b}{a}(2x+b)}\Phi(x),$$

où k est un nombre entier; la solution trouvée est la solution la plus générale possible et permet de construire la fonction uniforme la plus générale qui admette les deux périodes a et b et qui n'ait pas d'autres points singuliers que des pôles. De cette solution se déduisent immédiatement les quatre fonctions de Jacobi, qui conduisent elles-mêmes aux fonctions sn, cn, dn. La formule de décomposition en éléments simples donne ensuite les propriétés les plus essentielles des fonctions doublement périodiques; en particulier, son application aux fonctions $k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn}(x+a)\ldots$ conduit immédiatement aux formules d'addition; enfin l'étude attentive de la marche des valeurs de la fonction $\operatorname{sn} x$, quand la variable x décrit les côtés du rectangle dont les sommets ont pour affixes les points o, K, K', K + iK', où l'on suppose les quantités K et K' réelles, conduit, de la façon la plus claire, à l'inversion de l'intégrale de première espèce

$$\xi = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

lorsqu'on suppose k réel et plus petit que l'unité. On remarquera la façon dont M. Hermite a traité le même problème dans le cas général : il prend pour point de départ les résultats obtenus par M. Fuchs (1) relativement à la façon dont va-

(1) *Die Periodicitatsmoduln der hyperelliptischen Integrale als Functionen eines Parameters aufgefasst.* (*Journal de Borchardt*, t. 57, p. 91).

rient les intégrales

$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

$$K' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}},$$

quand on fait décrire au point dont l'affixe est k^2 un contour fermé quelconque; les quantités K et iK' sont alors remplacées par les quantités $L = \alpha K + \beta iK'$, $iL' = \gamma K + \delta iK'$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des entiers assujettis à la condition $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, β et γ étant pairs, tandis que α et δ sont impairs et $\equiv 1 \pmod 4$; par la substitution des quantités L et L', aux quantités K et K', les transcendantes de Jacobi se reproduisent multipliées par des facteurs constants, les fonctions sn, cn, dn se reproduisent sans changement; enfin les quantités $\sqrt{k}$ et $\sqrt{k'}$ se reproduisent multipliées par une racine quatrième de l'unité. Ces résultats, joints à ce qui a été dit sur l'inversion de l'intégrale de première espèce quand le module est réel et plus petit que 1, et à ce fait que, au moyen des quantités K et K' définies par les intégrales rectilignes

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(a+ib)\sin^2\varphi}},$$

$$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(1-a-ib)\sin^2\varphi}},$$

on peut, la partie réelle du quotient $\frac{K'}{K}$ étant positive, construire les quatre transcendantes de Jacobi, permettent de résoudre le problème de l'inversion, quel que soit le module k.

Enfin, en terminant son Cours, M. Hermite a donné l'expression, due à M. Appell (*Comptes rendus*, 5 avril 1882), des fonctions doublement périodiques uniformes admettant des points singuliers essentiels.

Ces Leçons ont été rédigées avec le plus grand soin par M. Andoyer, élève distingué à l'École Normale supérieure. On y retrouvera cet enchaînement artistique des idées, ces rapprochements inattendus et pourtant naturels, cette clarté qui ne s'arrête pas à la surface, mais pénètre au fond du sujet, cette richesse de sou-

venirs, ce coloris et cette chaleur communicative du langage, toutes ces rares qualités dont l'ensemble émerveille les auditeurs de notre grand Géomètre.

M. Hermann s'est chargé de l'exécution matérielle, qui est fort satisfaisante. L'écriture est élégante et se lit facilement; quelques fautes devaient nécessairement se glisser dans ces feuilles, lithographiées après chaque Leçon; mais elles sont peu nombreuses et ne peuvent dérouter le lecteur. J. T.

MÉLANGES.

DEUX CAS PARTICULIERS DE LA TRANSFORMATION BIRATIONNELLE;

Par M. P.-H. SCHOUTE,

de Groningue (Hollande).

(SUITE.)

III. — *La relation entre les deux transformations.*

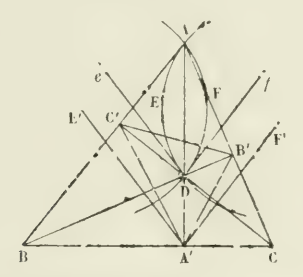
39. La transformation par cercles symétriques est déduite de la transformation par droites symétriques au moyen de la transformation par rayons vecteurs réciproques ([1]).

En effet, quand A, B, C, D (*fig.* 6) sont les points fondamentaux réels de la transformation par cercles symétriques, que le point D est le centre des rayons vecteurs réciproques et que le produit $DA.DA' = DB.DB' = DC.DC'$ représente la puissance négative des rayons vecteurs, de manière que dans cette transformation auxiliaire les points A′, B′, C′ correspondent aux points A, B, C, il est évident que les cercles DEA et DFA qui sont symétriques par rapport à DA se transforment dans les droites A′E′ et A′F′ par A′ également symétriques par rapport à DA′; car, suivant

([1]) Pour la transformation par rayons vecteurs réciproques on peut conseiller : Reye, *Leçons sur la Géometrie de position*, t. I, p. 206, ou Geiser, *Einleitung in die synthetische Geometrie*, p. 179-185.

la théorie de la transformation par rayons vecteurs réciproques, ces droites sont parallèles aux tangentes De et Df menées à ces cercles au point D et ces tangentes sont symétriques elles-mêmes par rapport à DA′. Ce qui prouve que la transformation auxiliaire fait changer la correspondance entre les points d'intersection O et O′ des trois couples de cercles symétriques décrits sur AD, BD, CD comme cordes, de l'article 28, en la correspondance entre les points d'intersection P et P′ de trois couples de droites par A′, B′, C′ symétriques par rapport aux mêmes droites A′D, B′D, C′D. Et cette dernière correspondance ne diffère dans le moindre détail de celle de la transformation par droites symétriques, dont le triangle

Fig. 6.



A′B′C′ est le triangle de référence, parce que les droites A′D, B′D, C′D sont les bissectrices des angles du triangle A′B′C′. A la vérité, les cercles fondamentaux BCD, CAD, ABD et ABC des points fondamentaux A, B, C, D de la transformation par cercles symétriques se transforment dans les droites B′C′, C′A′, A′B′ et le cercle A′B′C′ qui correspondent dans la transformation par droites symétriques aux trois points fondamentaux A′, B′, C′ et à la droite l_∞; tandis qu'on retrouve les points A′, B′, C′ et la droite l_∞, qui coïncident avec leurs éléments correspondants dans la transformation des cercles en A, B, C, D, les quatre points qui jouissent de la même propriété dans la transformation des droites.

40. D'après ce qui précède, il est évident qu'on doit pouvoir trouver le point O′ correspondant dans la transformation par cercles symétriques à un point quelconque O au moyen de la transformation par droites symétriques en passant deux fois par la transformation par rayons vecteurs réciproques. D'abord on cherche

le point P correspondant au point O dans la transformation par rayons vecteurs réciproques; ensuite on cherche le point P′ correspondant au point P dans la transformation par droites symétriques et enfin on cherche le point O′ correspondant au point P′ dans la transformation des rayons vecteurs réciproques. Ce point O′ est en même temps le point correspondant du point O dans la transformation par cercles symétriques.

Par ce détour on trouve encore que la courbe correspondante d'une droite l dans la transformation des cercles est une courbe du cinquième ordre, qui a des points doubles aux six points A, B, C, D, ω, ω_1. A la vérité, la transformation par rayons vecteurs réciproques étant elle-même une transformation birationnelle en involution qui forme un cas particulier de la transformation générale avec trois points fondamentaux simples (ici les points D, ω, ω_1) indiquée à la fin de l'article 13, la courbe des points P correspondant aux points O d'une droite l quelconque est un cercle par D (ω, ω_1). La courbe des points P′, correspondant dans la transformation par droites symétriques aux points P du cercle par D(ω, ω_1), est une courbe du quatrième ordre passant une fois par D, ω, ω_1 et deux fois par A′, B′, C′. Et la courbe des points O′, correspondant dans la transformation par rayons vecteurs réciproques aux points P′ de la courbe du quatrième ordre, est une courbe du cinquième ordre avec des points doubles aux six points A, B, C, D, ω, ω_1. Réciproquement on peut trouver la courbe des points P′, correspondant aux points P d'une droite l quelconque dans la transformation des droites, au moyen de la transformation des cercles en passant deux fois par la transformation auxiliaire; je laisse cette vérification aux lecteurs.

41. Les courbes des deux transformations considérées qui correspondent à eux-mêmes se transforment les unes dans les autres au moyen de la transformation auxiliaire. Cette vérité mène sans peine à de nouveaux résultats. D'abord les coniques passant par les points A, B, M, M_c de la transformation par droites symétriques, c'est-à-dire les coniques passant par les points A′, B′, D, C de la *fig.* 6, se transforment dans les courbes du troisième ordre qui passent une fois par A, B, ω, ω_1, C′ et deux fois par D; on trouve donc les courbes $3(ABD^2\omega\omega_1, c)$, qui correspondent à elles-mêmes

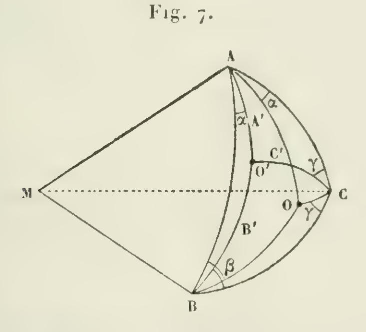
dans la transformation par cercles symétriques. D'un autre côté, les hyperboles équilatères passant par A, B, C, D dans la transformation par cercles symétriques deviennent des courbes du troisième ordre qui passent une fois par A', B', C', ω, ω_1 et deux fois par D; ces courbes sont les courbes $3(ABC, M^2, \omega\omega_1)$ dans la transformation par droites symétriques, etc.

IV. — *La transformation par plans symétriques.*

42. La transformation par droites symétriques peut être étendue à l'espace de la manière suivante :

Si dans le triangle sphérique ABC (*fig.* 7) sur la sphère dont M est le centre, on renverse dans chaque angle les parties α et $A - \alpha$, β et $B - \beta$, γ et $C - \gamma$, déterminées par les arcs AO, BO, CO,

Fig. 7.



on obtient trois arcs nouveaux AA', BB', CC', qui passent encore par un même point O'. On copie sans peine la démonstration de ce théorème de l'article 1. Eh bien, si l'angle trièdre M fait partie d'un tétraèdre irrégulier ABCD et qu'on renverse dans ce tétraèdre les parties déterminées dans les angles dièdres par les six plans qui passent par un point quelconque O et chacune des arêtes, on obtient six autres plans qui passent encore par un même point O'; car le théorème du triangle sphérique montre que ces six plans passent trois à trois par quatre droites et ces droites se coupent deux à deux sans qu'elles se trouvent toutes dans un même plan, etc.

43. Les points O et O' forment dans l'espace une transforma-

tion birationnelle en involution, que j'appelle la transformation par plans symétriques (par rapport aux plans bissecteurs des angles dièdres du tétraèdre).

44. Les sommets A, B, C, D du tétraèdre de référence sont des points fondamentaux simples de la transformation; ils ont pour surfaces fondamentales les faces opposées du tétraèdre.

45. A un plan passant par une des arêtes du tétraèdre correspond évidemment un autre plan passant par cette arête. De même à une droite quelconque passant par un des sommets du tétraèdre correspond une autre droite passant par ce sommet.

Si à un plan passant par une des arêtes AB du tétraèdre correspond un autre plan passant par la même arête, ce dernier plan n'est que la partie essentielle de la surface correspondante, qui contient en outre encore les deux plans accessoires BCD et CDA qui correspondent aux points fondamentaux A et B. A un plan quelconque correspond donc une surface F^3 du troisième ordre qui, comme je le démontrerai tout de suite, a des points doubles aux quatre points fondamentaux. Et si la surface F^3 a des points doubles aux points fondamentaux, elle est coupée par chaque arête du tétraèdre en quatre points; d'où il suit qu'elle doit contenir les six arêtes.

On démontre de la manière suivante que les points A, B, C, D sont des points doubles de la surface correspondante F^3. Si l représente la droite d'intersection d'un plan quelconque π avec la face ABC du tétraèdre et qu'on mène un plan $\overline{lD}$ par l et le sommet opposé D, il est clair que la surface correspondante du plan $\overline{lD}$ est une surface F^2 du second ordre. Parce qu'à une droite passant par D correspond une autre droite passant par ce point, cette surface F^2 doit être un cône, dont D est le sommet. D'où l'on dérive qu'à la droite l correspond l'ensemble des points du cône F^2 situés à une distance infiniment petite du sommet D (parce que la droite l se trouve dans le plan fondamental de D) et que ce cône F^2 contient les tangentes à la surface F^3 au point D, c'est-à-dire que le point D est un point double de la surface F^3 correspondant au plan π, etc.

46. La courbe correspondante d'une droite quelconque l est une courbe gauche cubique R^3 passant par les quatre sommets A, B, C, D; car un plan quelconque π coupe cette courbe en trois points, parce que sa surface correspondant F^3 est coupée en trois points par l. Ou bien, parce que les surfaces F^3, qui correspondent à deux plans quelconques passant par l, passent déjà par les six arêtes du tétraèdre, elles se coupent encore en une courbe R^3. Ou bien encore, parce que les plans BCO, CAO, ABO engendrent trois faisceaux de plans projectifs quand O décrit une droite quelconque l et que cette propriété convient aussi aux trois faisceaux des plans symétriques BCO′, CAO′, ABO′, il est clair que le lieu du point O′ est l'ensemble des points d'intersection des plans homologues de trois faisceaux de plans projectifs, c'est-à-dire une courbe gauche cubique passant par A, B, C (et D).

Quand l coupe une des arêtes du tétraèdre, la courbe correspondante est une conique passant par les deux points fondamentaux situés sur cette arête. Dans ce cas, la courbe correspondante R^3 de l se compose d'une partie accessoire qui correspond au point d'intersection de l avec l'arête, l'arête opposée, et d'une partie essentielle, la conique. On voit sans peine, en effet, que la conique peut être considérée comme la partie complémentaire de l'intersection du plan correspondant au plan par l et l'arête et de la surface F^3 correspondant à un plan quelconque passant par l, l'autre partie étant l'arête même.

Si la droite l coupe deux arêtes opposées du tétraèdre, la courbe correspondante est encore une droite qui s'appuie sur les mêmes arêtes.

Le résultat qu'à un point quelconque d'une des arêtes correspond l'arête opposée tout entière forme la clef des dégénérations de la courbe R^3. Il explique de même pourquoi chaque surface F^3, qui correspond à un plan quelconque π, contient les six arêtes, ces arêtes étant les éléments qui correspondent aux points d'intersection de π avec les arêtes opposées.

47. La transformation contient douze plans, vingt-huit droites et huit points, qui coïncident avec leurs éléments correspondants. Les plans, ce sont les douze plans bissecteurs des angles dièdres du tétraèdre. Les droites, ce sont les droites d'intersection des

plans bissecteurs, ayant mis à part les arêtes. Et les points, ce sont les points d'intersection des plans bissecteurs ayant mis à part les sommets, c'est-à-dire les centres des huit sphères qui touchent les quatre faces du tétraèdre.

Le nombre des droites qui coïncident avec leurs droites correspondantes est vingt-huit; car les arêtes figurent parmi les soixante-six droites d'intersection des douze plans bissecteurs et les soixante droites restantes, contenant trois fois les mêmes seize droites, doivent être diminuées de trente-deux. D'ailleurs ces droites sont les droites qui passent par deux des huit points qui correspondent à eux-mêmes.

Si l'on indique le centre de la sphère inscrite par M, ceux des sphères exinscrites par M_a, M_b, M_c, M_d et ceux des sphères qui se trouvent dans un des deux combles opposés par M_{ab} (ou M_{cd}), M_{ac} (ou M_{bd}), M_{ad} (ou M_{bc}), on peut distinguer cinq types différents de droites qui coïncident avec leurs droites correspondantes, dont MM_a, MM_{ab}, M_aM_b, M_aM_{ab}, $M_{ab}M_{ac}$ sont des représentants. Les droites du premier et du quatrième type se trouvant à la fois en trois des douze plans bissecteurs sont les droites qui figurent trois fois parmi les droites d'intersection de ces plans; on voit sans peine que la droite MM_a se trouve dans les plans AB_+, AC_+, AD_+ et la droite M_aM_{ab} dans les plans AB_+, BC_-, BD_- où les signe $+$ et $-$ ont la signification établie dans l'article 5.

48. La surface correspondante d'une surface G^2 du second ordre, qui passe par les quatre points fondamentaux, est encore une surface G' du second ordre passant par ces points; car la surface correspondante d'une surface quelconque du second ordre est une surface du sixième ordre qui a des points quadruples en A, B, C, D et passe donc deux fois par chaque arête du tétraèdre. Et dans le cas particulier d'une surface G^2 par les points A, B, C, D, cette surface correspondante du sixième ordre doit contenir quatre plans accessoires, les faces du tétraèdre; d'où l'on dérive que la partie essentielle complémentaire est une surface du second ordre qui passe par A, B, C, D.

Chaque surface G^2 par A, B, C, D, qui contient encore quatre des huit points M, choisis de manière qu'aucun des points A, B.

C, D n'est en ligne droite avec deux de ces quatre points, c'est-à-dire les points M_a, M_b, M_c, M_d ou les points M, M_{ab}, M_{ac} M_{ad}, correspond à elle-même; car une surface G^2 par A, B, C, D et M_a, M_b, M_c, M_d est coupée par le plan AB_+ suivant une conique par A, B, M_a, M_b, et à leur tour toutes ces coniques sont coupées par la droite MM_{ab} suivant une involution qui ne diffère guère de l'involution des points correspondants sur cette droite, ces deux involutions ayant les mèmes points doubles, les points M et M_{ab}. D'où l'on voit que les deux surfaces du second ordre par A, B, C, D et M_a, M_b, M_c, M_d, qui correspondent l'une à l'autre, sont coupées par chacune des six droites qui passent par deux des points M, M_{ab} M_{ac}, M_{ad}, aux mêmes points. Ainsi l'on a obtenu déjà vingt points communs aux deux surfaces. Et parce que ces vingt points se trouvent six à six dans les douze plans bissecteurs, ils ne peuvent être situés sur une courbe gauche du quatrième ordre, qui est la courbe d'intersection totale de deux surfaces du second ordre. Donc les deux surfaces doivent coïncider, etc.

49. A la gerbe de rayons l, dont un des points M est le centre, correspond le réseau des courbes gauches cubiques R^3, dont A, B, C, D et M sont les points de base. Les tangentes à ces courbes au point M forment une gerbe de rayons l' projective à la gerbe l; car à une droite l correspond une droite l' et aux droites l situées dans un plan π correspondent des droites l' également situées dans un plan π', le plan tangent en M à la surface correspondante F^3 de π. Mais ces deux gerbes coïncident, parce que les quatre rayons MA, MB, MC, MD correspondent à eux-mêmes. Donc, chaque courbe et chaque surface qui passent par un point M sont touchées en ce point par leur courbe et leur surface correspondantes, etc.

Ainsi l'on retrouve le résultat de l'article précédent. Chaque surface G^2 par A, B, C, D et M_a, M_b, M_c, M_d doit coïncider avec sa surface correspondante G', ces deux surfaces se touchant en quatre de ces huit points, tandis que les plans de contact sont indépendants de la position des huit points.

50. Dans chacun des douze plans bissecteurs la correspondance des points est la correspondance générale dont il était question à la fin de l'article 13; car le plan ABM coupe le tétraèdre suivant

le triangle de référence de la correspondance du plan ; mais le point M n'est centre du cercle inscrit ni centre de gravité et peut être placé en un point quelconque du triangle par une altération convenable du tétraèdre qui n'affecte pas le triangle.

51. Le lieu des droites qui passent par un point donné P et qui contiennent deux points correspondants est un cône H^3 du troisième ordre par A, B, C, D dont P est le sommet ; car un plan quelconque π par P coupe sa surface correspondante F^3 suivant une courbe du troisième ordre C^3, dont les points se correspondent deux à deux. Eh bien, les droites qui joignent un point quelconque Q de cette courbe aux couples de ses points correspondants forment un faisceau de rayon en involution ; ce qui prouve que trois de ces droites passent par le point Q, les deux rayons doubles de cette involution et la droite qui lie le point Q à son point correspondant Q'. Mais cela prouve encore que les droites en question enveloppent une courbe de la troisième classe, une courbe qui admet trois tangentes passant par P ; donc le plan π par P contient trois arêtes du cône H^3, etc.

La considération d'un plan par P et par une des arêtes du tétraèdre mène encore à l'ordre du cône ; car ce plan ne peut contenir que trois arêtes du cône, les droites qui lient P aux deux points fondamentaux de l'arête et la droite par P qui s'appuie sur l'arête et sur l'arête opposée.

Le cône H^3 peut être considéré sous un autre point de vue. On sait qu'à la gerbe de rayons par P correspond le réseau des courbes R^3, dont A, B, C, D et P' sont les points de base. Tandis qu'une droite menée au hasard par P ne coupe pas sa courbe correspondante R^3, le cône H^3 est le lieu des droites l par P qui s'appuient sur leurs courbes correspondantes en deux points correspondants.

Considérons les dégénérations du cône H^3. Quand le point P est situé dans un des plans bissecteurs, le cône se compose de ce plan et d'un cône du second degré. Quand P est situé dans deux des plans bissecteurs à la fois, ce qui arrive quand P se trouve sur une des arêtes ou sur une des droites qui correspondent à elles-mêmes du deuxième, troisième ou cinquième type, le cône se compose de trois plans, les deux plans bissecteurs et le plan par P et les deux

points M qui ne se trouvent pas dans un des deux plans bissecteurs.

Quand P se trouve en trois des plans bissecteurs, le cône se compose de ces trois plans. Et quand P se trouve en plus de trois de ces plans, c'est-à-dire quand il coïncide avec un des sommets du tétraèdre ou avec un des points M, le cône est indéterminé, parce que dans ce cas il doit contenir chaque droite passant par P.

52. Le lieu des points correspondants, qui sont en ligne droite avec un point P quelconque, est une courbe R^7, qui passe par les sommets, les points M et le point P; car chaque plan par P coupe la courbe en sept points, le point P et les trois couples de points situés sur les trois arêtes du cône H^3 de P contenues dans le plan. Cette courbe est touchée en P par la droite qui joint le point P au point correspondant P'. J'engage le lecteur à étudier les dégénérations de la courbe R^7.

53. Suivant la théorie générale de la transformation birationnelle dans l'espace, la surface qui correspond au cône H^3 du point P est une surface K^5 dont A, B, C, D et P' sont des points triples. Cette surface qui passe une fois par les arêtes du tétraèdre, par les droites $P'A$, $P'B$, $P'C$, $P'D$ et par les points M est le lieu des courbes R^3 par P' qui sont coupées en deux points par leurs droites correspondantes. Les dégénérations du cône H^3 amènent des dégénérations de la surface correspondante K^5, dont je recommande l'étude au lecteur.

54. En continuant mon sujet, j'aurais à examiner les surfaces d'un ordre plus élevé qui coïncident avec leurs surfaces correspondantes. Cependant cet examen me mènerait trop loin à présent. Je termine donc ce Chapitre avec l'observation bien simple que les courbes qui correspondent à elles-mêmes sont trouvées aussitôt qu'on a trouvé les surfaces qui jouissent de cette propriété; car la courbe d'intersection de deux surfaces qui correspondent à elles-mêmes est une courbe de la qualité désirée. Ainsi la courbe d'intersection R^4 de deux surfaces G^2 qui correspondent à elles-mêmes est une des courbes en question, etc.

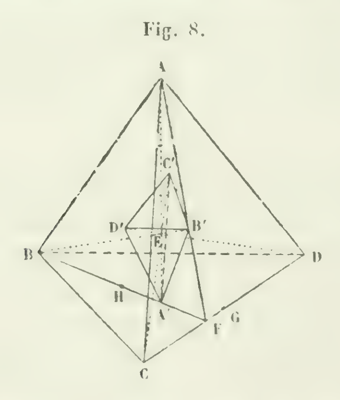
V. — *La transformation par sphères symétriques.*

55. La transformation par rayons vecteurs réciproques mène à l'extension de la transformation par cercles symétriques à l'espace.

En effet, quand ABCD (*fig.* 8) représente un tétraèdre, dont les quatre perpendiculaires AA′, BB′, CC′, DD′ abaissées des sommets sur les faces opposées ont un point E commun, les produits AE.AE′, BE.BE′, CE.CE′, DE.DE′ sont égaux. Donc, dans la transformation par rayons vecteurs réciproques, dont E est le pôle et le produit constant la puissance négative, aux points A′, B′, C′, D′ correspondent les points A, B, C, D et aux plans passant par deux des points A′, B′, C′, D′ correspondent des sphères passant par E et les deux points correspondants parmi A, B, C, D. Eu égard à l'invariabilité des angles dièdres dans la transformation auxiliaire, le théorème de l'article 4 se transforme dans le suivant, où, à ce qu'il me semble, les expressions « angle dièdre formé par deux sphères » et « sphères bissectrices de cet angle dièdre » n'auront pas besoin d'explication.

Dans un tétraèdre ABCD à perpendiculaires concourantes (dans

Fig. 8.



un point E) on construit les sphères qui passent par un point quelconque O, par E et par deux des quatre sommets A, B, C, D. Ensuite par rapport à chacune de ces sphères on construit une sphère adjointe passant par E et le même couple de sommets, de telle manière que les sphères bissectrices de l'angle dièdre formé

par ces deux sphères sont en même temps les sphères bissectrices de l'angle dièdre d'un autre couple de sphères par E et par les mêmes deux sommets, dont l'une passe par l'un et l'autre par l'autre des deux sommets restants. Les six sphères adjointes ainsi obtenues qui passent déjà par E ont encore un point O′ commun.

56. Quand le plan passant par E et deux des quatre points A, B, C, D figure comme une des deux sphères bissectrices de l'angle dièdre formé par une sphère quelconque, par E et ces deux sommets et par sa sphère adjointe, ces deux sphères sont symétriques l'une à l'autre par rapport au plan par E et les deux sommets. Démontrons que la transformation précédente ne mérite le nom de transformation par sphères symétriques que quand le tétraèdre de référence est un tétraèdre régulier.

La droite CD est perpendiculaire au plan ABE. Prolongeons le plan ABE jusqu'à ce qu'il coupe la droite CD au point F. Il y a deux cas à considérer, que le point milieu G de CD coïncide avec F, ou que ce point se trouve ailleurs. Eh bien, il va sans dire que les sphères ABEC et ABED sont symétriques l'une à l'autre par rapport au plan ABE dans le premier de ces deux cas, c'est-à-dire que la transformation par sphères adjointes est une transformation par sphères symétriques quand le tétraèdre de référence est régulier. Et, d'un autre côté, les sphères ABEC et ABED ne sauraient être symétriques l'une à l'autre par rapport au plan ABE, dans le cas contraire où F ne coïncide pas avec le point milieu G de CD; car il est impossible que la sphère ABEC coupe CD encore en un point D″ symétrique de D par rapport à F, parce que ce deuxième point d'intersection D″, qui n'est pas indiqué dans la *fig.* 8, se trouve bien au même côté que C de F, mais à une distance D″F qui est toujours le double de FD.

En effet, le deuxième point d'intersection H de BF avec la sphère ABEC est déterminé par l'équation

$$A'E.A'A = A'B.A'H,$$

tandis que dans le triangle ABF on a

$$A'E.A'A = A'B.FA';$$

ce qui donne

$$A'H = FA'.$$

On a donc encore sur les deux cordes par F l'égalité

$$2A'F.BF = CF.D''F,$$

tandis que le triangle BCD donne la relation

$$A'F.BF = CF.FD;$$

on trouve donc enfin

$$D''F = 2FD.$$

Ainsi, il est évident que, seulement dans le cas d'un tétraèdre de référence régulier, la transformation par sphères adjointes est en même temps une transformation par sphères symétriques.

57. L'ordre de la transformation par sphères symétriques se trouve par la considération de la surface correspondante d'un plan passant par E et deux des sommets, du plan ABE par exemple. La partie accessoire de cette surface se compose des surfaces fondamentales des trois points A, B, E, tandis que la partie essentielle est le plan ABE lui même. Aux points A et B correspondent les sphères BCDE et CDAE; comme nous le verrons d'abord, la surface fondamentale du point E est du sixième ordre; donc la transformation en question est du onzième ordre, c'est-à-dire que la surface correspondant à un plan quelconque est une surface F^{11}.

La surface fondamentale du point E se trouve au moyen de la transformation par rayons vecteurs réciproques. Dans cette transformation, le plan π_∞, situé tout entier à l'infini, correspond au point E. Dans la transformation par plans symétriques, la surface correspondante de π_∞ est une surface F_3; et à cette surface F_3 doit correspondre dans la transformation auxiliaire une surface F_6 qui n'abaisse pas son ordre, parce que la surface F_3 ne passe ni par le point E, ni par le cercle imaginaire situé dans le plan π_∞, qui est commun à toutes les sphères. En effet, le plan π_∞ ne passant pas par E, la surface F_3 ne saurait contenir ce point; et la surface F_3 coupe π_∞ suivant trois droites, les droites d'intersection de π_∞ avec les trois plans passant par deux des trois axes de l'octaèdre dont les sommets sont les points milieux des arêtes du tétraèdre régulier de référence.

58. Au premier abord, on peut croire qu'il soit possible de déter-

miner la transformation par sphères symétriques d'une manière plus simple en s'appuyant sur le théorème suivant, qui semble être une extension tout évidente du théorème de l'article 14.

Étant donné un tétraèdre quelconque ABCD et un point O, on construit d'abord les quatre sphères passant par BCDO, CDAO, DABO, ABCO et ensuite les quatre sphères symétriques par rapport aux faces BCD, CDA, DAB, ABC du tétraèdre; les sphères symétriques ainsi obtenues passent encore par un même point O'.

A la vérité, ce théorème mènerait à des considérations plus simples par rapport à la transformation en question, s'il était vrai; seulement il est faux, comme nous allons le voir tout à l'heure.

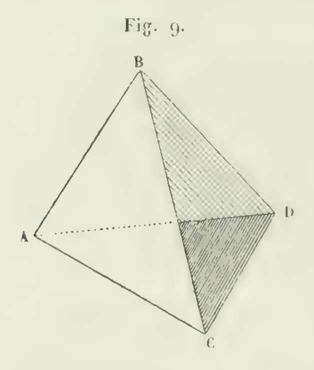
D'abord je remarque que l'extension de la démonstration du théorème de l'article 14 a des difficultés qui lui sont propres, la sphère n'étant pas dans l'espace le lieu des points d'où l'on voit un cercle donné par trois points sous un angle solide donné : ce qui cependant ne prouve pas encore la fausseté du théorème.

Si le théorème était vrai, les points O et O' formeraient une transformation birationnelle en involution dans l'espace, où les sphères, dont les cercles circonscrits aux triangles BCD, CDA, DAB, ABC sont de grands cercles, correspondraient à elles-mêmes : ce qui exige que le deuxième point d'intersection de trois de ces quatre sphères qui passent par A se trouve aussi sur la quatrième. Eh bien, dans le cas en question d'un tétraèdre régulier de référence, ce point commun aux quatre sphères doit être le centre du tétraèdre. Mais cela est impossible, parce que le quart de la hauteur du tétraèdre n'égale pas les deux tiers de la hauteur du triangle équilatéral des faces du tétraèdre.

39. Le raisonnement précédent mène encore à une autre transformation par sphères symétriques au moyen d'un trièdre A limité (*fig.* 9), c'est-à-dire d'un tétraèdre ABCD ouvert par une de ses faces BCD. Construisons d'abord les sphères qui passent par ACDO, ADBO, ABCO, et ensuite les sphères symétriques à celles-ci par rapport aux faces ACD, ADB, ABC; ces trois sphères symétriques, qui passent déjà par A, ont encore un point commun O', qui forme avec O une transformation par sphères symétriques, plus générale que celle des articles précédents. De même que, suivant la dernière remarque de l'article 23,

deux groupes de cercles symétriques suffisent pour la détermination de la transformation par cercles symétriques, on voit que les trois groupes de sphères symétriques suffisent pour la détermina-

Fig. 9.



tion de la transformation par sphères symétriques. L'omission du plan BCD et des sphères passant par B, C, D a donc enlevé toutes les difficultés.

60. En continuant mon sujet, j'aurais à examiner de plus près les deux transformations par sphères symétriques, dont je viens de donner l'énoncé. D'abord j'aurais à rechercher l'ordre de la deuxième, qui très probablement est différent de onze. Mais l'examen minutieux de ces deux transformations, présentant des difficultés tout à fait différentes de celles que nous avons rencontrées jusqu'ici, doit être ajourné à présent, ce petit travail étant déjà plus volumineux que je ne m'étais proposé de le faire.

MÉLANGES.

LES PREUVES MÉCANIQUES DE LA ROTATION DE LA TERRE;

Par M. Ph. GILBERT [1].

I.

On sait que la doctrine de la rotation de la Terre autour de son axe, enseignée dans l'antiquité par Héraclite de Pont, Ecphantus, Aristarque de Samos et Seleucus de Babylone, fut admise au xve siècle par Nicolas de Cues, évêque de Brixen. Elle était donc restée en quelque sorte dans la circulation des idées, et, bien longtemps avant Copernic et Galilée, les hommes qui réfléchissent avaient su se mettre au-dessus de l'illusion des sens. Mais il était réservé au chanoine de Thorn et à Kepler, par des travaux immenses où les calculs les plus arides s'alliaient aux vues les plus hardies, de mettre dans tout son jour la belle ordonnance du vrai système du monde.

Bien que le nom de Galilée soit constamment associé au triomphe de ce système, on doit dire que le grand physicien italien a peu fait *directement* pour l'établir dans la science. Ses découvertes télescopiques sur la rotation du Soleil, sur les phases de Vénus, sur les satellites de Jupiter, ont cependant renversé quelques-uns des préjugés dont on s'armait contre la rotation de la Terre. Mais les raisons d'harmonie, de simplicité et de convenance qu'il faisait valoir en faveur des idées de Copernic avaient été déjà, pour la plupart, signalées par son illustre prédécesseur. Quant à l'argument qu'il tire du phénomène des marées, dont la cause réside, suivant lui, dans une certaine inégalité due au double mouvement de la Terre, tout le monde sait aujourd'hui que cette explication est fausse et que la rotation du globe n'est pour rien dans le flux et le reflux de la mer.

---

(1) Conférence faite à la Société Scientifique de Bruxelles en avril 1882.

Galilée rendit des services plus efficaces à la cause de la vérité en découvrant, en expliquant les principes de la Mécanique, en réfutant avec autant d'esprit que de force les objections que les péripatéticiens, par exemple, opposaient à la thèse de la rotation de la Terre. C'était là, en effet, un terrain sur lequel se portait volontiers l'effort des défenseurs de Ptolémée, dont plusieurs, comme Riccioli, étaient doués d'un véritable talent d'observation. N'ayant aucune idée nette du principe de l'indépendance des mouvements, persuadés qu'un corps cesse de se mouvoir juste au moment où disparaît la force qui le sollicite, les adversaires du mouvement de la Terre opposaient que, si l'on abandonne une pierre du sommet d'une tour, elle tombe au pied de celle-ci ; or, disaient-ils, si la Terre était en mouvement, la tour aurait parcouru déjà un grand espace pendant la durée de la chute, et la pierre irait nécessairement toucher le sol bien loin en arrière, c'est-à-dire à l'*ouest* de la tour. Jamais, ajoutaient-ils, un boulet de canon ne pourrait atteindre son but ; jamais les oiseaux sortis de leurs nids ne pourraient y rentrer, la Terre les ayant emportés avec elle, etc.... Mersenne et Petit plantaient même un canon la bouche vers le haut, pour voir dans quel sens dévierait le projectile ; malheureusement, l'un des boulets disparut, le second alla tomber à 2000 pieds à l'ouest, le troisième autant à l'est, et les expérimentateurs, jugeant probablement que le quatrième pourrait prendre la moyenne et leur tomber sur la tête, cessèrent l'expérience.

A ces mécaniciens attardés, il fallait expliquer, comme le firent Galilée et Gassendi, que le mouvement imprimé se conserve dans un corps ; que la pierre, animée à son départ d'une vitesse égale à celle de la tour, ne perd pas cette impulsion reçue et continue à se transporter *dans le sens horizontal*, avec la même vitesse que la tour elle-même ; il fallait montrer que, si rapide que soit la marche d'un navire, la pierre lâchée au sommet du grand mât tombe, non pas à l'arrière comme elle le ferait si l'objection était fondée, mais au pied même du mât ; que l'imprudent qui saute d'une voiture lancée à fond de train vient heurter le sol avec toute la violence de l'impulsion qu'il a reçue du véhicule.

Mais, en détruisant ainsi les mauvaises raisons de ses adversaires, loin d'apporter à son tour des preuves physiques, mécaniques, sensibles du mouvement de rotation de la Terre, Galilée

ne vit pas jusqu'au bout de sa propre doctrine. En plusieurs endroits de ses Dialogues, il nie formellement la possibilité de constater cette rotation par des expériences exécutées à la surface de la Terre. « Car », dit-il, « le résultat de ces expériences sera nécessairement le même, que la Terre soit en repos ou en mouvement ». Plus conséquent ou plus pénétrant, il eût vu que l'objection des péripatéticiens peut se retourner contre eux, et que l'expérience proposée pour constater l'immobilité du globe terrestre, exécutée avec une précision suffisante, fournirait une preuve irréfragable de son mouvement.

En effet, par suite de la rotation de la Terre autour de la ligne des pôles, les points les plus éloignés de cet axe sont animés de la plus grande vitesse. Dans une tour d'une élévation suffisante, le sommet, étant plus loin de l'axe terrestre que la base, aura, dans le sens horizontal et vers l'est, un mouvement plus rapide. Un corps, tombant du haut de la tour, participe à sa vitesse et la conserve indépendamment de son mouvement vertical; par conséquent, pendant la durée de sa chute, il parcourt horizontalement vers l'est un espace plus considérable que ne fait le pied de la tour : il ira donc toucher le sol en un point situé quelque peu à l'est de la verticale passant par son point de départ. Tel est le raisonnement fort simple qu'auraient dû faire les défenseurs de Galilée. Sans doute, cette *déviation*, par rapport à la verticale, des corps tombant d'une grande hauteur doit être minime, la différence des distances à l'axe étant peu de chose relativement au rayon de la Terre. Une théorie plus savante, et dans laquelle on tiendrait compte de la résistance de l'air, indique qu'elle doit être de $0^m,011$ seulement pour une hauteur de chute de 80^m sous la latitude de Bologne. Néanmoins on pouvait espérer, par des expériences conduites avec beaucoup d'adresse, de la mettre en évidence. Mais Galilée n'y songea pas, ni personne à cette époque.

C'est à Newton, semble-t-il, qu'il faut reporter l'honneur d'avoir le premier aperçu cette conséquence du mouvement diurne, cette expérience *cruciale*, pour décider entre Ptolémée et Copernic. On voit, dans l'histoire de la Société Royale de Londres par Bird, qu'à une réunion chez le président Williamson, le 8 décembre 1679, le D[r] Hooke lut une lettre de Newton, où le grand physicien faisait observer que, si on laisse tomber un corps pesant d'une hauteur

suffisante, il devra, par suite de la rotation diurne, tomber à l'est de la verticale de son point de départ. La Société Royale ayant exprimé le désir de voir réaliser cette expérience, Hooke fit quelques objections à l'idée de Newton, et prétendit que la déviation se produirait, non à l'*est*, mais au *sud-est*. Par quelle considération théorique Hooke justifiait-il cette conclusion? Nous l'ignorons; mais il est fort curieux que les expériences dont nous aurons à parler s'accordent, presque toutes, à signaler une faible déviation vers le sud, dont la théorie est, jusqu'ici, impuissante à rendre raison.

Le 18 décembre, Hooke rend compte de ses expériences : il a trouvé, effectivement, un écart vers le sud-est; mais, comme la hauteur de chute n'était que de 27 pieds anglais et que la déviation ne devait pas, par suite, dépasser un demi-millimètre, il y a tout lieu de croire que le physicien anglais aura été dupe d'une illusion. La Société émit alors le vœu d'assister aux expériences. Il est impossible de savoir ce qu'il en advint : les procès-verbaux ne renferment plus aucune mention à cet égard.

II.

Plus de cent ans se passèrent, et le système de Copernic était entré en possession de l'adhésion unanime des astronomes, avant que l'on songeât à reprendre les expériences suggérées par Newton. Ce fut un jeune abbé italien, J.-B. Guglielmini, qui, en 1790, à la suite de controverses théoriques sur la matière, eut l'audace de les tenter et l'énergie de les mener à bonne fin, dans cette même tour *degli Asinelli* de Bologne où, un siècle auparavant, Riccioli avait expérimenté sur la chute des corps en vue de contredire Galilée [1].

La tour Asinelli se prête bien à ces recherches. Elle a environ

[1] *Jo. Baptistæ Guglielmini de diurno terræ motu experimentis physico-mathematicis confirmato opusculum. Bononiæ, MDCCXCII, ex typographia S. Thomæ Aquinatis, cum superiorum permissu.* Cet opuscule, fort rare et qui ne se trouve probablement dans aucune bibliothèque de Belgique, a été mis à notre disposition, avec une libéralité dont nous lui exprimons ici toute notre reconnaissance, par le savant prince B. Boncompagni.

100^{m} de haut; on en fait l'ascension par un escalier tournant qui laisse libre, dans l'axe, un espace plus que suffisant.

En haut, la tour est fermée par une voûte, que surmonte un clocheton; en s'établissant sous la voûte, ouvrant les trappes des étages et perçant la voûte de l'étage inférieur, on dispose d'une hauteur verticale de 240^{pi}. Malheureusement, les constructeurs ont laissé dans les murs bon nombre d'ouvertures, par lesquelles le vent fait rage à certains moments : on ne pouvait donc opérer, pour ces expériences délicates, que par un temps parfaitement calme. De plus, les premiers essais révélèrent à Guglielmini la nécessité d'expérimenter entre 2^{h} et 5^{h} du matin; en tout autre temps, la circulation des voitures dans le voisinage détermine, sur cette tour élancée, des vibrations telles qu'il est impossible d'amener à l'immobilité complète le corps dont on veut étudier la chute. Or cette immobilité est de rigueur, car la plus minime impulsion dans le sens latéral, imprimée au départ, conserve son influence pendant toute la chute et suffit à masquer le phénomène principal, en donnant au corps, au lieu d'une déviation de 0^{m},005 ou 0^{m},006 à l'est, une déviation de 0^{m},04 à 0^{m},05 dans un sens inconnu. Les malheureux expérimentateurs ne l'ont que trop souvent éprouvé.

Une plaque de cuivre horizontale, percée d'un petit trou, fut reliée solidement à la maçonnerie de la voûte supérieure, et par ce trou passait le fil auquel pendait une balle bien sphérique. Dans les premiers temps, le fil était attaché à un crochet au-dessus de la plaque, et on le brûlait quand la balle était arrivée au repos, ce dont on s'assurait en l'observant à l'aide de microscopes. Au bas de la tour était disposé, dans un cadre fixe, un plateau de cire sur lequel les balles, en tombant, venaient marquer une empreinte profonde, dont on relevait ensuite la position par rapport à la verticale passant par le point de suspension du fil. D'après toute probabilité, les balles devaient venir frapper toutes à la même place, et l'expérience eût été fort simple.

Mais les choses ne marchèrent pas si facilement, et les échecs successifs auraient abattu un courage moins tenace que celui du jeune savant : les premières balles ne passèrent même pas par l'ouverture, assez large pourtant, de la voûte inférieure. Il fallut, par une série d'expériences minutieuses, exécutées à l'Observatoire, où Guglielmini disposait de 90 pieds de chute seulement, mais

où il était abrité contre les courants d'air, déterminer la cause de ces déviations insolites. Il crut la trouver dans des oscillations imperceptibles qui persistaient dans la balle ou s'y produisaient, au moment même où elle paraissait parfaitement tranquille. Pour y remédier, après divers essais infructueux, il adopta comme mode de suspension une pince travaillée avec soin par Comelli, dont les mâchoires serraient le fil suspenseur de la balle, et que l'on ouvrait par une pression insensible sur un levier lorsqu'on s'était assuré que l'air était calme, la tour dépourvue de toute oscillation et le fil en parfait repos.

Les études préliminaires à l'Observatoire ayant bien réussi, car les balles tombèrent toutes sensiblement dans l'empreinte de la première, à $0^m,004$ à l'est du point d'aplomb, Guglielmini recommença avec un nouveau courage, dans la nuit du 1er janvier 1791, à observer dans la tour Asinelli, avec l'assistance de Mgr Bonfioli, prélat domestique du pape Pie VI (1). Traversées par de nouvelles déconvenues et un état atmosphérique désolant, les expériences furent reprises aux mois de juin et d'août 1791, par les nuits les plus tranquilles et avec des précautions telles, que deux balles seulement étaient lancées chaque nuit. Guglielmini observa ainsi *seize* chutes dont une, à cause de l'agitation sensible de l'air, offrait un résultat discordant qui dut être rayé de la série des expériences.

La moyenne de ces chutes donna une déviation vers l'*est* de $0^m,0167$, avec $0^m,01175$ de déviation vers le *sud*; toutes les déviations étaient orientales, sans exception, l'écart entre les extrêmes étant de $0^m,014$ environ, résultat assez remarquable, eu égard aux difficultés de l'expérience et à l'époque où elle s'effectuait. En comparant ces chiffres à ceux de sa théorie, Guglielmini trouva que la différence était seulement de $\frac{1}{10}$ de millimètre pour la déviation vers l'est.

Malheureusement un défaut grave infirme la valeur de cette comparaison. Pour déterminer la déviation, il fallait comparer, au moyen de fils tendus sur un cadre rectangulaire, les positions des em-

(1) A cette circonstance, il convient d'ajouter que le livre de Guglielmini parut avec l'approbation du saint-office de Bologne, en 1792. C'est donc à tort que certains auteurs reculent jusqu'en 1822 l'autorisation ecclésiastique d'enseigner le mouvement de la Terre.

preintes laissées par les balles à la position du fil à plomb suspendu au même point que les balles. Non seulement le physicien italien ne déterminait pas sa verticale chaque jour, comme il eût dû le faire, mais, par suite de circonstances défavorables, la vérification de la verticale fut retardée de six mois. Les expériences avaient eu lieu en été; ce fut en hiver que l'on détermina la verticale du point de suspension. Or, dans un édifice aussi élevé et construit d'ailleurs dans des conditions aussi insolites que la tour Asinelli (¹), il se produit nécessairement, par les changements de saison et par bien d'autres causes aisées à concevoir, des changements sensibles dans l'inclinaison : Guglielmini avait donc une verticale toute différente à l'époque des expériences et à l'époque de la vérification.

Aussi les calculs de la déviation théorique, refaits par Laplace, ne donnèrent que $0^m,011$ de déviation orientale, et rien vers le sud. Guglielmini, d'ailleurs, reconnut lui-même l'incertitude de ses résultats, quoiqu'ils eussent été accueillis favorablement par le monde savant. Dans une lettre à Benzenberg, datée de janvier 1803, il parle de nouvelles recherches auxquelles il se serait livré, et d'une variation de courbure dans la tour par les changements de température. Il reconnaît aussi s'être trompé dans sa théorie, qui lui annonçait une déviation vers le sud, dont Laplace a prouvé le néant (²). Ajoutons que, au lieu de calculer l'écart théorique au moyen de la *hauteur* de chute, facile à déterminer exactement, Guglielmini se servait de la *durée* de chute, mesurée par un procédé peu exact et qui comportait conséquemment une erreur très sensible.

Ainsi ces expériences de Bologne, malgré la ténacité courageuse avec laquelle elles ont été menées à travers tant de difficultés, n'ont donné définitivement aucun résultat dont la Science puisse se prévaloir avec sécurité.

Quelques années après les essais de Bologne, le Dr Benzenberg,

---

(¹) C'est une des célèbres tours penchées de Bologne.

(²) Il s'agit, bien entendu, de déviations *observables*. Celles que l'analyse indique comme étant de l'ordre du carré de la vitesse rotatoire du globe ($\omega^2 = 0,000000005$) tombent au dessous de nos moyens d'observation.

qui habitait Hambourg, fut amené par une conversation avec le Dr Horner, ainsi qu'il le conte lui-même [1], à reconnaître l'heureuse disposition de la tour Saint-Michel, à Hambourg, et à l'utiliser pour des expériences sur la résistance de l'air et sur la déviation des corps tombants. Ces expériences furent terminées en 1802. Deux ans plus tard, il en fit de nouvelles sur le même objet dans un puits de mine de Schlebusch. Nous allons en donner brièvement la disposition et les résultats, car ceux-ci, comme on le verra, ne sont guère de nature à faire époque dans la Science.

Le sommet de la tour Saint-Michel est à une hauteur totale de 130m,50. La vue y est splendide : le mouvement du port de Hambourg, le large cours de l'Elbe coupé par des îles ; au loin, les jardins et les villas des riches armateurs ; au pied de l'église, Hambourg, avec sa population bariolée, ses voitures se croisant dans tous les sens, son activité prodigieuse, forment un merveilleux panorama. Achevée en 1780, cette tour est un monument de l'audace de Sonin, l'architecte original et intelligent qui accepta un jour le pari de bâtir en soixante-douze heures une salle pouvant contenir deux cents personnes, et qui le gagna.

Benzenberg n'avait d'abord aucune idée des précautions minutieuses exigées par les recherches auxquelles il allait se livrer ; le livre de Guglielmini, les résultats grossiers des premières expériences qu'il fit en octobre 1801 lui ouvrirent les yeux. Au commencement, on suspendait le corps tombant à un fil passant par un petit trou à travers une plaque, et l'on coupait le fil au-dessus du trou : les balles ainsi lâchées tombèrent, l'une à 0m,054 à l'ouest et autant au sud de la verticale du point d'attache ; l'autre à 0m,11 à l'est et 0m,027 au sud. Il fallut revenir à la pince de Guglielmini plus ou moins modifiée, et renoncer à la hauteur de 340 pieds dont on pouvait disposer, à cause des courants d'air qui se produisaient dans une sorte de tuyau par où les balles devaient passer. Les balles étaient faites d'un alliage de plomb, d'étain et de zinc ; leur diamètre atteignait 0m,027. Elles étaient fondues avec soin, puis tournées et soigneusement polies. Pour éviter les rotations de la balle sur elle-même pendant la chute, un trou fin était

[1] *Versuche über das Gesetz des Falls, über den Widerstand der Luft und über die Umdrehung der Erde*, etc. Dortmund, 1804, in-8.

percé suivant un rayon de la sphère et servait à fixer le fil de soie ou de crin auquel on suspendait la balle; de cette manière, on s'assurait que le centre de gravité de la balle était au-dessous du point par lequel elle est attachée au fil. La balle, en tombant, venait frapper la surface d'une table horizontale saupoudrée de craie et portant à son centre un trou de $0^{m},006$ de diamètre, dont, à chaque expérience, on amenait le centre juste dans la verticale du point de suspension en y faisant passer le fil à plomb; après quoi l'on vissait solidement ce plateau sur un plancher supporté par de fortes pièces de bois. Deux lignes, se croisant au centre du trou, étaient orientées sur les points cardinaux.

L'administration de l'église, par malheur, ne permit pas l'usage de lumières dans la tour. Benzenberg ne put ainsi profiter du calme de la nuit, ni même employer le microscope pour vérifier l'immobilité des balles à l'instant du départ. Cette condition indispensable ne fut probablement jamais remplie, tant à cause du passage continuel des voitures dans les rues fréquentées qui se croisent près de la tour, que par suite des courants d'air impossibles à éviter dans cet énorme tuyau. Cette circonstance, et d'autres contretemps sur lesquels l'auteur s'étend avec complaisance dans son livre, exercèrent sur les résultats une fâcheuse influence. Après bien des essais, bien des perfectionnements apportés à la confection des balles et au mode de suspension, désespérant de vaincre les difficultés qui s'opposaient à une grande précision dans le travail, Benzenberg se résigna à compenser l'infériorité des expériences par leur multiplicité, s'appuyant sur ce principe contestable que, dans la masse des essais, la déviation constante résultant de la rotation terrestre finirait par se manifester; comme si une loi physique pouvait se dégager d'une manière certaine d'un ensemble d'observations dans lesquelles les erreurs possibles dépassent de beaucoup la grandeur à évaluer! Il se livra donc, le 14, le 15, le 23 et le 26 octobre 1802, à des séries d'expériences (31 en tout), dont il élimina arbitrairement celles qui, par leurs résultats, lui paraissaient devoir être entachées de quelque cause d'erreur. La moyenne des déviations, prise sur l'ensemble des expériences ainsi triées, fut de $0^{m},009023$ vers l'est et de $0^{m},00448$ vers le sud pour une hauteur de 235 pieds.

La comparaison de la théorie avec l'expérience fut faite par deux

maîtres de la Science, Olbers et Gauss; elle donna lieu à une controverse fort intéressante, et à un de ces beaux Mémoires de Mécanique comme Gauss en savait écrire. Établissant directement les équations du mouvement apparent d'un corps pesant à la surface de la Terre, il trouva que la déviation vers l'est devait être, à Hambourg, de $0^{m},00891$, résultat extrêmement voisin du chiffre obtenu par Benzenberg, mais que la déviation vers le sud se réduisait à zéro. Cette dernière conclusion, d'accord avec la théorie de Laplace, et à laquelle Olbers ne tarda pas à se ranger, contredit le résultat trouvé par l'observateur hambourgeois, et enlève, par conséquent, beaucoup de sa valeur à la concordance des déviations vers l'est.

D'ailleurs, il faut bien le reconnaître, dans les observations de Benzenberg, il se trouve des déviations dans tous les sens, 11 vers le nord et 16 vers le sud, d'une part; 8 vers l'ouest et 21 vers l'est, de l'autre, et tout cela entre des limites relativement fort étendues, allant de $0^{m},047$ vers l'est à $0^{m},0315$ vers l'ouest, et comprenant toutes les valeurs intermédiaires, sans qu'aucun écart paraisse spécialement favorisé. Ce ne sont pas là, on en conviendra, les conditions ordinaires d'une bonne expérience : l'écart entre les valeurs extrêmes observées est à peu près neuf fois aussi grand que la déviation moyenne obtenue.

Benzenberg ne se laissa pas pourtant décourager par une telle déception. Désireux surtout d'éclaircir la question de la déviation australe, il se transporta dans un puits de charbonnage abandonné de Schlebusch, *zur alten Rosskunst*, qui mesurait 262 pieds de chute verticale. Tous ses appareils soigneusement revisés, ses balles refondues et suspendues, avec plus d'attention que jamais, dans une caisse destinée à les abriter contre les agitations de l'air de mine, sous la surveillance de deux microscopes qui lui en révéleront les moindres mouvements, il s'installe, au cœur de l'hiver, à une distance considérable et qu'il lui faut parcourir tous les jours, dans la sordide cabane d'un mineur dont la personne et la famille, raconte-t-il, répandaient autour d'elles des émanations à faire reculer un Esquimau. L'isolement de la mine, l'absence de toute cause d'ébranlement perturbateur remplissaient l'âme de l'observateur de l'espoir du succès; mais il fallut une première fois renoncer à toute expérience : l'humidité de la mine pendant l'hiver cri-

blait l'atmosphère de gouttelettes d'eau qui, rejaillissant partout, atteignaient et déviaient les balles dans leur chute. De plus, un courant d'air violent soufflait des galeries inférieures vers le haut du puits; on dut boucher hermétiquement l'ouverture supérieure et masquer les galeries du fond; encore ne parvint-on jamais à obtenir un air entièrement tranquille. Les expériences régulières commencèrent le 7 octobre 1804. Les deux premières furent détestables; le 8 octobre, on observait 12 chutes irrégulières; le 9 octobre, 16; le 10 octobre, 8; en tout, en laissant de côté les résultats visiblement altérés par des causes inconnues, 29 chutes, dont les déviations par rapport à la verticale variaient, comme limites extrêmes, entre $0^m,043$ au nord et $0^m,034$ au sud; entre $0^m,045$ à l'est et $0^m,0225$ à l'ouest. Les limites d'erreur étaient donc plus élevées encore qu'à la tour Saint-Michel, et d'ailleurs, comme dans les premières expériences, rien n'indiquait une accumulation dans le voisinage de la moyenne, qui fut trouvée de $0^m,0113$ vers l'est, au lieu de $0^m,0103\overline{7}$ indiqués par la théorie. Il n'y eut pas, en moyenne, de déviation sensible vers le sud. En somme, en dehors d'une tendance persistante à marquer une déviation vers l'est, conformément à l'hypothèse de la rotation de la Terre, on peut considérer ces expériences de Benzenberg, plus encore que celles de Hambourg, comme n'apportant pas à la théorie une confirmation de quelque valeur.

Chose curieuse! en terminant le récit de sa peu fructueuse campagne, Benzenberg recommandait, comme un local éminemment propre à des expériences sur la déviation des corps tombant d'une grande hauteur, la coupole du Panthéon de Paris. Le docteur allemand ne soupçonnait pas, assurément, que cinquante ans plus tard ce même dôme du Panthéon verrait une expérience bien plus originale et bien plus décisive, dans laquelle, regardant tourner le plan d'oscillation du pendule de Foucault, un public étranger aux Sciences toucherait en quelque sorte du doigt la rotation diurne du globe.

III.

L'issue fâcheuse des tentatives de Benzenberg dans la mine de Schlebusch n'en dégoûta pas les continuateurs de son œuvre. C'est encore dans un puits de mine que, vingt-cinq ans plus tard, un

observateur aussi patient et mieux outillé, dans des expériences aujourd'hui classiques, allait tenter d'arracher à la nature la preuve physique d'une vérité dont la Science ne doutait plus, d'ailleurs, depuis longtemps.

Lorsque, en 1820, on ouvrit près de Freiberg, dans la mine de *Beschert Glück*, le puits appelé *Dreibrüderschacht*, le baron de Herder eut l'idée d'utiliser sa grande profondeur pour y reprendre, avec toute la précision que les progrès de la Science permettaient d'atteindre, les expériences sur la déviation des corps tombants. Retardées par les démarches pour se procurer un mètre authentique, ces études furent préparées, à partir du 4 mai 1830, par le professeur Reich et le mécanicien Brendel. Les expériences proprement dites commencèrent le 19 août 1831 et furent terminées le 8 septembre, pour ne pas entraver l'exploitation (¹). L'intervalle d'une année fut rempli par les préparatifs, la construction des cabines, des appareils, de l'horloge, etc.

La position du puits déterminée (50° 53′ 22″ lat. N.), on établit dans toute sa hauteur (160^{m} environ) une sorte de cheminée en bois, de 0^{m},42 sur 0^{m},35 d'ouverture, bien exactement verticale, solidement rattachée de distance en distance aux parois du puits, enfin, soigneusement close et calfeutrée du haut en bas; on voulait par là éviter l'humidité, les courants d'air, les oscillations transmises par une cause quelconque qui auraient pu influer sur la direction des corps pendant leur chute. Cette cheminée aboutissait, en haut et en bas, aux cabines où étaient installés les appareils de lancement et de réception des corps tombants, et où se tenaient les expérimentateurs. Des précautions spéciales furent prises, à la suite de quelques mécomptes rencontrés dans les premières expériences, pour qu'à l'extrémité inférieure du tuyau, au-dessus du bloc où venaient frapper les balles, il n'y eût pas introduction de courants d'air pouvant occasionner des déviations sensibles; on s'assura, par l'immobilité de la flamme d'une chandelle, que le but avait été atteint.

(¹) Les résultats en ont été consignés dans l'opuscule, aujourd'hui assez rare, intitulé : *Fallversuche über die Umdrehung der Erde angestellt auf hohe Oberbergamtliche Anordnung in dem Dreibrüderschacht bei Freiberg und herausgegeben von F. Reich, Professor der Physik an der K. S. Berg-Akademie*. Freiberg, 1830, in 8°.

Reich choisit, pour l'étude de la déviation, des balles sphériques de $0^m,04$ environ de diamètre, pesant 270^{gr}, aussi homogènes et aussi bien polies que possible; fondues d'un alliage d'étain, de bismuth et de plomb, elles se montrèrent assez résistantes au choc pour qu'on pût les employer plusieurs fois. On se servit aussi de balles de plomb de 270^{gr} et de trois billes d'ivoire.

Il ne paraît pas que l'on se soit préoccupé suffisamment de savoir si le centre de gravité coïncidait avec le centre de figure, condition sans laquelle il se produit dans la chute des rotations irrégulières, provoquant un frottement spécial de la part de l'air, ce qui peut produire une déviation notable.

Reich savait que la moindre impulsion latérale, causée par un souffle d'air, une oscillation des appuis, une faute de l'opérateur, suffit à produire une déviation accidentelle bien supérieure à celle qu'il faut observer : il attacha donc une importance extrême au mode de suspension de la balle. Dans une partie de ses recherches, il se servit d'un fil très court et très fin, de cuivre ou de crin de cheval, passé dans un chas imperceptible de la balle, et serré ensuite entre les mâchoires d'une pince, au-dessus desquelles le fil était coupé court. Ces mâchoires s'ouvraient ensuite doucement pour abandonner la balle à l'action de la pesanteur, sous la pression d'une vis, afin d'éviter absolument toute impulsion étrangère. Une pièce accessoire de la pince servait à pendre le fil à plomb, destiné à déterminer exactement, de temps en temps, la verticale du point où les balles étaient suspendues. Tout ce système était enfermé dans une caisse solidement reliée aux parois du puits, et ne pouvant recevoir aucune oscillation des mouvements de l'opérateur; cette boîte restait hermétiquement close jusqu'au moment de la chute.

Deux microscopes à axes croisés étaient disposés pour observer l'instant où la balle ne marquait plus aucune oscillation appréciable, ce qui demandait environ quinze minutes : c'est à cet instant que l'on ouvrait la pince.

Un autre mode de suspension, dont Reich espérait d'excellents résultats, mais qui nous paraît sujet à de graves objections, fut employé dans la cinquième série d'expériences. Il consistait à déposer la balle, préalablement chauffée, sur un anneau circulaire en cuivre, légèrement conique à l'intérieur, fixé bien horizontale-

ment, et dont le diamètre intérieur excédait un peu celui de la balle refroidie. Au bout d'un certain temps, la balle, contractée par le refroidissement, passait à travers l'anneau et la chute se produisait sans secousse. On comprend sans peine que, pour peu que le refroidissement s'opérât d'une manière inégale sur le pourtour de la courbe de contact, il devait se produire un petit glissement latéral très fâcheux. Pour déterminer alors la verticale, on remplaçait l'anneau par une plaque circulaire de même grandeur, dont le centre était percé d'un trou par lequel on descendait le fil à plomb.

La verticale était repérée, au bas de la cheminée, sur une plaque d'acier fixée au centre d'une tablette en bois, solidement installée, destinée à recevoir les balles à la fin de la chute. Chaque balle laissait dans le bois une empreinte plus ou moins profonde, et l'on prenait, au moyen de fils tendus, les coordonnées du centre de cette impression par rapport à deux lignes orientées tracées sur la plaque d'acier : c'est par ce moyen que les déviations furent relevées.

La comparaison des résultats de l'expérience avec ceux de la théorie exigeait la connaissance exacte de la hauteur de chute. Au moyen d'un mètre en fer fourni par Fortin, on mesura avec soin la longueur d'une latte en bois, qui avait séjourné assez longtemps dans le tuyau pour en prendre la température et l'humidité, et l'on porta cette latte de bout en bout sur une autre, fixée du haut en bas de la cheminée. Ce mesurage fut contrôlé d'ailleurs par une mesure directe, au moyen d'un fil de cuivre suspendu dans la cheminée. Comparées et corrigées avec un soin qui paraîtra excessif, si l'on songe au peu d'influence qu'une petite variation dans la hauteur peut produire sur le phénomène à étudier, ces mesures donnèrent une moyenne de $158^{m},50$ entre le centre de la balle suspendue et le plateau où elle venait frapper à l'arrivée.

Reich attachait aussi une grande importance à déterminer exactement la durée de la chute, pour évaluer l'intensité de la pesanteur; il installa dans ce but une excellente horloge à pendule conique dont l'opérateur arrêtait le mouvement à l'instant où la balle atteignait le plateau inférieur, instant marqué mécaniquement par l'extinction de la lumière réfléchie d'une lampe d'Argant. La durée de la chute (358 tierces environ, après l'élimination de l'er-

reur personnelle) donna un résultat sensiblement d'accord avec la formule du capitaine Sabine pour l'intensité de la pesanteur.

Avant d'indiquer les résultats des diverses séries d'observations instituées par Reich, nous noterons encore que Reich, comme Benzenberg, commit la faute d'écarter du calcul des moyennes toutes les observations dont le résultat s'écartait beaucoup de la moyenne générale, même quand aucune raison spéciale, antérieure à tout calcul, ne lui avait signalé quelque chose de défectueux dans l'observation même, comme une secousse imprimée au fil, une agitation de l'air, etc... Tout le monde sait qu'un pareil remaniement des résultats de l'expérience est aujourd'hui unanimement condamné par les observateurs consciencieux [1].

Six séries d'expériences, comprenant respectivement 23, 12, 12, 18, 21 et 21 chutes observées, furent exécutées avec un soin extrême dans l'intervalle du 23 août au 8 septembre 1831. La moyenne générale déduite de ces six séries, après l'élimination critiquée plus haut, se monte à $0^{m},028396$ de déviation *orientale* pour $0^{m},0437$ de déviation australe, la hauteur moyenne de chute étant de $158^{m},54$. La théorie donne, dans les mêmes conditions, une déviation à l'est de $0^{m},0275$, qui s'accorde très bien avec la conclusion des expériences; elle n'indique, comme nous l'avons observé déjà, aucune déviation vers le sud.

Tel est le résultat célèbre, classique, connu de tous, présenté dans tous les Traités de Mécanique et d'Astronomie comme une confirmation éclatante des théories fondées sur la rotation de la Terre. Eh bien, nous avons éprouvé une réelle déception en étudiant, dans l'ouvrage même de Reich, le détail de ces expériences fameuses ; car le résultat final et concordant que l'on se borne à citer ne donne absolument aucune idée des écarts qui se sont produits dans les différentes expériences. Entre les moyennes des diverses séries même, il y a des discordances notables, car les déviations moyennes à l'est varient entre $0^{m},04634$ (4e série) et $0^{m},01070$ (6e série); quant à la déviation vers le sud, elle est remplacée dans trois séries par une déviation moyenne vers le nord, allant jusqu'à 0,016. Mais ces écarts sont encore bien éloignés des

---

(1) *Voir* notamment M. d'Abbadie, *Géodésie d'Éthiopie*.

anomalies qui se montrent entre les chutes, dans une même série d'expériences. Ainsi, dans la première série (23 chutes), la moyenne de $0^{m},027$ de déviation *est* ne nous laisse nullement soupçonner que, dans cette même série, la déviation *est* oscille entre $0^{m},0195$ et $0^{m},179$, et que même, dans une partie des chutes, on trouve des écarts vers l'*ouest,* en sens contraire de ce qu'exige la théorie, qui vont à $0^{m},040$ et même $0^{m},077$. Quelle confiance accorder à une moyenne de $0^{m},027$ à l'est, dans une suite d'observations qui en comportent où la déviation est le triple en sens contraire? Dans la deuxième série, on relève des déviations passant par toutes les valeurs, depuis $0^{m},006$ jusqu'à $0^{m},119$ vers l'est et depuis $0^{m},0097$ jusqu'à $0^{m},105$ vers l'ouest. Dans la troisième série, les déviations vont de $0^{m},079$ à l'orient à $0^{m},080$ à l'occident, et ainsi de suite.

Les anomalies sont plus prononcées encore dans le sens parallèle au méridien. Ici nous passons par tous les nombres entre $0^{m},187$ vers le sud et $0^{m},151$ vers le nord ; il se trouve même des séries, nous l'avons dit, dont la moyenne donne une déviation nord. Un tableau résumant graphiquement les résultats obtenus, que Reich a annexé à son Mémoire, met sous les yeux, de la manière la plus nette, l'incertitude des résultats.

La conclusion qui s'impose lorsqu'on réunit et étudie dans leur ensemble les expériences de Guglielmini, de Benzenberg et de Reich sur la déviation produite, par la rotation de la Terre, dans les corps tombant d'une grande hauteur, c'est, à notre avis, celle-ci : ces expériences sont vraiment insuffisantes eu égard au rôle important qu'on leur a assigné dans la science ; *elles sont à refaire.*

La perfection dans les appareils et les méthodes d'expérimentation a fait assez de progrès depuis 1830 ; si une grande hauteur de chute est jugée nécessaire pour ces recherches, la France et la Belgique possèdent aujourd'hui des puits d'extraction assez profonds [1] ; la question offre un intérêt suffisant ; enfin, nous avons assez de jeunes physiciens désireux de se signaler par une étude où l'importance des résultats s'allie à la difficulté de l'entreprise,

---

[1] On nous a signalé, notamment, un puits à Épinac et deux dans le voisinage de Mons (800^{m}).

pour que l'on puisse espérer d'une tentative bien dirigée des conséquences précieuses pour la Science. N'y eût-il que la question de l'existence d'une déviation vers le sud à éclaircir, comme la théorie n'en indique pas, c'est déjà là un problème qui mérite un effort.

Mais, à ne considérer que les résultats obtenus jusqu'à ce jour, et abstraction faite d'une tendance à la déviation vers l'est qui se révèle manifestement dans l'ensemble des phénomènes, on pourrait répéter ce que disait déjà Laplace en rappelant les objections des adversaires de Galilée : « On éprouve maintenant à reconnaître dans la chute des graves le mouvement de la Terre autant de difficultés que l'on en trouvait alors à prouver qu'il doit y être insensible (1). »

IV.

Il était réservé à un physicien français, enlevé trop tôt dans la force de l'âge et du talent, de fournir une démonstration bien plus nette, plus accessible à tous, du mouvement diurne du globe terrestre.

Les oscillations du pendule conique ou pendule à un seul fil avaient été étudiées par les académiciens du *Cimento*, à Florence; ils avaient observé une déviation constante, sans cause apparente, dans le *plan d'oscillation* du pendule. Rien n'indique qu'ils aient eu la pensée de rattacher cette déviation au mouvement de la Terre; rien ne prouve même qu'elle n'ait pas été due à quelque défaut de l'appareil.

Par quelle série de déductions Léon Foucault fut-il amené à chercher, dans le pendule libre, un signe sensible de la rotation terrestre? La persistance du plan d'oscillation d'une tige élastique montée sur un tour en l'air fut, paraît-il, le point de départ. Quoi qu'il en soit, après bien des tâtonnements, l'expérience réussit le 8 janvier 1851 et fut communiquée le 3 février à l'Académie, où elle excita une vive émotion et provoqua d'intéressantes recherches théoriques. Pour comprendre la liaison entre le phénomène observé et la rotation du globe, plaçons sur une table mo-

(1) *Exposition du système du monde*, Liv. V, Chap. IV.

bile un support, auquel nous suspendrons un fil portant une balle de plomb et bien également flexible dans tous les sens. Écarté de sa position verticale d'équilibre et abandonné à lui-même, ce pendule prendra un mouvement d'oscillation dans un plan passant par la verticale du point de suspension, et ce plan occupera une position invariable par rapport à la table, comme par rapport aux murs de la pièce où l'on opère, si le fil satisfait exactement à la condition d'égale élasticité dans tous les sens. Supposons maintenant que, pendant la marche du pendule, on vienne à mouvoir la table sans secousse, à lui donner, par exemple, un mouvement de rotation autour d'un axe vertical, passant par le point de suspension du pendule. On serait tenté de croire, au premier abord, que le mouvement gyratoire du support va entraîner celui du plan d'oscillation du pendule; que ce plan ne cessera pas de correspondre à une même ligne tracée sur la table et tournera par conséquent avec celle-ci. Mais, avec un peu de réflexion, on aperçoit qu'aucune cause réelle ne tend à dévier ce plan; grâce à la qualité que nous lui avons supposée, le fil se plie avec une égale facilité dans toutes les directions; rien ne l'empêche donc d'osciller dans un plan fixe, alors même que l'extrémité supérieure du fil est forcée de tourner sur elle-même.

C'est ce que l'expérience vérifie fort bien. Au fur et à mesure que la table se déplace, le plan d'oscillation du pendule correspond à des lignes différentes sur la table et semble tourner en sens contraire de celle-ci; mais la comparaison avec des objets restés fixes montre aussitôt que ce plan n'a pas changé et que c'est la table seule dont la rotation produit cette apparence.

Ce qui se passe entre le pendule libre et la table où est fixé son point d'attache se produit également sur la terre. Si nous concevons d'abord le pendule porté au pôle nord et suspendu à un point pris sur le prolongement de l'axe terrestre, puis écarté de la verticale et abandonné sans vitesse, il se mettra à osciller suivant l'un des méridiens qui se croisent au pôle. Rien n'oblige son plan d'oscillation à se mouvoir; mais comme, en vertu du mouvement diurne, les méridiens successifs passent sous le pendule en tournant de droite à gauche, l'observateur, qui n'a pas conscience de ce mouvement, verra le plan d'oscillation dévier en apparence de

la gauche vers la droite, et cette apparence inattendue lui révélera le vrai mouvement du globe terrestre.

Si nous transportons le théâtre de l'expérience sous une latitude quelconque, la nôtre par exemple, le phénomène va se compliquer, parce que la verticale du point d'attache du fil, qui, au pôle, se confondait avec l'axe de la Terre et avait une direction fixe, participe maintenant au mouvement du globe et décrit un cône autour de cet axe. Le plan d'oscillation du pendule libre, assujetti par l'action de la pesanteur à passer constamment par cette verticale, ne peut donc garder une direction invariable dans l'espace, mais, suivant une induction de Foucault que des calculs plus savants ont confirmée, il s'écarte le moins possible, à chaque instant, de sa direction à l'instant qui précède, et si l'on suit les conséquences de ce principe, par un calcul qui ne peut trouver place ici, on trouve que la déviation apparente du plan d'oscillation, par rapport à la trace horizontale de sa position primitive, est proportionnelle au *sinus* de la latitude. Égale à la rotation même du globe, au pôle, elle va s'amoindrissant jusqu'à l'équateur, où elle est nulle ([1]). On peut donc dire avec l'ingénieux inventeur : « De même qu'en pleine mer, à perte de vue du rivage, le pilote, les yeux fixés sur le compas, prend connaissance des changements de direction accidentellement imprimés au navire ; de même, l'habitant de la Terre peut se créer, au moyen du pendule, une sorte de boussole arbitrairement orientée dans l'espace absolu, et dont le mouvement apparent lui révèle le mouvement réel du globe qui le supporte. »

L'appareil sur lequel Foucault vérifia d'abord ses déductions n'avait pas plus de 2^m de haut. Plus tard, il installa à l'Observatoire de Paris un pendule de 11^m de fil, sur lequel le phénomène se traduisit d'une manière bien plus sensible. Enfin, par la volonté du prince-président Louis-Napoléon, l'expérience fut reprise au

---

([1]) « Un jour, dans le jardin du Luxembourg, Foucault rencontrant un ami, digne, je crois, de toute sa confiance, le pria, sans lui parler du pendule, de calculer un angle infiniment petit qu'une construction géométrique sur une petite boule définissait avec précision, et qui, par l'enchaînement de deux triangles sphériques, fut trouvé proportionnel au sinus de la latitude. « J'en étais sûr », dit Foucault, et un éclair de triomphe et de joie illumina un instant sa physionomie fine et railleuse ». (J. Bertrand, *Éloge historique de L. Foucault*, p. 21.)

Panthéon dans des proportions grandioses. On fixa inébranlablement, au sommet de la coupole, les pièces métalliques auxquelles était suspendue la tige du pendule, fil d'acier de 67^{m} de long sur $0^{m},0014$ de diamètre, soigneusement retouché par Foucault. Au-dessous du pendule, une table circulaire, sur laquelle on avait tracé des diamètres de 5° en 5°, permettait de lire la déviation. Les oscillations du pendule ayant une grande amplitude et une durée de seize secondes, la progression du plan d'oscillation était sensible à chaque va-et-vient; pour la rendre plus nette encore, on garnit la sphère d'une pointe qui, à chaque oscillation, entaillait de petits monticules de sable disposés sur le pourtour du cercle. Cette déviation s'effectua d'ailleurs régulièrement dans le sens anoncé par la théorie, et la loi du sinus se vérifia même d'une manière satisfaisante.

Plus tard, un appareil électromagnétique, imaginé par Foucault, permit de prolonger à volonté la durée de l'expérience, qui, jusque-là, avait été limitée par l'extinction naturelle des oscillations du pendule.

L'expérience de Foucault présente, sur celle de la déviation des corps tombant d'une grande hauteur, un avantage singulier : elle accumule, pendant un temps assez long pour les rendre sensibles, les effets, d'abord tout à fait inappréciables, que la rotation si lente du globe terrestre exerce sur le mouvement apparent des corps. C'est là son caractère le plus précieux. Mais, malgré l'éclatant succès qui l'a couronnée dans les mains de l'inventeur, on ne doit se faire d'illusion, ni sur les difficultés expérimentales qu'elle présente, ni sur celles que sa théorie même soulève à un examen approfondi (1).

On a dit parfois que l'expérience du pendule de Foucault est très facile à reproduire. Il n'en est absolument rien, et Lissajous était certainement plus près de la vérité lorsqu'il écrivait : « Ceux qui ont répété consciencieusement son expérience ont pu seuls se

(1) On ne peut douter que cette théorie ait été souvent mal comprise en voyant proposer dans les *Annales de Poggendorff* (t. LXXXIII, p. 302) ce moyen naïf de constater la rotation du globe : Un fil bien délié suspendu à une voûte et portant, à son extrémité inférieure, un index horizontal mobile au-dessus d'un cadran. Grâce à la torsion du fil, l'index est rendu indépendant de la rotation terrestre.

rendre compte des difficultés pratiques que présentait sa réalisation. Foucault a avoué qu'il ne les avait surmontées qu'après plusieurs années d'essais. C'est à sa persévérance, à sa ténacité, à la fermeté de ses convictions qu'il a dû d'atteindre le but [1]. » « L'éminent constructeur Froment », dit à son tour M. Bertrand dans son bel *Éloge de Foucault*, « dérobant, sous la simplicité apparente d'un travail diligemment achevé, la *difficulté d'une exécution très délicate*, a été pour Foucault un digne collaborateur. » Des physiciens exercés et bien outillés nous ont déclaré n'avoir pas réussi à installer un pendule marchant convenablement, d'autres avaient obtenu une déviation du plan d'oscillation, mais beaucoup trop rapide.

Il importe d'observer que le pendule doit être mis en mouvement sans aucune vitesse *latérale*, c'est pourquoi l'on attache la boule dans une sorte d'anse en fil organique, que l'on brûle quand la boule est en repos. Mais il est bien difficile encore d'éviter toute secousse, et la plus faible exerce une modification permanente sur la trajectoire du corps pesant. En outre, cette trajectoire n'est pas proprement une droite, mais une ellipse très allongée qui tend à se déformer plus ou moins rapidement; les résultats de cette déformation se confondent bientôt avec ceux de la rotation de la Terre, et l'observation devient très difficile.

Mais où se rencontre la principale cause d'erreur ou tout au moins de doute, c'est dans l'inégale élasticité du fil de suspension dans les différents sens autour du point d'attache. La théorie de Foucault suppose essentiellement, nous l'avons vu, que le fil n'ait aucune tendance par lui-même à osciller dans un plan plutôt que dans un autre. La plus minime variation d'élasticité qui peut exister autour de l'axe du fil constitue une cause déviatrice permanente du plan d'oscillation; la rotation de la Terre en est une autre, très faible aussi, et c'est de la grandeur relative de ces deux forces perturbatrices que vont dépendre les effets observés. Or, qui ne comprend combien il est difficile de réaliser un fil métallique et un mode d'attache qui réunissent cette égale facilité d'oscillation dans tous les azimuts? Foucault supportait quelquefois le fil par

---

[1] *Travaux scientifiques de L. Foucault*, t. II, p. 7.

la filière même à laquelle il avait été étiré; d'autres fois, il se servait d'un fil martelé et écroui à plusieurs reprises; il a conseillé aussi de soumettre le fil, pendant plusieurs semaines, à des oscillations dans tous les sens. Ces moyens doivent être efficaces, mais on ne peut guère s'assurer qu'ils ont atteint le but, si ce n'est par la réussite même de l'expérience. Si l'on encastre le fil entre deux mâchoires offrant une rainure demi-cylindrique et serrées au moyen de vis, on risque de modifier l'élasticité très inégalement et d'obtenir des déviations dans le sens qui plaira à l'opérateur.

Aussi semble-t-il préférable d'appliquer au pendule libre la suspension de Cardan, comme l'a fait le Dr Garthe dans ses expériences à la cathédrale de Cologne, en 1852. Ces expériences, d'ailleurs peu connues, sont au nombre des plus parfaites qui aient été inspirées par la belle découverte de Foucault; on nous permettra de nous y arrêter un instant [1].

La voûte du chœur du célèbre *Dom* atteint 50^{m} d'élévation au-dessus du pavé. Dans une pierre formant clef de voûte, offrant au-dessus une cavité qui se terminait par une ouverture cylindrique à la partie inférieure, on fixa inébranlablement un bloc de chêne percé d'une ouverture verticale en correspondance avec celle de la pierre, et l'on garnit cette ouverture d'un anneau circulaire en cuivre, vissé dans le bois. Un deuxième anneau, concentrique et plus petit, portait par des pivots d'acier très soignés sur le premier, de façon à être mobile autour d'un diamètre horizontal. Un axe d'acier, à angle droit sur ce diamètre, était soutenu par des coussinets faisant corps avec l'anneau intérieur, et à cet axe, dans l'espace resté libre au centre de l'anneau, pendait la pièce métallique à laquelle était fixé le fil de suspension de la masse pendulaire, fil de $0^{m},007$ d'épaisseur. Grâce à la délicatesse extrême de ce mode de suspension, les oscillations étaient encore bien visibles au bout de six heures.

Pour mesurer le déplacement du plan d'oscillation, un double secteur circulaire divisé, concentrique avec la projection horizontale du pendule au repos, était disposé au-dessous de l'appareil et

---

[1] *Foucault's Versuch als direkter Beweis der Axendrehung der Erde*, etc., von Dr Garthe. Köln, 1852. L'ouvrage donne la description d'un *géostréphomètre* imaginé par l'auteur. L'appareil ne paraît pas avoir réussi.

orienté d'une façon convenable. Toutes les précautions étaient prises pour abandonner le pendule sans aucune vitesse à l'action de la pesanteur, dans un plan choisi à volonté et dont l'azimut variait à chaque expérience. La durée d'une oscillation était de $13^s,5$ et comportait une déviation de $0^m,003$ sur le cercle divisé.

Cinq séries d'expériences eurent lieu du 28 mai au 14 juin 1852. Dans chaque expérience, on mesurait avec le plus grand soin le temps que mettait le plan d'oscillation à se déplacer de $5°$, pour en déduire le temps nécessaire à une déviation de $1°$, temps qui, d'après la théorie et abstraction faite des petites variations que les études postérieures ont indiquées, devait être de $5^m 8^s,23$, temps moyen. Cette durée a varié, dans la première série, de $5^m 7^s,60$ à $5^m 10^s,40$; dans la deuxième, de $5^m 6^s,20$ à $5^m 10^s$; dans la troisième, de $5^m 8^s,40$ à $5^m 11^s,40$; dans la quatrième, de $5^m 7^s,80$ à $5^m 11^s,40$; dans la cinquième, de $5^m 4^s,60$ à $5^m 10^s,80$. La moyenne générale, déduite de 36 expériences, a donné $5^m 8^s,75$, avec une erreur probable n'atteignant pas une demi-seconde. Pour mieux mettre en évidence l'accord fort remarquable entre la théorie et l'observation, nous remarquerons que, d'après la moyenne des expériences, la déviation du plan d'oscillation en une heure de temps sidéral aurait été de $11°38'30'',9$, tandis que le calcul donne, pour la latitude du *Dom* et d'après la loi du sinus, $11°38'50'',3$.

Parlons maintenant de la théorie. Si, comme le voulait Poinsot, on ne regarde la question que sous le point de vue géométrique, elle paraît fort simple. Soit qu'on décompose la rotation du globe en deux autres, soit qu'on adopte le principe de Foucault et que l'on suive la voie tracée ces jours derniers par M. J. Bertrand et par M. Hatt [1], rien n'est plus facile que d'en déduire la déviation du plan d'oscillation et la loi du sinus. Mais on ne saurait admettre qu'il y ait là une simple question de Géométrie : la Dynamique y joue un rôle essentiel. Traitée sous ce point de vue au moyen des formules générales du mouvement relatif, par Binet et par M. Quet, la théorie du pendule libre a conduit à des résultats conformes à ceux que le génie intuitif de Foucault lui avait signalés. Seulement, on ne perdra pas de vue que, dans cette analyse, on a sup-

---

[1] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séances du 13 février et du 6 mars 188[illegible].

posé le pendule porté par un fil idéal, dont la section transversale est réduite à un point, et dans lequel, naturellement, il n'y a pas à se préoccuper de différences physiques en différents sens. Sur le terrain réel, le fil a toujours une section circulaire ou à peu près; son extrémité, encastrée dans une filière, participe forcément au mouvement de la Terre; toutes les fibres parallèles à la longueur du fil qui ont leur origine à son extrémité y éprouvent une sorte de torsion, qui tend à orienter le fil d'une certaine manière; la rotation qui en résulte entraîne la rotation de la boule autour de l'axe du fil, et met ainsi en jeu successivement l'élasticité du fil dans les différentes directions en le forçant à se plier tantôt en certains points, tantôt en d'autres. Qui ne voit là l'origine d'une foule de perturbations possibles?

Aussi, la théorie du pendule de Foucault a-t-elle été l'objet d'un grand nombre de savantes recherches, sans que l'on soit bien d'accord encore aujourd'hui sur tous les points. Les études de Poncelet (1), les Mémoires approfondis de Hansen (2), de Dumas (3), de MM. Serret et Yvon Villarceau (4) et, tout récemment, de M. le comte de Sparre (5), ainsi que les recherches expérimentales de M. Van der Willigen, à Harlem (6), montrent qu'il y a, dans cette question tant étudiée, bien des faces obscures, bien des problèmes non encore élucidés.

Toute la question a été reprise récemment, au point de vue théorique et expérimental, par un jeune savant hollandais, M. Kamerlingh Onnes. Dans une *Dissertation* assez étendue (7), il a montré que les expériences pendulaires de Foucault sont un cas particulier de phénomènes plus généraux, de perturbations pro-

---

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1860, séances du 24 septembre et du 1er octobre.

(2) *Theorie der Pendelbewegung mit Rücksicht auf die Gestalt und Bewegung der Erde.*

(3) *Journal de Crelle*, t. 50.

(4) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1872, 29 janvier, et 1879, 21 juillet.

(5) Thèse doctorale sur le mouvement du pendule conique à la surface de la Terre.

(6) *Le pendule Foucault au Musée Teyler* (*Archives du Musée Teyler*, t. II).

(7) *Nieuwe bewijzen voor de aswenteling der aarde*, Groningue, 1879, 200 p. et 4 planches.

duites par la rotation de la Terre dans les oscillations d'une tige élastique. Au laboratoire de Groningue, il a tenté l'expérience sous une forme toute nouvelle, caractérisée : 1° par le mode de suspension, qui consiste en un double système de couteaux d'acier croisés à angle droit, de façon à permettre des oscillations également libres dans tous les sens; 2° par la suppression de la résistance de l'air, le pendule étant renfermé dans une enveloppe conique où l'on a fait préalablement le vide; 3° par la faible longueur du pendule, qui mesurait seulement $1^m,2$ de longueur. La mise en mouvement du pendule, dans cet espace inaccessible à cause du vide, a demandé des dispositions ingénieuses qu'il serait trop long de décrire ici [1]. L'observation des oscillations s'effectuait au moyen d'un rayon de lumière pénétrant par une ouverture dans l'enveloppe, s'y réfractant sur deux prismes, et arrivant par une autre ouverture à une lunette munie d'un oculaire micrométrique. M. Onnes pense que la disposition adoptée par lui comporte une précision bien plus grande que celle dont on faisait usage d'après Foucault, bien que le pendule soit beaucoup plus court. La moyenne de ses observations, prolongées pendant plusieurs mois, lui a donné 12°,04 pour la vitesse horaire de la rotation de la Terre autour de la verticale de Groningue, au lieu de 12°,03 que lui assigne la théorie, résultat assez remarquable.

V.

L'influence perturbatrice qu'exerce la rotation du globe sur les corps en mouvement à sa surface est d'autant plus sensible que leur vitesse est plus grande : c'est là ce que la Mécanique nous révèle. Mais sur ces corps en mouvement rapide, sur la balle d'un fusil par exemple, mille autres causes perturbatrices agissent généralement, et, de plus, l'observation en est à peu près impossible. Il paraissait donc que l'expérience eût peu de prise sur de semblables phénomènes.

Ce fut encore le génie de Foucault qui triompha de cette difficulté. Il eut recours, pour cela, aux propriétés singulières, et jus-

---

(1) *Voir* dans l'Ouvrage cité, p. 247-250.

qu'alors peu remarquées, du mouvement d'un corps lourd tournant rapidement autour d'un axe de symétrie, comme la toupie (1).

Lorsqu'on suspend, par la méthode de Cardan, l'axe de figure d'un disque en bronze renflé sur ses bords, d'un *tore*, suivant l'expression usitée, de manière à lui donner la liberté de se mouvoir dans tous les sens autour d'un point fixe de cet axe, et qu'on lui imprime une rotation rapide autour de l'axe, on observe de curieux phénomènes. Ce tore, que le moindre effort agitait tout à l'heure lorsqu'il était au repos, oppose maintenant une résistance très sensible au changement de direction de son axe, et l'on peut transporter le pied de l'instrument dans tous les sens, le faire pirouetter : l'axe du tore reste sensiblement parallèle à lui-même. Veut-on le forcer à dévier? On éprouve une résistance étrange dont on a peine à se rendre compte, et l'axe tend toujours à s'échapper dans une direction *perpendiculaire* à celle qu'on s'efforce de lui imposer. C'est la *loi de la tendance des axes de rotation au parallélisme*, loi qui se peut formuler ainsi : « Lorsqu'un corps tourne vivement autour d'un axe de symétrie, et qu'une force agit sur cet axe pour changer sa direction, en d'autres termes, pour faire tourner le corps autour d'un nouvel axe de rotation, le mouvement attendu ne se produit pas; mais on observe un déplacement de l'axe de symétrie, qui tend à se mettre parallèle au nouvel axe, et cela de telle façon que les deux rotations (celle que possède le tore et celle que la force tendait à produire) s'effectuent dans le même sens (2). » C'est ce qui se passe dans la toupie, lorsque, au lieu de se renverser par l'action de la pesanteur, son axe de figure

---

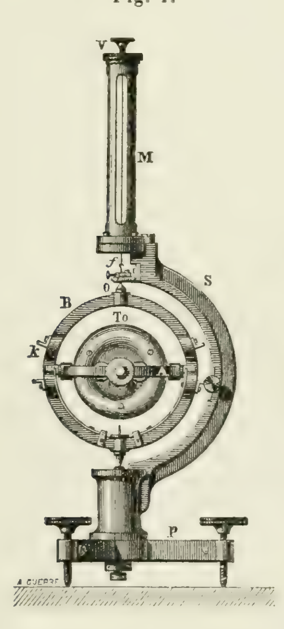
(1) Il est juste cependant de rappeler que Bohnenberger, parlant du petit appareil qui porte son nom, disait, en 1817 : « On peut le transporter dans des directions arbitraires et avec des vitesses quelconques, et pourtant l'axe de la sphère garde une direction constante. Si l'on a commencé à le diriger vers le nord, il se dirige dans toutes les positions vers le nord, comme une aiguille magnétique. » Et Poggendorff, citant ce passage *en juin* 1851, ajoutait : « En vertu de ce phénomène, la machine de Bohnenberger deviendrait, en même temps, un appareil pour la démonstration de la rotation de la Terre (peut-être pour la détermination de la latitude), si, ce qui ne semble pas impossible, on lui communiquait un mouvement continu par un ressort ». (*Annalen*, t. LXXXIII.)

(2) On nous permettra de renvoyer le lecteur, pour des explications plus complètes sur cette loi, à notre *Étude sur le problème de la rotation autour d'un point fixe* (*Annales de la Soc. Scient. de Bruxelles*, 2e année, 1878).

prend un mouvement conique autour de la verticale passant par son point d'appui. C'est encore là l'explication du jouet bien connu, qui nous montre un disque en rotation rapide, dont l'axe, supporté par une extrémité seulement, se maintient horizontal en dépit de la gravité. C'est enfin sur ce principe que sont fondés les ingénieux instruments de Fessel, de M. G. Sire, de M. Hardy, de M. Gruey. Parmi les conséquences importantes de ce principe, il faut signaler celle-ci : lorsque l'axe du tore est astreint, par un moyen quelconque, à rester dans un plan déterminé, et que ce plan est emporté lui-même dans le mouvement d'un support tournant autour d'une droite fixe, l'axe du tore en rotation ne peut rester en équilibre sur le plan mobile que dans la direction la plus rapprochée de la droite fixe.

Appuyé sur ces principes, après huit mois de lutte contre des

Fig. 1.



difficultés d'exécution presque insurmontables, Foucault présenta à l'Académie des Sciences, le 27 septembre 1852, un instrument construit par Froment avec une merveilleuse délicatesse, le *gyroscope*. Un tore en bronze T (*fig.* 1) est monté sur un axe d'acier.

dont les pointes pivotent librement sur deux vis implantées dans un anneau métallique A. Cet anneau repose, par des couteaux d'acier, sur deux plans durs, horizontaux, enchâssés dans un deuxième anneau B qui est vertical, suspendu à un fil sans torsion f et reposant sur un pivot, le tout porté par un support S dont le pied P est muni de vis calantes. Tel est l'instrument. En même temps que le tore tourne sur son axe, celui-ci peut s'orienter dans toutes les directions. Grâce à de petites vis plongeant dans la masse du tore, à d'autres masses mobiles distribuées sur les anneaux, on amène, à force de tâtonnements, le centre de gravité de tout le système mobile en coïncidence avec le point où se coupent l'horizontale passant par les arêtes des couteaux de l'anneau A et la verticale du fil auquel est suspendu l'anneau B; c'est le seul point fixe de tout ce système. La vis V sert à agir sur le fil suspenseur de manière à le débarrasser de toute torsion.

Ces diverses pièces sont montées avec une telle perfection qu'un souffle suffit à les mouvoir; mais cet état d'équilibre indifférent disparaît lorsque, transportant l'anneau A et le tore sur un rouage accélérateur dont la dernière roue dentée engrène avec un petit pignon monté sur l'axe du tore, on a communiqué à celui-ci une vitesse d'environ 200 tours par seconde et que l'on a replacé l'anneau et le tore sur le support. Dès cet instant, tout le système se consolide dans l'espace avec une surprenante énergie; la direction de l'axe d'acier est devenue, en quelque sorte, indépendante du mouvement de la Terre, qui ne s'y imprime plus que par une trépidation absolument insensible à l'œil.

Si l'axe était d'abord pointé sur une étoile, il continue à viser cette étoile tant que la vitesse du tore ne descend pas au-dessous d'une certaine limite, et par le déplacement apparent qu'il prend ainsi relativement aux objets environnants, comme une lunette montée sur un pied parallactique, déplacement que l'on observe au moyen d'un microscope, soit sur l'axe même, soit sur une des pièces de l'appareil, il révèle à l'observateur le mouvement réel de notre globe dans l'espace.

L'expérience comporte une forme peut-être plus décisive. Au lieu de laisser à l'axe du tore cette liberté complète d'orientation, fixons l'un à l'autre les anneaux A et B, de façon qu'il ne puisse plus se mouvoir que dans un plan horizontal : la tendance des

axes de rotation au parallélisme va produire son effet. L'axe du tore se dirigera vers le plan du méridien, oscillera de part et d'autre un certain temps, et finira par s'y arrêter, la pointe tournée vers le nord étant celle d'où la rotation du tore serait vue s'effectuant de droite à gauche. Laissons au contraire les couteaux libres, et maintenons l'anneau B perpendiculaire au plan du méridien : l'axe du tore ne pouvant plus que se balancer dans ce plan, après quelques oscillations, ira se fixer dans la direction parallèle à l'axe du monde, et l'équilibre n'aura lieu, cette fois encore, que lorsque les rotations de la Terre et du tore se feront dans le même sens.

Ainsi cet admirable instrument, en fournissant des signes sensibles de la rotation terrestre, peut même servir, en l'absence de la vue du ciel, à déterminer la direction de la méridienne et la latitude du lieu où se fait l'opération.

De savantes théories mathématiques ont, en perfectionnant nos connaissances mécaniques sur les corps tournants, confirmé les hardies déductions de Foucault; mais on ne doit pas se dissimuler les difficultés excessives que présente leur réalisation, et qui font du gyroscope un instrument d'un prix énorme, réservé au petit nombre. Bien peu de physiciens ont, après l'illustre inventeur, répété avec succès ces expériences si délicates.

Le gyroscope, en effet, pour fonctionner conformément aux vues de la théorie, doit satisfaire à un certain nombre de conditions *absolument rigoureuses* et presque irréalisables. La plus importante, en même temps que la plus difficile, est cette position idéale du centre de gravité du système mobile au point d'intersection de deux droites à peu près *géométriques*. Non seulement le tore doit, par sa construction, satisfaire à cette exigence que son centre de masse soit exactement sur la ligne qui joint les pivots de rotation, cette ligne étant, en outre, ce qu'on nomme un *axe d'inertie* du tore; mais il faut encore, par d'imperceptibles agissements sur les vis de réglage, amener très exactement le centre de gravité du tore et de l'anneau A sur la ligne d'arêtes des couteaux. Or, ceux qui ont passé de longues heures à essayer d'atteindre ce but savent que le problème est à peu près insoluble : qu'au moment où l'on semble y atteindre, les plus légères retouches suffisent pour faire passer le centre de gravité au-dessus, au-

dessous, à droite, à gauche, et pour modifier profondément la position d'équilibre du tore. D'ailleurs, il faut bien laisser un jeu, si imperceptible qu'il soit, entre les pivots de l'axe et les tourillons coniques dans lesquels ils tournent. Cela suffit pour que, dans le rapide mouvement du tore, son centre de gravité passe d'un côté à l'autre de l'axe de suspension, et comme le tore a forcément une masse considérable, il peut résulter de là une cause perturbatrice assez sensible pour masquer le phénomène principal. La force apparente due à la rotation de la Terre, qui tend à dévier l'axe du tore et à lui assigner une certaine position d'équilibre théorique, est excessivement faible ; d'autre part, les anneaux A et B, les vis de réglage, les têtes des vis dans lesquelles l'axe pivote, constituent des masses relativement considérables qui augmentent l'inertie du système mobile sans tendre à développer les forces d'orientation ; la faible action déviatrice de la Terre peut être insuffisante, si la vitesse rotatoire n'est pas excessive, à vaincre cette inertie compliquée de frottements. Voilà bien des motifs, pour l'opérateur consciencieux, de se demander si les phénomènes qu'il observe sont des signes réels de la gyration du globe, ou des indices révélateurs d'imperfections inconnues, contre lesquelles il trouve difficilement une garantie, un contrôle dans l'appareil lui-même.

Aussi ne sait-on ce qu'on doit le plus admirer, de l'instinct mécanique étonnant qui a guidé Foucault dans le choix des dispositions propres à rendre son appareil sensible aux influences du mouvement de la Terre, ou de la ténacité qu'il a dû déployer pour y vérifier les conditions qu'exigeait sa théorie, ou de l'habileté du constructeur célèbre à qui l'on a pu demander la réalisation d'un pareil programme.

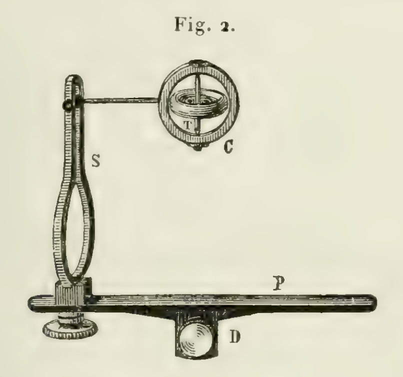
VI.

Il y a trois ou quatre ans, dans le cours de recherches de Mécanique pure sur les mouvements apparents, nous fûmes amené à essayer l'application de la théorie à un très joli appareil imaginé et construit par M. G. Sire, le *pendule gyroscopique* (¹).

(¹) La théorie analytique du pendule Sire a été traitée avec beaucoup d'habileté

Dans cet ingénieux instrument, un tore en bronze T est mobile autour d'un axe dans une chape C, suspendue par une tige relativement légère à un axe horizontal, autour duquel cette espèce de *pendule* peut osciller librement. L'axe horizontal pose sur un support S qui se fixe par son pied, au moyen d'une vis, dans un azimut quelconque, sur un *bâti* ou *bras* horizontal P (*fig.* 2), lequel, à son tour, est lié en D à un arbre vertical auquel un système d'engrenages communique une rotation assez rapide. Quand le tore est en repos, la tige pend verticalement, et, si l'on fait tourner le bâti P autour de son axe D, le pendule ne s'écarte guère de cette position d'équilibre stable que lui assigne la pesanteur. Mais les choses se modifient profondément si l'on a d'abord communiqué au tore

Fig. 2.



une rotation rapide autour de son axe de figure. On voit alors, dès que le bras a acquis une vitesse suffisante, la tige quitter sa position verticale et se porter, soit vers l'axe central D, soit vers le dehors, d'après le sens dans lequel tourne le tore, le support S ayant la position marquée sur la figure; l'axe du tore tend, conformément au principe du parallélisme des axes, à rapprocher sa direction de celle de l'axe central, et y parvient si les vitesses gyratoires sont assez rapides.

Lorsque l'on fixe le support dans une position telle que le plan d'oscillation du pendule soit à angle droit sur le bras P, on observe des phénomènes aussi paradoxaux. Le pendule, obéissant au

---

par M. Resal (*Annales des Mines*, 1859), mais il s'agissait d'appliquer une méthode différente.

même principe, se porte en avant ou en arrière du mouvement du bâti, selon le sens de la rotation qu'on a imprimée d'avance au tore.

Frappé de cette idée que la rotation de la Terre devrait produire, sur un pendule gyroscopique suspendu à un axe horizontal fixe, des effets analogues à ceux que la rotation du bâti P développe ici dans l'appareil de M. Sire, pourvu que l'instrument fût construit dans des conditions de sensibilité et de précision suffisantes, nous essayâmes d'aborder par l'analyse ce problème intéressant.

La question n'était pas simple. On n'avait guère considéré jusqu'alors, dans cet ordre de recherches, que le cas où, comme dans le gyroscope de Foucault, le centre de gravité du système mobile est fixé; où l'on n'a, par conséquent, à combiner que les effets de la rotation de la Terre et de celle du gyroscope. L'action de la gravité sur le système suspendu compliquait nécessairement le phénomène; il y avait de plus à tenir compte de la masse de la chape, etc. Mais une forme très simple, que nous avions réussi à donner aux équations du mouvement des corps pesants à la surface de la Terre, facilitait beaucoup la solution de ce problème ardu, et nous arrivâmes à déterminer les conditions de l'équilibre relatif et du mouvement du pendule gyroscopique sous l'influence de la rotation terrestre, pour un azimut quelconque du plan d'oscillation. Nous reconnûmes ainsi que, pour une vitesse très grande du tore, le pendule ne pouvait conserver sa position verticale d'équilibre, qu'il devait s'en écarter vers la droite ou vers la gauche suivant que le tore tournerait dans un sens ou dans l'autre.

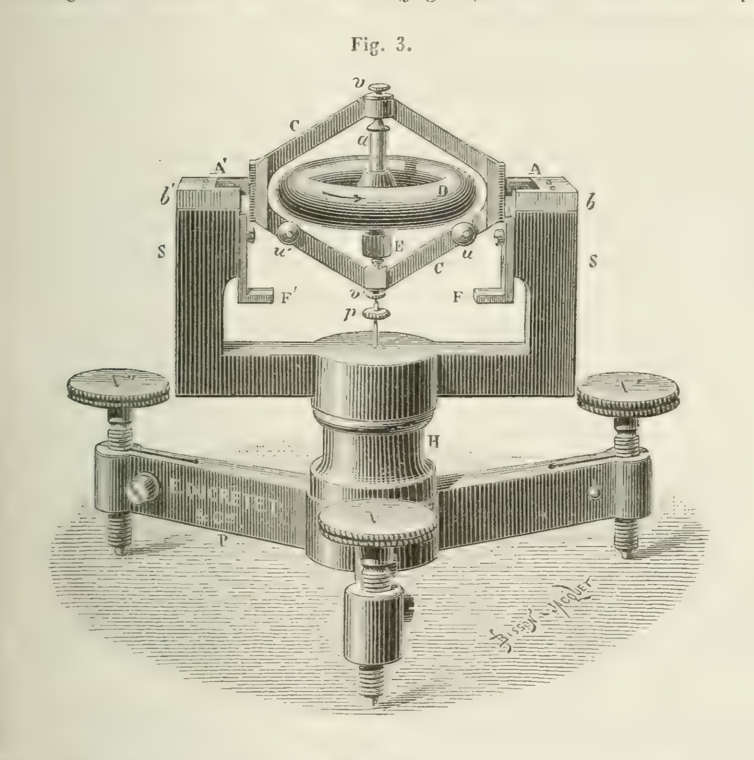
Mais les mêmes calculs qui conduisaient à ces résultats montraient que l'*inertie* du pendule autour de son axe de suspension exigerait, pour obtenir une déviation à peine sensible, que l'on imprimât au disque T une vitesse rotatoire dépassant toute limite raisonnable; dans les conditions habituelles de l'appareil, un écart de 8′ était tout ce que l'on pouvait espérer. Nous fûmes ainsi amené à étudier des dispositions plus avantageuses, où l'on eût fait une part moins large à l'inertie des masses mobiles. Un premier projet nous conduisit à une sorte de balance à deux tores, dont le fléau eût été en équilibre horizontal dans le plan du méridien, et se fût incliné plus ou moins dans les autres azimuts.

Mais, ici encore, l'inertie du système autour de son axe de sus-

pension rendait l'expérience peu accessible. Guidé par les indications très précises que fournissait la théorie, nous avons adopté définitivement une autre disposition qui rapprochait davantage de l'axe les centres des masses en mouvement, et c'est cette dernière tentative qui, grâce à la bonne volonté et à l'habileté d'un constructeur bien connu, M. E. Ducretet, nous a enfin conduit au résultat désiré.

Imaginons un tore en bronze D (*fig.* 3), dont l'axe d'acier a pi-

Fig. 3.



vote librement dans les tourillons coniques creusés dans des vis en acier v et v', qui traversent une chape CC en acier anglais, reposant par les couteaux A et A' sur des surfaces en acier trempé, de forme cylindrique, dont les couteaux occupent le fond. Ce système présente une symétrie exacte par rapport au plan passant par l'axe du tore et les arêtes des couteaux, et sa mobilité autour de celles-ci est telle qu'un souffle léger suffit à provoquer des oscillations. En agissant sur les vis v et v', sur d'autres vis u et u', on

amène, par tâtonnements successifs, le centre de gravité du tore et de la chape à se trouver sensiblement sur l'axe de suspension, en sorte que l'appareil resterait de lui-même (théoriquement) dans un état d'équilibre indifférent autour de cet axe. Mais la vis inférieure v' porte, en prolongement de l'axe du tore, une aiguille sur laquelle glisse, à frottement dur, un petit poids curseur p, qui, *lorsque le tore* D *est en repos,* assure à l'aiguille ou à l'axe du tore une position verticale d'équilibre *stable*, ce dont on s'assure en faisant osciller le système autour de l'axe de suspension. Enfin le support S des couteaux est monté sur un pied H, de façon à tourner à frottement dur autour d'un axe vertical, en sorte qu'on peut amener dans tous les azimuts le plan vertical passant par la ligne d'arêtes des couteaux.

L'axe du tore porte un pignon d'acier E destiné à être mis en rapport avec un système d'engrenages ou rouage accélérateur de Foucault, servant à communiquer au tore une rotation extrêmement rapide (150 tours par seconde environ).

Après avoir, au moyen des vis calantes V, V', V" et d'un niveau, assuré l'horizontalité de l'axe de suspension, on porte la chape sur le rouage moteur et l'on imprime au tore une rotation très rapide dans un sens voulu, après quoi l'on replace le système mobile sur son support en le guidant par des fourchettes F, afin que les arêtes des couteaux occupent exactement la position horizontale qui leur est assignée. C'est à cet instant que se développent les phénomènes délicats, mais bien nets, qui accusent la rotation du globe terrestre. La position d'équilibre stable du tore et de la chape ne répond plus, généralement, à une direction verticale de l'aiguille, et la théorie nous apprend ce qui suit :

1° C'est quand le plan d'oscillation de l'aiguille coïncide avec le plan du méridien que la déviation est la plus forte. L'aiguille se porte, par des oscillations décroissantes, vers le nord ou vers le sud, suivant que le tore tourne de gauche à droite ou de droite à gauche pour l'observateur qui le regarde d'*en haut*, la déviation étant d'ailleurs sensiblement plus forte dans le premier cas que dans le second.

2° Au contraire, si le plan d'oscillation de l'aiguille est perpendiculaire au méridien, ce qu'on réalise facilement, même pendant le mouvement du tore, en faisant tourner le support S sur son

pied, la position d'équilibre stable de l'aiguille est de nouveau verticale, comme lorsque le tore était immobile, et cela, quel que soit le sens de la gyration du tore.

3° Dans les azimuts intermédiaires, la position d'équilibre est plus ou moins inclinée entre les deux limites extrêmes.

4° L'inclinaison de l'aiguille, quand l'équilibre a lieu, est d'autant plus marquée que le tore tourne plus rapidement, que son diamètre est plus grand, que l'expérience se fait en un lieu plus rapproché de l'équateur, enfin que la distance du curseur p à l'axe de suspension est plus petite. On pourrait même réaliser une déviation allant jusqu'à l'horizontalité de l'aiguille, au moyen d'une vitesse de rotation suffisante.

L'appareil construit par M. Ducretet, moyennant certaines précautions auxquelles on s'accoutume facilement, réalise d'une manière très nette cet ensemble de phénomènes; nous lui avons donné le nom de *barogyroscope*, afin de rappeler que son principe repose sur une combinaison des effets de la pesanteur avec ceux de la rotation de la Terre et du disque.

L'avantage qu'il nous paraît offrir sur d'autres appareils destinés au même objet, indépendamment d'une exécution plus facile, c'est qu'il porte avec lui ses propres moyens de contrôle. Rien de plus simple que de vérifier, par la verticalité de l'aiguille, quand le tore est au repos, que le centre de gravité du système est dans la position voulue. Les phénomènes observés pendant la rotation du tore ne sont plus explicables, dès lors, que par le mouvement de la Terre, et d'ailleurs leur conformité avec les formules théoriques qui les ont fait découvrir ne peut laisser aucun doute sur leur origine.

L'Analyse mathématique nous a guidé constamment dans la construction de l'instrument, dans le choix des métaux, dans la forme de la chape, dans la distribution et la forme des masses pour obtenir des effets certains, sensibles, dont la valeur a été mesurée d'avance. Sous ce rapport, on pourrait dire que, si le gyroscope de Foucault fait surtout honneur au génie de l'inventeur et à son habileté expérimentale, notre appareil est principalement une démonstration de l'utilité de la Mécanique analytique.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. CATALAN.

Le dernier numéro de votre *Bulletin* donne (p. 48) l'indication suivante :

» Considérant de même le polynôme

$$(x+y+z)^{2m+1} - x^{2m+1} - y^{2m+1} - z^{2m+1},$$

« M. Muir montre qu'il est toujours divisible par

$$\tfrac{1}{3}\left[(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3\right] ».$$

La proposition est intéressante, mais elle n'est pas nouvelle. En effet, le polynôme entre parenthèses égale

$$3(x+y)(y+z)(z+x).$$

Or, dans mes *Mélanges mathématiques*, à propos du théorème de Fermat, j'ai démontré que

$$(x+y+z)^{2m+1} - x^{2m+1} - y^{2m+1} - z^{2m+1}$$

est divisible par

$$(x+y)(y+z)(z+x);$$

j'ai même donné l'expression du quotient. Donc...

Liège, 22 juillet 1882.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

G. KOENIGS, ancien Élève de l'École Normale supérieure. — SUR LES PROPRIÉTÉS INFINITÉSIMALES DE L'ESPACE RÉGLÉ. — Thèse présentée à la Sorbonne. — Paris, Gauthier-Villars; 1882.

C'est à Plücker qu'on rapporte généralement les fondements de la théorie de l'*espace réglé*, c'est-à-dire, de celui dont la ligne droite est l'élément. L'usage d'un système particulier de coordonnées, qu'il imagina, lui permit de faire reposer cette théorie sur les propriétés des complexes linéaires et de lui donner pour la première fois un développement systématique. D'éminents géomètres l'ont suivi dans cette voie : nous citerons M. Klein, qui a montré tout le parti qu'on peut tirer des coordonnées plückériennes et de leurs transformations linéaires.

Mais, dans l'étude des systèmes de droites, Plücker avait eu des précurseurs, entre autres, Monge, Malus, Hamilton, Sturm, Kummer, Möbius, Chasles. De plus, dans ces derniers temps, par des raisonnements divers, M. Lie est parvenu à montrer l'identité d'un complexe général avec le système géométrique qui accompagne certaines équations aux dérivées partielles. Tout portait donc à penser qu'on pouvait établir sur des bases profondes, indépendantes des coordonnées, grâce à l'étude directe du déplacement d'une ligne droite, toutes les propriétés infinitésimales de l'espace réglé : en un mot, il y avait lieu de chercher à appliquer à l'espace, ou variété, à quatre dimensions dont la droite est l'élément, la méthode dont Gauss a indiqué le premier l'usage, pour l'espace ponctuel.

L'auteur du présent Mémoire est parvenu à reconnaître que, dans l'espace réglé comme dans l'espace ponctuel, comme dans l'espace tangentiel, comme dans celui dont la sphère est l'élément, *toute propriété infinitésimale s'exprime par une propriété d'involution*.

M. Kœnigs commence par définir certains éléments primordiaux qui paraissent nécessaires et suffisants pour exprimer par leurs relations mutuelles les propriétés infinitésimales.

Un point a et un plan α mené par ce point forment un *couple* (a, α).

Parmi les couples en nombre ∞^2 qui sont situés sur une droite A (c'est-à-dire, dont le point est sur la droite A, contenue elle-même sur le plan α), il y en a une simple infinité (∞^1) qui vérifient une condition donnée : leur ensemble constitue une corrélation. Si la condition consiste en l'égalité des rapports anharmoniques des quatre points et les quatre plans de quatre couples quelconques de la corrélation, la corrélation est dite *anharmonique*. En vertu du théorème de M. Chasles sur la distribution des plans tangents dans les surfaces réglées, à toute droite infiniment voisine d'une droite A correspond une corrélation anharmonique sur cette droite A :

« *Ainsi, de même qu'un point de l'espace infiniment voisin d'un point fixe définit une direction issue de ce point fixe, et inversement, que dans une foule de questions la considération de cette direction peut être substituée à celle du point voisin, de même, dans l'espace réglé, une droite infiniment voisine d'une droite définit sur elle une corrélation anharmonique dont l'usage peut réciproquement être substitué à celui de la droite infiniment voisine, au moins dans certaines questions.* »

L'étude du déplacement d'une ligne droite infiniment voisine comprend donc tout d'abord celle des corrélations anharmoniques, en nombre ∞^3, qui existent sur la position initiale de la droite.

Si u_1, u_2, u_3, u_4 sont les paramètres dont dépend la connaissance d'une droite (u), et $u_i + du_i$ ceux qui se rapportent à une droite voisine $(u + du)$, l'évanouissement d'une forme homogène $f(du)$ des différentielles du exprime une propriété du système de droites (u) et $(u + du)$ et, par suite, de la corrélation qu'elles déterminent sur l'une d'elles (u). On peut même considérer les différentielles, du, ou des quantités finies t proportionnelles à ces différentielles, comme des coordonnées homogènes des diverses corrélations anharmoniques qui existent sur la droite (u).

Parmi ces corrélations, celles qui annulent une ou deux formes de coordonnées t constituent un *réseau* ou une *série* de corrélations. Ces réseaux et ces séries remplacent évidemment les cônes de directions élémentaires dans l'espace ponctuel.

Dans ce dernier espace, parmi les formes des différentielles, il

en est une qui se distingue spécialement : c'est celle qui représente le carré ds^2 de la distance élémentaire. Ici aussi, M. Kœnigs trouve qu'une forme quadratique *fondamentale* joue un rôle prépondérant.

La condition de rencontre de deux droites (u), $(u+du)$, s'exprime par l'évanouissement d'une forme quadratique $N(du)$: il est clair que toutes les formes telles que $KN(du)$, où K est seulement fonction des variables u, expriment par leur évanouissement la même propriété. L'auteur remarque qu'il est possible de choisir K, de sorte que la forme qui en résulte représente le *moment* des deux droites (u), $(u+du)$, c'est-à-dire, le produit de leur plus courte distance par le sinus de leur angle ; et c'est cette forme qui remplace le ds^2 de l'espace ponctuel. Les angles, l'orthogonalité se définissent par les mêmes formations covariantes. Il en résulte d'intéressantes analogies avec l'espace ponctuel.

Après avoir établi les propriétés infinitésimales du premier ordre, M. Kœnigs en fait diverses applications au théorème de Sturm sur les pinceaux, et à un mode particulier de représentation linéaire des surfaces, sur lequel M. Darboux, dans son cours de la Sorbonne, avait donné des indications dont l'auteur déclare avoir profité. Enfin, dans une dernière application, on examine un système de coordonnées, dans lequel les complexes linéaires offrent les propriétés des sphères, et l'on en déduit un système analogue aux coordonnées pentasphériques, dont les coordonnées plückériennes et le système sextuplement orthogonal de M. Klein sont des cas particuliers.

La troisième Partie du Mémoire est consacrée aux propriétés infinitésimales du second ordre. Le premier problème traité est une extension de la théorie des géodésiques et conduit à une interprétation géométrique des coordonnées appelées *normales* par M. Lipschitz.

A et B étant deux droites d'un système réglé (espace réglé, complexe ou congruence), il s'agit de trouver une surface réglée faisant partie du système, passant par A et B, et telle que l'intégrale

$$I = \int_A^B \sqrt{M(du)}$$

ait sa première variation nulle : $M(du)$ représentant la forme fon-

damentale. On arrive à ce résultat curieux : *Les hélicoïdes gauches sont les surfaces géodésiques de l'espace réglé.*

L'analogie précédemment reconnue entre les complexes linéaires et les sphères permet de définir les hyperboloïdes osculateurs d'une congruence, ou d'un complexe. Ici encore, le moment élémentaire $M(du)$ sert de lien aux diverses propriétés du second ordre. Ainsi, après avoir déterminé exactement le rôle du cône de Malus, elle montre que *les propriétés du second ordre sont identiques avec celles d'un faisceau de cônes du second degré dont fait partie le cône de Malus.*

MÉLANGES.

SUR UN PROBLÈME D'INTERPOLATION

(Extrait d'une Lettre à M. Hermite) ;

Par M. A. KORKINE.

« Monsieur,

« Dans le *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques* de M. Darboux (tome II, 1871), M. Ermakof a publié un critérium de convergence des séries à termes positifs, qui est plus sensible que tous les critériums semblables connus jusqu'à présent.

» Il existe un certain problème d'interpolation lié avec ce critérium ; c'est sur ce problème que je prends la liberté de vous présenter quelques réflexions.

» Soit ψx (¹) une fonction ou une branche d'une fonction qui a une seule valeur pour chaque valeur de x. Nous ferons la même supposition par rapport à toutes les autres fonctions que nous allons considérer, en ayant toujours soin de choisir une branche conve-

(¹) J'écris ψx au lieu de $\psi(x)$, pour ne pas embarrasser de parenthèses nos formules

nable, si plusieurs valeurs de la fonction correspondent à une même valeur de x.

» Soit encore $\psi_{-1}x$ la fonction inverse de ψx déterminée de manière qu'on ait

$$\psi_{-1}\psi x = \psi\psi_{-1}x = x.$$

» Convenons de représenter par les formules

$$\psi_1 x, \quad \psi_2 x, \quad \psi_3 x, \quad \ldots, \quad \psi_n x$$

respectivement les fonctions

$$\psi x, \quad \psi\psi x, \quad \psi\psi\psi x, \quad \ldots, \quad \psi\psi_{n-1}x,$$

et par les suivantes

$$\psi_{-2}x, \quad \psi_{-3}x, \quad \ldots, \quad \psi_{-n}x$$

les fonctions

$$\psi_{-1}\psi_{-1}x, \quad \psi_{-1}\psi_{-1}\psi_{-1}x, \quad \ldots, \quad \psi_{-1}\psi_{-n+1}x,$$

n étant un nombre entier positif.

» Conformément à cette notation, désignons aussi par $\psi_0 x$ la variable x elle-même.

» Alors, la fonction ψx étant donnée, on peut déterminer la valeur de $\psi_y x$ pour chaque valeur de x, y désignant un nombre entier positif ou négatif.

» Le problème d'interpolation que je viens de mentionner consiste dans la détermination de la fonction $\psi_y x$ pour toutes les valeurs de y, en l'assujettissant à satisfaire à l'équation

$$\psi_y\psi_z x = \psi_{y+z}x,$$

y et z étant des quantités quelconques.

» Comme nous supposons que ψx soit donnée, il faut que les valeurs de $\psi_y x$ pour les valeurs entières de y soient les mêmes que nous avons définies tout à l'heure.

» Avant d'aborder ce problème, nous déduirons une certaine identité qui nous servira dans la suite et qui conduit immédiatement au théorème de M. Ermakof.

» Soient $f(x)$ une fonction de x et a une constante; désignons aussi par la formule $\psi'_y x$ la dérivée $\frac{d\psi_y x}{dx}$.

» Cela posé, cette identité résultera, si l'on ajoute membre à membre celles qui suivent,

$$\int_a^{\psi a} f(x)\,dx = \int_a^{\psi a} f(x)\,dx, \quad \int_a^{\psi a} f(\psi x)\psi' x\,dx = \int_{\psi a}^{\psi_2 a} f(x)\,dx,$$

$$\int_a^{\psi a} f(\psi_2 x)\psi'_2 x\,dx = \int_{\psi_2 a}^{\psi_3 a} f(x)\,dx, \quad \dots,$$

$$\int_a^{\psi a} f(\psi_{y-1} x)\psi'_{y-1} x\,dx = \int_{\psi_{y-1} a}^{\psi_y a} f(x)\,dx;$$

on aura ainsi

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_a^{\psi a} [f(x) + f(\psi x)\psi' x + f(\psi_2 x)\psi'_2 x + \dots + f(\psi_{y-1} x)\psi'_{y-1} x]\,dx \\ &\quad = \int_a^{\psi_y a} f(x)\,dx. \end{aligned}\right.$$

» Pour en déduire le théorème de M. Ermakof, supposons qu'il soit donné une série

$$(2)\qquad f(0) + f(1) + f(2) + \dots,$$

à termes positifs, et prenons la fonction ψx telle que la série

$$(3)\qquad f(x) + f(\psi x)\psi' x + f(\psi_2 x)\psi'_2 x + \dots$$

soit également à termes positifs pour toutes les valeurs de x comprises entre a et ψa.

» Supposons aussi que pour les valeurs indéfiniment croissantes de y la quantité $\psi_y x$ soit positive et indéfiniment croissante, x étant compris entre a et ψa.

» Cela posé, considérons le rapport

$$\frac{f(\psi_y x)\psi'_y x}{f(\psi_{y-1} x)\psi'_{y-1} x} = \frac{f(\psi\psi_{y-1} x)\psi'\psi_{y-1} x}{f(\psi_{y-1} x)},$$

de deux termes consécutifs de la série (3), qui devient

$$(4)\qquad \frac{f(\psi z)\psi' z}{f z},$$

en faisant $\psi_{y-1} x = z$.

» Si le rapport (4) pour les valeurs infiniment grandes de z reste inférieur à une certaine quantité, qui est elle-même inférieure à

l'unité, la série (3) est convergente et le premier terme de l'identité (1) sera fini quelque grand que soit y. Il en est de même du second terme, qui devient à la limite

$$\int_a^\infty f(x)\,dx.$$

» Or dans ce cas la série (2), d'après le théorème de Cauchy, est aussi convergente.

» Si le rapport (4) reste supérieur à l'unité, z étant infiniment grand, la série (3) est divergente et les deux termes de l'identité (1) seront infiniment grands pour les valeurs indéfiniment croissantes de y.

» Dans ce cas, en vertu du même théorème de Cauchy, la série (2) est divergente.

» M. Ermakof déduit de son théorème un remarquable caractère de convergence des séries, en faisant

$$\psi z = e^z.$$

» En revenant à notre problème, laissons à ψx la signification d'une fonction donnée quelconque.

» Nous allons chercher d'abord la forme que doit avoir la fonction $\psi_y x$, si elle est continue par rapport à x et y, au moins entre certaines limites. Nous supposons aussi que la dérivée $\frac{\partial \psi_y x}{\partial y}$ tende vers une limite déterminée lorsque y s'approche de zéro.

» Désignons cette limite par λx et différentions l'équation

$$\psi_z \psi_y x = \psi_{y+z} x$$

par rapport à z; nous aurons

$$\frac{\partial \psi_z \psi_y x}{\partial z} = \frac{\partial \psi_{y+z} x}{\partial z} = \frac{\partial \psi_{y+z} x}{\partial y},$$

ou, en faisant $\psi_y x = \xi$,

$$\frac{\partial \psi_z \xi}{\partial z} = \frac{\partial \psi_{y+z} x}{\partial y}.$$

» Posons $z = 0$ dans cette équation. Comme la dérivée $\frac{\partial \psi_z \xi}{\partial z}$ deviendra alors $\lambda \xi$ et que $\psi_{y+z} x$ sera ξ, il viendra

$$\lambda \xi = \frac{\partial \xi}{\partial y}.$$

» En désignant par $\varphi\xi$ l'intégrale

$$\int \frac{d\xi}{\lambda\xi},$$

on déduit de là

$$\varphi\xi = \varphi\psi_y x = y + \theta x,$$

θx étant une fonction de x.

» Il résulte de cette équation celle qui suit

$$\psi_y x = \varphi_{-1}(y + \theta x).$$

» En ayant égard à ce que $\psi_0 x = x$, on aura, pour $y = 0$,

$$x = \varphi_{-1}(\theta x);$$

par conséquent $\varphi_{-1} x$ et θx sont des fonctions inverses l'une de l'autre; θx ne diffère donc pas de φx.

» Ainsi la forme définitive de $\psi_y x$ peut être exprimée par la formule

$$(5) \qquad \psi_y x = \varphi_{-1}(y + \varphi x).$$

» Pour que les valeurs de $\psi_y x$, qui correspondent aux valeurs entières de y, soient celles que nous avons définies précédemment, il faut et il suffit que la fonction φx satisfasse à l'équation

$$(6) \qquad \varphi_{-1}(1 + \varphi x) = \psi x,$$

que l'on obtient en faisant $y = 1$ dans la précédente.

» Réciproquement, si l'équation (6) est satisfaite la formule (5) donnera une solution du problème proposé.

» En effet, on déduit de cette formule

$$\psi_z \psi_y x = \varphi_{-1}(z + \varphi\psi_y x),$$

et encore

$$\varphi\psi_y x = y + \varphi x;$$

donc on aura

$$\psi_z \psi_y x = \varphi_{-1}(z + y + \varphi x).$$

» Le second terme de cette équation représentant $\psi_{y+z} x$ en vertu de la même formule (5), il en résulte

$$\psi_z \psi_y x = \psi_{y+z} x,$$

y et z étant des quantités quelconques.

» Ainsi, puisque la condition (6) est remplie, la formule (5) donne effectivement une solution.

» De cette manière la recherche de la fonction $\psi_y x$ est réduite à celle de la fonction φx, qui ne dépend que d'une seule variable x.

» Proposons-nous maintenant de déduire toutes les valeurs de $\psi_y x$ lorsqu'une seule d'entre elles est connue.

» Soit φx la fonction qui détermine cette solution connue de notre problème, de sorte qu'elle soit donnée par la formule

$$\psi_y x = \varphi_{-1}(y + \varphi x).$$

» Toute autre solution peut être exprimée par l'équation

$$\psi_y x = \mu_{-1}(y + \mu x),$$

μx et $\mu_{-1} x$ étant des fonctions inverses, qui satisfont à la condition

$$\mu_{-1}(1 + \mu x) = \psi x.$$

» En supposant que y soit un nombre entier, ces deux formules représenteront la même quantité $\psi_y x$.

» Or on en déduit

$$\varphi\psi_y x = y + \varphi x, \quad \mu\psi_y x = y + \mu x,$$

par conséquent

$$\mu\psi_y x - \varphi\psi_y x = \mu x - \varphi x.$$

» En remplaçant ici $\psi_y x$ par sa valeur

$$\varphi_{-1}(y + \varphi x),$$

nous aurons

$$\mu\varphi_{-1}(y + \varphi x) - \varphi\varphi_{-1}(y + \varphi x) = \mu\varphi_{-1}(y + \varphi x) - (y + \varphi x) = \mu x - \varphi x.$$

» Faisons $\varphi x = u$ et par conséquent $x = \varphi_{-1} u$; il viendra

$$\mu\varphi_{-1}(y + u) - (y + u) = \mu\varphi_{-1} u - u.$$

» La fonction $\mu\varphi_{-1} u - u$ est donc périodique ayant pour période l'unité, puisque y est un nombre entier arbitraire. En la désignant par σu, nous aurons

$$\mu\varphi_{-1} u = u + \sigma u,$$

ou, en remplaçant $\varphi_{-1} u$ par x et u par φx,

$$\mu x = \varphi x + \sigma\varphi x.$$

» Ainsi la fonction μx, qui donne une seconde solution, se déduit de la fonction φx, qui détermine la première, par l'addition à φx d'un terme $\sigma\varphi x$, σx étant une fonction périodique avec la période égale à l'unité.

» C'est la seule condition à laquelle doit satisfaire σx, car si l'on prend au lieu de φx la fonction

$$\mu x = \varphi x - \sigma\varphi x,$$

on obtient toujours une seconde solution.

» En effet, on a

$$\varphi\psi_y x = y + \varphi x,$$

et supposant que y soit un entier, il viendra

$$\sigma\varphi\psi_y x = \sigma(y + \varphi x) = \sigma\varphi x.$$

» Donc on aura

$$\varphi\psi_y x + \sigma\varphi\psi_y x = y + \varphi x + \sigma\varphi x,$$

ou bien

$$\mu\psi_y x = y + \mu x.$$

» Il résulte de là

$$\psi_y x = \mu_{-1}(y + \mu x).$$

» Ainsi la fonction $\psi_y x$ donnée par l'équation

$$\psi_y x = \varphi_{-1}(y + \varphi x)$$

est représentée aussi, pour les valeurs antérieures de y, par la formule

$$\mu_{-1}(y + \mu x).$$

» Cela étant, cette formule donne une solution lorsque y est une quantité quelconque, comme nous avons démontré. »

» Il suit de là qu'il suffit de trouver une seule solution de notre problème pour en déduire toutes les autres. En effet, $\psi_y x$ étant connue, on déterminera φx en résolvant par rapport à y l'équation

$$\psi_y a = x,$$

a étant une constante. La valeur de y en fonction de x, obtenue de cette manière, est la fonction φx, telle que

$$\varphi_{-1}(y + \varphi x) = \psi_y x,$$

comme il est facile de s'en assurer.

» Ayant φx, on trouvera toutes les solutions, comme il a été expliqué ci-dessus.

» Passons maintenant à la détermination de la fonction $\psi_y x$, lorsque ψx est donnée. On peut procéder en suivant deux méthodes : la première consiste dans la recherche de la fonction φx, dont on déduira $\psi_y x$; la seconde, dans le développement direct de $\psi_y x$ en série, sans déterminer préalablement φx.

» Si l'on veut chercher φx, il faut résoudre l'équation

$$\varphi_{-1}(1 + \varphi x) = \psi x, \tag{6}$$

ou bien cette autre, qui lui est équivalente,

$$1 + \varphi x = \varphi \psi x. \tag{7}$$

» On trouve l'équation (7) dans un Mémoire d'Abel (¹), où il réduit sa résolution à celle d'une équation ordinaire aux différences finies. Or, comme celle-ci n'est pas plus facile à résoudre que l'autre, sa solution étant la valeur de la fonction $\psi_y x$ pour une valeur particulière de x, j'essayerai de traiter directement l'équation (7).

» Soit $f(x)$ une fonction quelconque, mais telle que la série

$$\tag{8} \left\{ \begin{array}{l} f(x) + f(\psi x)\psi' x + f(\psi_2 x)\psi'_2 x + f(\psi_3 x)\psi'_3 x + \ldots \\ \qquad + f(\psi_{-1} x)\psi'_{-1} x + f(\psi_{-2} x)\psi'_{-2} x + f(\psi_{-3} x)\psi'_{-3} x + \ldots \end{array} \right.$$

soit convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre certaines limites.

» Comme la fonction $\psi_y x$ est connue, tant que y est un nombre entier, si l'on a choisi la fonction $f(x)$, on peut, pour une valeur donnée de x, déterminer la valeur de chaque terme de la série (8), et par conséquent celle de la somme d'autant de termes qu'on voudra.

» La somme de la série (8), que nous allons désigner par $\omega(x)$, est une fonction de x, qui satisfait évidemment à l'équation

$$\omega(\psi x)\psi' x = \omega(x). \tag{9}$$

» En prenant une constante C et la valeur de x comprises entre

---

(¹) *Détermination d'une fonction au moyen d'une équation qui ne contient qu'une seule variable* (*Œuvres complètes*, t. II).

les limites de convergence de la série (8), faisons

$$\theta(x) = \int_g^x \omega(x)\,dx,$$

et nous aurons, en vertu de l'équation (9),

$$(10) \qquad \theta(\psi x) = \theta(x) + \mathrm{C},$$

C étant une constante déterminée, exprimée par la différence $\theta(\psi x) - \theta(x)$.

» En faisant

$$\frac{1}{\mathrm{C}}\,\theta(x) = \varphi x,$$

l'équation (10) deviendra

$$\varphi\psi x = \varphi x + 1,$$

et la fonction φx est donc $\frac{1}{\mathrm{C}}\,\theta(x)$.

» Si l'on peut assigner une quantité a, de telle façon que la série (8) soit convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre a et ψa, il est possible de déterminer la constante C indépendamment de la fonction $\theta(x)$.

» En effet, d'après l'identité (1), on a

$$\int_a^{\psi a} [f(x) + f(\psi x)\psi' x + f(\psi_2 x)\psi'_2 x + \ldots$$
$$+ f(\psi_{\nu-1} x)\psi'_{\nu-1} x]\,dx = \int_a^{\psi_\nu a} f(x)\,dx.$$

» On aura de la même manière

$$\int_a^{\psi a} [f(\psi_{-1} x)\psi'_{-1} x + f(\psi_{-2} x)\psi'_{-2} x + \ldots$$
$$+ f(\psi_{-\zeta} x)\psi'_{-\zeta} x]\,dx = \int_{\psi_{-\zeta} a}^{a} f(x)\,dx.$$

» En ajoutant ces deux identités terme à terme, on aura

$$\int_a^{\psi a} [f(x) + f(\psi x)\psi' x + f(\psi_2 x)\psi'_2 x + \ldots + f(\psi_{\nu-1} x)\psi'_{\nu-1} x$$
$$+ f(\psi_{-1} x)\psi'_{-1} x + f(\psi_{-2} x)\psi'_{-2} x + \ldots + f(\psi_{-\zeta} x)\psi'_{-\zeta} x]\,dx$$
$$= \int_{\psi_{-\zeta} a}^{\psi_\nu a} f(x)\,dx.$$

» Supposons maintenant les entiers y et z infiniment grands et passons à la limite; comme celle du premier terme est

$$\int_{a}^{\psi a} \omega(x)\,dx = \theta(\psi a) - \theta(a) = C,$$

nous aurons

$$C = \int_{\lim \psi_{-z} a}^{\lim \psi_{y} a} f(x)\,dx.$$

» Quant au choix convenable de la fonction $f(x)$, nous ne nous en occuperons pas ici, cette question dépendant de la nature de la fonction ψx.

» Le second moyen de déterminer $\psi_y x$ est son développement en série suivant les puissances croissantes entières et positivesde la différence $x - \alpha$, α étant une racine de l'équation

$$\psi x = x.$$

» Je suppose que la fonction ψx soit aussi développable en une semblable série. Je ne discuterai point la possibilité de ces développements; en les supposant possibles, je me propose seulement de déterminer les coefficients de la série exprimant $\psi_y x$ en fonction de ceux de la série qui représente ψx.

» Il est évident que, en vertu de l'équation

$$\psi \alpha = \alpha,$$

on aura

$$\psi_y \alpha = \alpha$$

pour toutes les valeurs entières de y.

» Si y n'est pas un entier, on peut faire

$$y = m + \lambda,$$

m étant un nombre entier et $\lambda < 1$. Comme on a

$$\psi \psi_\lambda \alpha = \psi_\lambda \psi \alpha = \psi_\lambda \alpha,$$

la quantité $\psi_\lambda \alpha$ est une racine de l'équation $\psi x = x$.

» Or on a de même

$$\psi_y \alpha = \psi_{m+\lambda} \alpha = \psi_\lambda \psi_m \alpha = \psi_\lambda \alpha;$$

donc $\psi_y \alpha$ est aussi une racine de cette équation.

» En supposant que $\psi_y x$ soit une fonction continue de y dans

le voisinage de la valeur $y = 0$ et en admettant la possibilité des séries mentionnées, il faut qu'on ait $\psi_y \alpha = \alpha$ pour des valeurs quelconques de y.

» Soit maintenant

$$\psi x = \alpha + A_0(x-\alpha) + A_1(x-\alpha)^2 + A_2(x-\alpha)^3 + \ldots$$

le développement de ψx. Nous considérons les coefficients

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad \ldots.$$

ainsi que α, comme connus, et nous allons nous borner au cas le plus ordinaire, en supposant que A_0 ne soit pas nul.

» En vertu de ce que $\psi_y \alpha = \alpha$, le développement de $\psi_y x$ sera de la forme

$$(a) \qquad \psi_y x = \alpha + \alpha_0(x-\alpha) + \alpha_1(x-\alpha)^2 + \alpha_2(x-\alpha)^3 + \ldots.$$

» Les coefficients

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots$$

sont des fonctions de y, telles que pour $y = 0$ on a

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 0,$$

car $\psi_0 x = x$, et pour $y = 1$ on a

$$\alpha_0 = A_0, \quad \alpha_1 = A_1, \quad \alpha_2 = A_2, \quad \ldots,$$

puisque $\psi_1 x = \psi x$.

» Pour déduire les valeurs générales des coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$, on peut procéder de différentes manières.

» D'après la forme $\varphi_{-1}(y + \varphi x)$ de la fonction $\psi_y x$, il est évident que le rapport

$$\frac{\partial \psi_y x}{\partial y} : \frac{\partial \psi_y x}{\partial x}$$

est égal à $\frac{1}{\varphi' x} = \lambda x$. Donc on aura

$$\frac{\partial \psi_y x}{\partial y} = \frac{\partial \psi_y x}{\partial x} \cdot \lambda x.$$

» Le développement de λx étant de la forme

$$\lambda x = \beta_0(x-\alpha) + \beta_1(x-\alpha)^2 + \beta_2(x-\alpha)^3 + \ldots,$$

l'équation précédente fournit l'identité

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial y}(x-\alpha) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}(x-\alpha)^2 + \ldots$$
$$= [\alpha_0 + 2\alpha_1(x-\alpha) + 3\alpha_2(x-\alpha)^2 + \ldots][\beta_0(x-\alpha) + \beta_1(x-\alpha)^2 + \ldots].$$

» En comparant les coefficients des mêmes puissances de $x - \alpha$ dans les deux termes, on en déduira ces équations

$$\frac{\partial\alpha_0}{\partial y} = \beta_0\alpha_0, \quad \frac{\partial\alpha_1}{\partial y} = 2\beta_0\alpha_1 - \beta_1\alpha_0, \quad \ldots.$$

» De la première il suit

$$\alpha_0 = C e^{\beta_0 y},$$

C étant une constante. Or pour $y = 0$ on a $\alpha_0 = 1$, et pour $y = 1$, $\alpha_0 = A_0$; donc

$$C = 1, \quad \beta_0 = \log A_0, \quad \alpha_0 = A_0^y.$$

» De la même manière, de l'équation

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial y} = 2\beta_0\alpha_1 - \beta_1\alpha_0,$$

il résulte

$$\alpha_1 = A_1 A_0^{y-1}\frac{A_0^y - 1}{A_0 - 1},$$

et ainsi de suite.

» On parvient plus directement aux valeurs des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, comme il suit.

» On a l'identité

(11) $$\psi_y\psi x - \alpha = \psi\psi_y x - \alpha.$$

» En ayant égard aux développements de ψx et $\psi_y x$, il vient

$$\psi_y\psi x - \alpha = \alpha_0(\psi x - \alpha) + \alpha_1(\psi x - \alpha)^2 + \alpha_2(\psi x - \alpha)^3 + \ldots,$$
$$\psi\psi_y x - \alpha = A_0(\psi_y x - \alpha) + A_1(\psi_y x - \alpha)^2 + A_2(\psi_y x - \alpha)^3 + \ldots.$$

» Or, en désignant $x - \alpha$, pour abréger, par z, on a

$$\psi x - \alpha = A_0 z + A_1 z^2 + A_2 z^3 + \ldots,$$
$$\psi_y x - \alpha = \alpha_0 z + \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z^3 + \ldots;$$

donc on obtient

$$\psi_y\psi x - \alpha = \alpha_0(A_0 z + A_1 z^2 + A_2 z^3 + \ldots)$$
$$+ \alpha_1(A_0 z + A_1 z^2 + A_2 z^3 + \ldots)^2 + \alpha_2(A_0 z + A_1 z^2 + \ldots)^3 + \ldots,$$
$$\psi\psi_y x - \alpha = A_0(\alpha_0 z + \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z^3 + \ldots)$$
$$+ A_1(\alpha_0 z + \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z^3 + \ldots)^2 + A_2(\alpha_0 z + \alpha_1 z^2 + \ldots)^3 + \ldots.$$

» En vertu de l'identité (11), ces deux développements sont égaux. En comparant les coefficients des mêmes puissances de z,

on aura les équations pour déterminer successivement α_1, α_2, α_3, α_4, ..., la quantité α_0 étant trouvée et égale à A_0^y.

» Ces équations sont

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} & A_1\alpha_0 + A_0^2\alpha_1 = A_0\alpha_1 + A_1\alpha_0^2, \\ & A_2\alpha_0 + 2A_0A_1\alpha_1 + A_0^3\alpha_2 = A_0\alpha_2 + 2A_1\alpha_0\alpha_1 + A_2\alpha_0^3, \\ & A_3\alpha_0 + (2A_0A_2 + A_1^2)\alpha_1 + 3A_0^2A_1\alpha_2 + A_0^4\alpha_3 \\ & \quad = A_0\alpha_3 + A_1(2\alpha_0\alpha_2 + \alpha_1^2) + 3A_2\alpha_0^2\alpha_1 + A_3\alpha_0^4, \\ & A_4\alpha_0 + 2(A_0A_3 + A_1A_2)\alpha_1 + 3(A_0^2A_2 + A_0A_1^2)\alpha_2 + 4A_0^3A_1\alpha_3 + A_0^5\alpha_4 \\ & \quad = A_0\alpha_4 + 2A_1(\alpha_0\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2) + 3A_2(\alpha_0^2\alpha_2 + \alpha_0\alpha_1^2) + 4A_3\alpha_0^3\alpha_1 + A_4\alpha_0^5, \end{aligned}\right.$$

et ainsi de suite.

» On en déduit facilement, en ayant égard à la valeur,

$$\alpha_0 = A_0^y,$$

$$\alpha_1 = A_1A_0^{y-1}\,\frac{A_0^y - 1}{A_0 - 1},$$

$$\alpha_2 = 2A_1^2A_0^{y-1}\,\frac{(A_0^y - 1)(A_0^{y-1} - 1)}{(A_0 - 1)(A_0^2 - 1)} + A_2A_0^{y-1}\,\frac{A_0^{2y} - 1}{A_0^2 - 1},$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 = {} & A_1^3A_0^{y-2}\,\frac{(A_0^y - 1)(A_0^{y-1} - 1)[(A_0 + 5)A_0^y - 5A_0^2 - 1]}{(A_0 - 1)(A_0^2 - 1)(A_0^3 - 1)} \\ & + A_1A_2A_0^{y-1}\,\frac{(A_0^y - 1)(A_0^{y-1} - 1)[(3A_0 + 5)A_0^y + (5A_0 + 2)]}{(A_0^2 - 1)(A_0^3 - 1)} \\ & + A_3A_0^{y-1}\,\frac{A_0^{3y} - 1}{A_0^3 - 1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_4 = {} & 2A_1^4A_0^{y-1}\,\frac{(A_0^y - 1)(A_0^{y-1} - 1)(A_0^{y-2} - 1)[(2A_0^2 - 3A_0 + 7)A_0^y - (7A_0^3 + 2A_0 + 3)]}{(A_0 - 1)(A_0^2 - 1)(A_0^3 - 1)(A_0^4 - 1)} \\ & + A_1^2A_2A_0^{y-2}\,\frac{\left\{\begin{aligned} & (A_0^y - 1)(A_0^{y-1} - 1)[(3A_0^3 - 14A_0^2 + 20A_0 + 21)A_0^{2y} \\ & \qquad + (-9A_0^4 - 15A_0^3 + 2A_0^2 + 9A_0 + 1)A_0^y \\ & \qquad - (21A_0^4 + 12A_0^3 + 6A_0^2 + 5A_0 + 2)] \end{aligned}\right\}}{(A_0^2 - 1)(A_0^3 - 1)(A_0^4 - 1)} \\ & - 2A_1A_3A_0^{y-1}\,\frac{\left\{\begin{aligned} & (A_0^y - 1)(A_0^{y-1} - 1)[(2A_0^2 - 2A_0 + 3)A_0^{2y} \\ & \qquad + (2A_0^2 - 3A_0 + 1)A_0^y - 3A_0^2 + A_0 + 1] \end{aligned}\right\}}{(A_0^3 - 1)(A_0^4 - 1)} \\ & + 3A_2^2A_0^y\,\frac{(A_0^{2y} - 1)(A_0^{2y-2} - 1)}{(A_0^2 - 1)(A_0^4 - 1)} + A_4A_0^{y-1}\,\frac{A_0^{4y} - 1}{A_0^4 - 1}, \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

» On peut vérifier ces expressions, en remarquant que, si l'on prend pour y un entier positif arbitraire et pour A_0 une racine de l'unité de degré quelconque, les valeurs de α_1, α_2, α_3, ... ne deviennent point infinies.

» Les équations (12) déterminent aussi les coefficients β_1, $\beta_2, \ldots$, du développement de la fonction $\lambda x = \frac{1}{\varphi' x}$. En effet, nous avons vu que la dérivée

$$\frac{\partial \psi_y x}{\partial y} = \frac{\partial \alpha_0}{\partial y}(x - \alpha) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}(x - \alpha)^2 + \ldots$$

devient λx, pour $y = 0$; donc les quantités $\frac{\partial \alpha_0}{\partial y}, \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}, \frac{\partial \alpha_2}{\partial y}, \cdots$, pour $y = 0$, ont respectivement les valeurs $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$.

» Différentions donc par rapport à y les équations (12) et faisons ensuite $y = 0$ dans les équations que nous allons ainsi obtenir.

» En remarquant que α_0 se réduira à l'unité et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ s'évanouiront, on obtient

$$\begin{gathered}
A_1\beta_0 + A_0^2\beta_1 = A_0\beta_1 - 2A_1\beta_0, \\
A_2\beta_0 + 2A_0A_1\beta_1 + A_0^3\beta_2 = A_0\beta_2 - 2A_1\beta_1 + 3A_2\beta_0, \\
A_3\beta_0 + (2A_0A_2 + A_1^2)\beta_1 + 3A_0^2A_1\beta_2 + A_0^4\beta_3 = A_0\beta_3 - 2A_1\beta_2 + 3A_2\beta_1 + 4A_3\beta_0,
\end{gathered}$$

et ainsi de suite.

» Or nous avons trouvé $\beta_0 = \log A_0$; par conséquent,

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{A_1}{A_0(A_0 - 1)} \log A_0, \\
\beta_2 &= \frac{2(A_0A_2 - A_1^2)}{A_0^2(A_0 - 1)(A_0 - 1)} \log A_0, \\
\beta_3 &= \frac{3A_0^2(A_0 + 1)A_3 - (8A_0 + 7)A_0A_1A_2 - (5A_0 - 4)A_1^3}{A_0^3(A_0^3 - 1)(A_0 - 1)} \log A_0,
\end{aligned}$$

et ainsi de suite. En faisant dans la série (a) $\alpha = 0$ et $A_0 = 1$, on aura, comme cas particulier, celle qui a été obtenue par M. Cayley (*Quarterly Journal*, t. III) et mentionnée depuis par M. Schröder (*Mathematische Annalen*, t. III).

» Je dois réclamer toute votre bienveillance, Monsieur, pour les considérations précédentes, qui ont tant de défauts et je m'estimerai très heureux si elles peuvent jeter quelque jour sur le problème en question.

» C'est en espérant qu'elles peuvent servir aux géomètres, qui s'occuperont du même problème, que je vous prie, Monsieur, de vouloir bien faire paraître un extrait de cette Lettre dans le *Bul-*

letin de M. Darboux, où est aussi inséré le Mémoire de M. Ermakof.

» Veuillez agréer, Monsieur, l'expression de mon profond respect. « A. KORKINE. »

1er mai 1885.

THÉORIE DE LA SÉRIE DE FOURIER [1].

PAR M. LE Dr AXEL HARNACK, A DRESDE.

I. — PRINCIPES GÉNÉRAUX DU CALCUL INTÉGRAL.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(x)$ soit intégrable entre des limites a et b a été énoncée par Riemann [2] de la manière suivante : « *Wenn die Function $f(x)$ immer endlich ist, und bei unendlichem Abnehmen sämmtlicher Theilintervalle δ die Gesammtgrosse s der Intervalle, in welchen die Schwankungen der Function $f(x)$ grösser als eine gegebene Grösse σ sind, stets unendlich klein wird, so convergirt die Summe*

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2 \delta_2) + \ldots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n \delta_n),$$

wenn sämmtliche δ unendlich klein werden.

Pour donner à ce principe une forme plus courte, il est opportun de ranger une masse infinie de points dans un intervalle linéaire, comme il suit : Si l'on appelle l'intervalle de $x - \delta$ à $x + \delta$ l'*entourage* d'un point x d'une longueur 2δ, où δ représente une petite quantité quelconque, mais finie, on nommera « masse discrète » (*discrete Menge*) une multitude infinie de points, contenus entre

---

(1) Ce travail n'est en partie qu'une nouvelle rédaction d'un article publié par moi dans les *Math. Annalen.*, t. XVII et XIX ; j'ai regardé comme un devoir de le publier, parce que la faute relevée (p. 526) a de l'influence sur quelques principes énoncés par moi.

(2) *Œuvres comp.*, p. 227. *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe.*

les limites a et b, si toutefois il est possible de renfermer les points de cette quantité dans des entourages dont la somme peut être faite plus petite qu'un nombre quelconque, tandis que le nombre des entourages pourra croître à volonté.

Par contre, on nommera « masse linéaire » la multitude infinie de points, si la somme des entourages ne peut pas être aussi petite qu'on le désire.

L'idée de quantité discrète, qui a été énoncée pour la première fois par H. Hankel (¹), ne peut pas être confondue avec celle d'une quantité de points de première espèce qui sert de fondement à une série de théorèmes généraux du Calcul intégral dans les travaux de MM. Cantor (²) et Dini (³). Mais il est nécessaire de remarquer que chaque quantité de points de première espèce est en même temps une masse discrète. Pour rendre aussi claire que possible cette différence, je vais d'abord donner quelques exemples faciles.

1. Chaque nombre fini de points dans un intervalle d'une longueur finie est une quantité discrète; on désigne leur ordre par o.

2. La quantité infinie de points dans l'intervalle de o à 1, qui sont déterminés par les nombres

$$1, \tfrac{1}{2}, (\tfrac{1}{2})^2, (\tfrac{1}{2})^3, \cdots (\tfrac{1}{2})^n, \cdots,$$

est discrète, car les points de cette masse se rassemblent seulement au point o. Si l'on sépare du point o un petit intervalle quelconque, on retient un nombre fini de points de la masse dans l'autre partie, de telle façon que la somme totale des entourages peut devenir aussi petite qu'on le veut. Les endroits où les points de la masse se concentrent d'une manière infinie s'appellent les limites ou points limites (*Grenzpunkte*); l'ensemble de ces limites s'appelle la première dérivée. Dans le cas présent, la première dérivée est de l'ordre o; c'est pourquoi on désigne l'ordre de la masse primitive par 1.

(¹) *Ueber die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen;* Tübingen, 1870, et un article intitulé *Grenze,* dans le *Allg. Encyclopädie*, v. Ersch. u. Gruber.

(²) *Math. Annalen.*, t. V, XV, XVII.

(³) *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, 1878. *Serie di Fourier*. Pisa; 1880.

3. Une quantité discrète peut avoir plusieurs dérivées, ou être d'un ordre plus élevé. Les points

$$1,\ \tfrac{1}{2},\ (\tfrac{1}{2})^2,\ (\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{2})^2,\ (\tfrac{1}{2})^3,\ (\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{2})^3,\ (\tfrac{1}{2})^2+(\tfrac{1}{2})^3,\ (\tfrac{1}{2})^4,\ (\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{2})^4,\ \ldots$$

se rassemblent en un nombre infini de points, qui correspondent aux places

$$0,\ \tfrac{1}{2},(\tfrac{1}{2})^2,\ (\tfrac{1}{2})^3,\ \ldots,$$

ce qui n'empêche pas cette masse d'être discrète. Si l'on porte à partir de o un petit intervalle quelconque, il reste encore un nombre fini de points, où existe une accumulation de points infinis, et si l'on enveloppe cette masse de petits intervalles, il ne reste plus qu'un nombre fini de points de la masse donnée. La première dérivée est du premier ordre, la masse primitive du second ordre.

En général, toute masse de points possédant un nombre fini de dérivées est discrète ; car, si l'on prend comme point de départ la dernière dérivée, d'ordre o, c'est-à-dire un nombre fini de points $a_1, a_2, \ldots, a_m$, la masse de points, dont on prend la dérivée, possède seulement en ces points des amas de points infiniment nombreux, et en outre un nombre fini de points $b_1, b_2, \ldots, b_n$. La grandeur totale de leurs entourages peut par conséquent être diminuée à volonté. La masse de premier ordre est discrète ; elle sert de point de départ pour arriver aux ordres plus élevés : la masse de deuxième ordre ne contient qu'un nombre fini de points $c_1, c_2, \ldots, c_p$, après qu'on a enveloppé les $a_1, a_2, \ldots, a_m$ et les $b_1, b_2, \ldots, b_n$ par des intervalles arbitrairement petits ; ce qui prouve qu'elle est discrète. Le caractère d'une masse discrète reste donc conservé chez un nombre fini de progrès.

Mais l'exemple suivant va nous indiquer la manière dont on peut construire une masse discrète qui n'appartient pas à la première espèce. Représentons-nous un intervalle de o à 1, partagé en un nombre infini de parties, ayant les longueurs de o à $\frac{1}{2}$, de $\frac{1}{2}$ à $(\frac{1}{2})+(\frac{1}{2})^2$, de $\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2$ à $\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3$, etc., et supposons que l'on ait disséminé sur la première division de l'intervalle une masse de points du premier ordre, sur la deuxième division une masse du second ordre, sur la troisième une du troisième ordre, etc. ; ces masses infiniment nombreuses ne possèdent plus dans leur totalité

un nombre fini de dérivées, mais la totalité est discrète ; ce qui est facile à prouver. Si l'on sépare à partir de l'endroit 1 un intervalle aussi petit que l'on voudra, de longueur δ, il se trouve sur la longueur de 0 à $1 - \delta$ un nombre fini de masses de première espèce, de telle sorte que tous les points qu'elles contiennent peuvent être enfermés dans un nombre fini d'intervalles, dont la somme est aussi petite qu'on le désire.

La masse discrète possède la propriété qu'on peut déterminer près de chaque endroit, à une distance arbitrairement petite, un intervalle de longueur finie, dans lequel il n'y a aucun point de cette masse, et cela de chaque côté de l'endroit considéré. Soit α un point quelconque de l'intervalle a, b ; il serait impossible à une distance quelconque de α de trouver un intervalle qui ne contînt pas de points de la masse, si dans l'entourage d'un point quelconque sur une longueur δ prise à partir de α il y avait un nombre infini de points. De plus il serait impossible de renfermer tous les points de la masse dans des intervalles dont la somme fût plus petite que δ, c'est-à-dire que, contrairement à l'hypothèse, la masse ne serait pas discrète.

Une masse discrète n'est, en aucun intervalle, aussi petit qu'il soit, partout dense (*überall dicht*). Une masse de cette propriété est toujours linéaire, comme, par exemple, la totalité des nombres rationnels ou irrationnels dans un intervalle ; de même tous les nombres dont le dénominateur (réduit à sa plus simple expression) est une puissance d'un nombre a.

Le théorème précédemment énoncé n'est pas renversable, quoique Hankel ait cherché à le prouver dans le travail nommé plus haut [1]. C'est aussi la raison pour laquelle la condition d'intégrabilité donnée par Dirichlet [2] est inadmissible et que le théorème de l'intégrale de Riemann ne peut être exprimé par un autre. *On peut aussi distribuer une masse linéaire de telle façon qu'elle ne soit pas partout dense dans aucun intervalle.*

L'exemple suivant prouve cette possibilité. Sur un espace de

---

(1) L'inadmissibilité de la preuve a été remarquée par Dini : *Fondamenti*, p. 250.

(2) *Journal f. Mathem.*, t. IV, p. 160.

o à 1 on construit $n+1$ points à égale distance, comme les nombres o, $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, ..., $\frac{n-1}{n}$, 1. On porte à partir de o une longueur δ et de même de chaque côté de chaque point de division, et à la fin de $1-\delta$ à 1 la même longueur. Soit $2\delta < \frac{1}{n}$, ou $\delta < \frac{1}{2n}$. Les points de la masse à construire ne doivent se trouver que sur ces longueurs, de plus les points nommés doivent appartenir à la masse. Le nombre n, ainsi que plus loin les nombres n', n'', ... sont par exemple des nombres pairs. Appelons h la somme des longueurs, soit $2n\delta$ et partageons de nouveau chaque intervalle en n' points, portons de chaque côté de chaque point de division la longueur δ', soit $2n'\delta' < \delta$ ou $\delta' < \frac{\delta}{2n'}$. Posons la somme de tous ces nouveaux intervalles égale à $h' = 2n.2n'\delta'$, et $h' < h$. Si nous continuons ce mode de division, que dans l'intervalle δ' on construise les intervalles δ'', dont le nombre $2n''$ et dont la grandeur soit déterminée par l'inégalité $2n''\delta'' < \delta'$, de telle façon que la somme de tous ces espaces $2n.\ 2n'.\ 2n''.\ \delta''$ soit $h'' < h'$, nous avons une masse linéaire, si les valeurs de h, h', h'', ... ne descendent pas au-dessous d'une valeur déterminée; par contre, la masse deviendra discrète, si cette valeur limite devient égale à zéro. Dans les deux cas on peut, à l'intérieur d'un intervalle aussi petit qu'il soit, déterminer un nouvel intervalle, qui ne contienne aucun point de la masse; en outre, la masse de points n'appartient plus à la première espèce, parce que chaque point de division devient un point limite, et que dans l'entourage voisin de chaque point il tombe un nombre infini de points.

Les masses de points, qui dans tout intervalle ne sont pas partout denses, diffèrent peu des autres, quant à ce qui touche aux problèmes du Calcul différentiel; par contre la différence entre une masse discrète et une masse linéaire est importante dans le Calcul intégral, quand même la masse linéaire n'est pas partout dense. Pour donner aux théorèmes suivants un énoncé général, j'ai préféré m'appuyer sur l'idée d'une masse discrète, quoique dans la preuve des cinq premiers théorèmes la seconde qualité générale de celle-ci soit seule employée.

Théorème I. — *Une fonction qui dans l'intervalle de a à b*

doit être partout continue, est complètement définie, si elle est donnée à l'exception des points discrets.

Soit x une valeur pour laquelle la fonction $f(x)$ est encore inconnue ; on peut déterminer dans le voisinage de x des points $x - \varepsilon$ et $x + \varepsilon$, qui n'appartiennent pas à la masse discrète, et dont les valeurs $f(x + \varepsilon)$ et $f(x - \varepsilon)$ sont connues. La valeur $f(x)$ est la limite des progressions déterminées par $f(x + \varepsilon)$ et $f(x - \varepsilon)$, pendant que ε tend vers o. Le théorème peut être aussi énoncé de la manière suivante : deux fonctions continues, qui ne peuvent différer qu'en des points discrets, sont identiques. C'est un énoncé particulier du théorème général : une fonction continue est parfaitement définie lorsqu'elle est connue dans chaque petit intervalle en un point.

Théorème II. — *Si une fonction continue reste sur tous les points d'un intervalle, à l'exception d'une masse discrète, toujours au-dessus ou toujours au-dessous d'une limite déterminée, elle ne peut en aucun point dépasser cette limite.*

Soit G la limite supérieure, il serait possible, si la fonction continue était en un point x égale à $G + h$ ($h > 0$), de déterminer un intervalle fini $x \pm \varepsilon$, dans lequel toutes les valeurs de la fonction diffèrent de $f(x)$ d'une valeur plus petite que la grandeur positive h. Cet intervalle contiendrait des points qui n'appartiennent pas à la masse discrète, et dans lesquels, contre l'hypothèse, les valeurs de la fonction sont supérieures à G.

Théorème III. — *Si pour une fonction continue $f(x)$ on peut déterminer en chaque point d'un intervalle, à l'exception d'une masse discrète, une limite supérieure de Δx, de telle façon que $f(x + \Delta x) - f(x)$ ne puisse pas devenir négative (resp. positive), la différence $f(x + \Delta x) - f(x)$ ne sera jamais négative (resp. positive), aussi petit que soit $\Delta x > 0$.*

Considérons d'après la première hypothèse le cours de la fonction dans un intervalle de x_0 à x_1 ; si la fonction ne croît pas partout entre x_0 et x_1, elle doit être dans tout l'intervalle constante, c'est-à-dire partout $f(x + \Delta x) - f(x) = 0$, ou bien elle atteint dans un point entre x_0 et x_1, qui peut être égal à x_0, un maxi-

mum relatif. Pour cette valeur x on peut déterminer Δx de sorte que $f(x+\Delta x)-f(x)$ soit < 0. Soit $-\eta$ la valeur de cette différence, si x tend vers o, η tend aussi vers o. Soit ε une valeur positive quelconque plus petite que η, on peut déterminer un endroit, $x+\Delta' x$ ($\Delta' x < \Delta x$), pour lequel $f(x+\Delta' x)-f(x) = -\varepsilon$, et $x+\Delta' x$ marque la place première entre $x+\Delta x$ et x, où l'égalité se trouve remplie. Il suit de là que

$$f(x+\Delta x)-f(x+\Delta' x) = -\eta+\varepsilon < 0,$$

pendant que Δx décroît jusqu'à $\Delta' x$.

Il serait possible que, par un choix déterminé de ε, la place $x+\Delta' x$ appartienne à la masse discrète, pour laquelle il n'est pas connu que la différence doive devenir ou égale ou plus grande que o; mais, comme ε prend toutes les valeurs entre o et η d'une manière continue, les points correspondants $x+\Delta' x$ doivent aussi parcourir des intervalles continus, dans lesquels il y a des points qui n'appartiennent pas à la masse discrète, pour lesquels la différence ne peut pas devenir négative. Il n'y a pas par conséquent, dans un intervalle quelconque de x_0 à x_1, de valeur maximale, la fonction ne décroît pas. Un cas spécial est :

THÉORÈME IV. — *Une fonction continue qui dans un intervalle quelconque doit être constante partout, à l'exception d'une masse discrète, est constante dans tout l'intervalle, c'est-à-dire qu'elle possédera partout sans exception la même valeur.*

THÉORÈME V. — *Toute la fonction continue $f(x)$, où l'on peut déterminer, à l'exception d'une masse discrète, en chaque place de l'intervalle de $x=a$ à $x=b$ une limite supérieure pour Δx, de sorte que*

$$\text{abs}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]$$

soit plus petite qu'une petite valeur quelconque δ, sera constante dans tout l'intervalle.

Considérons la fonction $\psi(x) = \pm[f(x)-f(a)]-(x-a)\delta$, où δ est une valeur arbitrairement petite, on a

$$\frac{\psi(x+\Delta x)-\psi(x)}{\Delta x} = \pm\left|\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right| - \delta \quad (\Delta x > 0).$$

La différence $\psi(x+\Delta x)-\psi(x)$ sera partout, à l'exception d'une masse discrète, négative; par conséquent, elle ne peut pas devenir positive d'après le théorème III. De plus $\psi(x)$ est une fonction, qui nulle part ne croît et qui, ayant pour $x=a$ la valeur o, ne sera nulle part positive. Dans tout l'intervalle on a alors

$$\operatorname{abs}[f(x)-f(a)]<(x-a)\delta<(b-a)\delta$$

et, comme δ est une valeur aussi petite qu'on le veut, on a

$$f(x)=f(a).$$

Les fonctions, partout finies, qui dans un intervalle deviennent discontinues, peuvent se montrer à la place d'une discontinuité sous plusieurs formes. La discontinuité est premièrement *ponctuelle,* si à une place x $\lim f(x+\varepsilon)$ de même que $\lim f(x-\varepsilon)$ pour $\varepsilon=0$ possède une déterminée et même limite, mais la valeur de $f(x)$ diffère de cette limite ou est tout à fait indéterminée entre des limites finies. La différence entre la valeur de $f(x)$ ou les limites de l'indétermination (*Unbestimmtheitsgrenzen*) de cette valeur et entre les valeurs voisines doit s'appeler l'*oscillation* de la fonction. La fonction subit secondement un brusque changement déterminé dans ses valeurs, si $\lim f(x+\varepsilon)$ et $\lim f(x-\varepsilon)$ pour $\varepsilon=0$ prennent des valeurs déterminées, mais différentes entre elles. La différence de ces valeurs s'appelle l'*oscillation*. La fonction sera troisièmement complètement indéterminée à la place x, si une des limites ou toutes deux sont complètement indéterminées, ce qui est le cas, si $f(x\pm\varepsilon)$ possède un nombre infini de maxima et de minima, dont la différence n'est pas nulle. Soient G la valeur de la limite supérieure, qui ne doit pas être dépassée par les valeurs de la fonction, g la limite inférieure dans l'intervalle de x à $x+\varepsilon$; G peut, pendant que ε tend vers o, avec une diminution constante ou sans variation, atteindre une grandeur déterminée G', de même que g avec une progression constante une valeur g'. Ces valeurs G' et g' donnent les limites de l'indétermination de la fonction à la place x prise en avant; de la même manière on pourra déterminer les limites de l'indétermination G'' et g'' pour l'autre côté. Les valeurs extrêmes de ces quatre grandeurs déterminent la valeur du maxima et du minima à la place de discontinuité; leur différence donne l'oscillation de la fonction en cette

place. Il est clair qu'une discontinuité ponctuelle peut se combiner avec les deux autres systèmes ; dans ce cas, la différence des valeurs extrêmes est l'oscillation de la fonction.

Une fonction, qui est en général continue, mais en un nombre infini de places discontinue, est appelée *ponctuée discontinue* (*punktirt unstetig*) ; si les places ou les oscillations de la fonction sont plus grandes qu'un nombre fini quelconque δ, elles ne représentent toujours qu'une masse discrète de points.

Linéaire discontinue est une fonction dans laquelle ces points forment une masse linéaire.

On tire directement le théorème suivant de la définition de l'intégrale donnée par Riemann :

Théorème VI. — *Les fonctions ponctuées discontinues dans un intervalle sont intégrables, et inversement : chaque fonction partout finie et intégrable est ou partout continue ou ponctuée discontinue.*

On ne peut pas dire que, dans une fonction ponctuée discontinue, les points de discontinuité représentent, pris dans leur ensemble, une masse discrète ; il se peut que dans chaque intervalle, si petit qu'il soit, une discontinuité se présente, ce qui est contre la nature même d'une masse discrète. Il n'y a que dans les places dans lesquelles les oscillations sont plus grandes qu'un petit nombre δ qu'on rencontre la masse discrète.

D'un autre côté, on saisit facilement qu'une fonction intégrable contiendra des endroits dans ses intervalles, si petits qu'ils soient, où elle est continue, quoique cette condition ne suffise pas pour rendre l'intégrabilité possible. En effet, soit δ un nombre petit à volonté, on laissera de côté toutes les places où les oscillations sont plus grandes que δ. Comme ces points représentent une masse discrète, on peut déterminer un point x dans un voisinage quelconque de chaque point, pour lequel l'inégalité

$$|f(x + \theta h) - f(x)| < \delta$$

sera remplie ; h est une grandeur dépendante de δ et θ un nombre quelconque entre 0 et 1. On pourra dire aussi : dans un voisinage quelconque de chaque point, on peut déterminer un intervalle fini (de $x - h$ à $x + h$) pour lequel toutes les valeurs

de la fonction diffèrent entre elles d'une valeur moindre qu'un petit nombre 2δ.

Si δ tend vers o, l'intervalle se réduit à un point, dans lequel la condition de continuité est remplie. Un tel point se trouve par conséquent dans un voisinage quelconque de tout point; c'est-à-dire dans chaque intervalle, si petit qu'il soit.

Théorème VII. — *L'intégrale d'une fonction est déterminée dès que la fonction à intégrer est déterminée à l'exception des points discrets;* ou plus exactement : *deux fonctions intégrables donnent la même intégrale, si les places où elles diffèrent d'une grandeur plus grande que le petit nombre quelconque δ représentent une masse discrète.*

Théorème VIII. — *Le quotient différentiel, pris en avant de l'intégrale finie*

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx,$$

est en général égal à $f(x)$. Les places où il diffère de cette valeur de plus qu'une grandeur δ quelconque, ou dans le cas où $f(x)$ est indéterminée, les places dans lesquelles la différence entre les limites de l'indétermination et le quotient différentiel est plus grande que δ, ou enfin les places où les limites de l'indétermination du quotient diffèrent de plus que δ des limites de la fonction représentent une masse discrète.

Dans l'intervalle d'intégration de a à b, représentons-nous tous les points de discontinuité, où les oscillations de la fonction intégrable $f(x)$ sont plus grandes qu'un petit nombre δ, renfermées dans un intervalle petit à volonté; x peut alors désigner chaque valeur dans un voisinage quelconque de tout point, et l'on a

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(x)\,dx.$$

Nous avons trois cas à considérer.

1° Ou bien la fonction est continue à la place x, et

$$\lim_{h=0} f(x+h) = f(x);$$

et alors le quotient différentiel pris en avant de $F(x)$ est égal à $f(x)$.

2° Ou lim $f(x+h)$ a une limite déterminée $f(x+0)$; mais cette valeur diffère de la valeur $f(x)$ ou de la limite d'indétermination de cette valeur de moins de δ, et l'on a

$$F'(x)=f(x+0)=f(x)\pm(<\delta).$$

3° Ou enfin la fonction a, dans un voisinage quelconque de x pris en avant, un nombre infini de maxima et de minima; les oscillations resteront pourtant plus petites que δ. Soient G la limite supérieure, g la limite inférieure des valeurs de la fonction dans l'intervalle de x à $x+h$:

$$G > \frac{F(x+h)-F(x)}{h} > g$$

tend h vers 0; le quotient des différences n'a pas besoin de prendre une valeur déterminée, cependant il reste toujours entre G et g qui tendent vers G' et g' dont la différence est plus petite que δ. Ce sont par conséquent les limites du quotient différentiel, dont la fonction diffère de moins de δ : toutes les places x, par lesquelles ces rapports n'ont pas de valeur, sont mises à part dès le commencement : elles sont discrètes.

Il est bon de remarquer que dans le dernier cas il peut encore se montrer pour $f(x)$ une discontinuité ponctuée, ce qui n'empêche pas la différence entre les valeurs extrêmes de $f(x)$ d'être plus petite que δ dans l'intervalle desquelles tombent les limites de l'indétermination du quotient différentiel.

Pour le quotient pris en arrière le même théorème subsiste.

Comme les places où la différence des valeurs $f(x+0)$ et $f(x-0)$ est plus grande que δ ou bien les valeurs extrêmes G', g' et G'', g'' diffèrent de plus de δ ne peuvent représenter qu'une masse discrète de points, on reconnaîtra facilement que le quotient pris en avant ou en arrière de l'intégrale définie ne diffère entre elle qu'en des points discrets d'une valeur déterminable. Ils donnent la même intégrale, d'après le théorème VII, que la fonction $f(x)$.

Théorème IX (théorème fondamental du Calcul intégral). — *Soit* $F(x)$ *une fonction continue qui possède une dérivée partout finie et intégrable* $F'(x)$, *on a*

$$\int_a^x F'(x)\,dx - F(x) = \text{const}$$

$F'(x)$ peut représenter la dérivée de $F(x)$ de deux côtés et celui-ci naturellement peut être changé à volonté aux points discrets.

Ces deux corollaires sont les suites immédiates du théorème VII et de la remarque à la fin du théorème VIII.

Soit $F'(x)$ la dérivée prise en avant, on pose

$$\varphi(x) = \int_a^x F'(x)\,dx - F(x)$$

et l'on a

$$\frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} F'(x)\,dx - \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

Par suite du théorème précédent, on ne peut pas directement en des points discrets déterminer un Δx, pour lequel le côté droit de l'égalité soit plus petit que tout petit nombre. Il faut tout d'abord excepter les points où $F(x)$ ne possède aucune dérivée définie, dans lesquels les limites de l'indétermination de

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

diffèrent de plus de δ; puis les places où $F'(x)$ a une valeur déterminée, mais où $\lim_{h=0} F'(x+h)$ diffère avec $F'(x)$ de plus de δ. Mais tous ces points représentent, par suite de l'intégrabilité de $F'(x)$, une masse discrète. On peut alors conclure, d'après le théorème V, que la fonction continue $\varphi(x)$ est constante. Il s'ensuit que l'on fait reconnaître aux places singulières que le quotient

$$\frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}$$

devient égal à zéro et l'on a :

Théorème X. — *Si une fonction continue $F(x)$ possède dans un intervalle une dérivée $F'(x)$ partout finie et intégrable, la valeur du quotient des différences $\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$ est égale à*

$$\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} F'(x)\,dx,$$

c'est-à-dire qui est partout égale à une valeur qui se trouve

entre la plus grande et la plus petite des valeurs de $F'(x)$ *dans l'intervalle de* x *à* $x+\Delta x$ *respectivement entre les limites extrêmes de l'indétermination de cette fonction, si petit que soit* Δx.

L'intégration de fonctions, qui deviennent dans un intervalle infinies ou indéfinies entre des limites infinies, demandent une définition spéciale, si les points d'infinité forment une masse infinie.

Quant à ce qui suit, il suffira de poser : si une fonction $f(x)$ devient infinie, dans un intervalle de a à x en un nombre infini de places, qui forment une masse discrète, on doit considérer sous l'intégrale $\int_a^x f(x)\,dx$ la fonction continue de x qui pour $x=a$ devient égale à o et dont la dérivée en général, c'est-à-dire à l'exception des points discrets, diffère de la valeur $f(x)$ d'une petite quantité quelconque, moindre que δ, dans le cas où il existe une telle fonction.

Cette définition est déterminée ; car, d'après le théorème V, il ne peut pas y avoir deux fonctions continues différentes l'une de l'autre qui possèdent la qualité demandée.

Il n'est pas difficile de former un exemple de fonctions intégrables qui deviennent infinies dans des points discrets infiniment nombreux. La fonction

$$f(x)=\frac{d\left[x\left(\sin\frac{1}{x}\right)^r\right]}{dx}=\left(\sin\frac{1}{x}\right)^r-r\frac{1}{x}\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{r-1}\cos\frac{1}{x}$$

est une forme simple de cette espèce. Elle possède pour $0<r<1$, dans un intervalle si petit qu'il soit près de o, un nombre infini de points d'infinités.

Si une fonction à intégrer est infinie dans un intervalle dans des points discrets, le problème de l'intégration se trouve dans la preuve de l'existence d'une fonction continue ayant la qualité demandée.

Il est nécessaire pour ce qui suit de modifier un peu l'énoncé du théorème IX.

Une fonction $F(x)$, qui n'est nulle part, dans un intervalle, soumise à de brusques changements de valeurs (ce qui n'est pas suffisant pour déterminer la continuité, car elle peut être indéterminée

entre des limites finies ou infinies, ou bien être déterminée et infinie), et dont la dérivée est partout connue comme une fonction finie et intégrable (à l'exception des points discrets), ne peut être déterminée et infinie ou indéterminée aux points discrets que si la valeur de la dérivée au rapprochement des points discrets croît en dehors de chaque limite.

En effet, soit x un point dans lequel la fonction $F(x)$ entre des limites finies ou infinies est indéterminée, ou bien déterminée et infinie pendant que dans l'intervalle de $x - h$ à x il n'y a aucun point singulier, on peut déterminer dans cet intervalle dans un voisinage quelconque de x deux places $x - \varepsilon$ et $x - \varepsilon + \Delta x$, telles que la valeur absolue de $\frac{F(x - \varepsilon + \Delta x) - F(x - \varepsilon)}{\Delta x}$ sera plus grande qu'un grand nombre quelconque K.

Le quotient est égal à

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{x-\varepsilon}^{x-\varepsilon+\Delta x} F'(x)\,dx;$$

car, d'après l'hypothèse, il existe dans l'intervalle de $x - \varepsilon$ à $x - \varepsilon + \Delta x$ une dérivée partout finie et intégrable.

Il s'ensuit que la valeur absolue de la fonction $F'(x)$ ne peut pas être dans cet intervalle de l'intégration partout plus petit que le nombre K; que, par suite, les valeurs de la dérivée croissent en dehors de toute limite à l'approche des points discrets.

Ce résultat se trouve brièvement résumé de la façon suivante :

Théorème XI. — *Une fonction qui n'est soumise en aucune place d'un intervalle à de brusques changements de valeur et dont la dérivée, à l'exception des points discrets, est connue comme étant une fonction intégrable, dont la valeur absolue ne dépasse nulle part une valeur déterminée, est continue dans tout l'intervalle, et sa valeur est*

$$F(x) = \int F'(x)\,dx.$$

Il me reste à démontrer le théorème qui, depuis les recherches de Riemann, représente le fondement de la théorie des séries trigonométriques. Comme on sait, on a ce théorème : *Si l'on peut déterminer pour une fonction continue $f(x)$, dans tout intervalle de*

$x = a$ à $x = b$, une limite supérieure de Δx, telle que l'on ait

$$\text{abs}\left[\frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{\Delta x^2}\right] < \delta,$$

$f(x)$ sera une fonction linéaire.

La preuve qu'a donnée M. Schwarz va trouver ici sa place.

On fait

$$\psi(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{b-a}\,[f(b) - f(a)]$$

$$\chi(x) = \pm\psi(x) - \frac{\delta}{2}\,(x) - a\;(b - x),$$

où δ représente un nombre positif aussi petit qu'on le veut ; on aura alors

$$\frac{\chi(x+\Delta x) - 2\chi(x) + \chi(x-\Delta x)}{\Delta x^2} = \pm\frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x^2} + \delta,$$

valeur qui peut être faite positive en chaque endroit x si l'on choisit une limite supérieure de Δx. Il s'ensuit que la fonction continue $\chi(x)$, qui aux confins de l'intervalle a la valeur 0, ne peut être nulle part positive ; car elle devrait prendre une valeur maximum en un endroit quelconque. Les places où ce maximum a lieu pourraient être innombrables.

Désignons par x la dernière place dans l'intervalle de a à b, à laquelle appartient ce maximum, il nous faut avoir

$$\chi(x - \Delta x) - \chi(x) < 0, \quad \chi(x - \Delta x) - \chi(x) \leqq 0.$$

et l'on aurait contre la supposition

$$\chi(x + \Delta x) - 2\chi(x) + \chi(x - \Delta x) < 0.$$

Par conséquent, $\chi(x)$ est partout négatif, et

$$\text{abs}\,\psi(x) < \frac{\delta}{2}\,(x - a)(b - x) < \frac{\delta}{2}\,(b - a)^2.$$

Comme δ est aussi petit que l'on veut, on aura

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{b-a}\,[f(b) - f(a)].$$

Dans le cas où la condition de ce théorème ne prévaut plus pour les points d'une masse discrète, on a le théorème suivant :

Théorème XII. — *Une fonction continue $f(x)$, qui à chaque place d'un intervalle, à l'exception d'une masse discrète, possède pour Δx une limite supérieure, telle que l'on ait*

$$\operatorname{abs}\frac{f(x+\Delta x)-2f(x)+f(x-\Delta x)}{\Delta x^2}<\delta,$$

permettra de déterminer, dans un voisinage quelconque de chaque place, un intervalle de longueur finie, dans lequel $f(x)$ est une fonction déterminée et linéaire.

La fonction continue $f(x)$ est à considérer géométriquement comme une ligne formée de zigzags possédant autant qu'on le veut un nombre infini d'angles.

Il nous reste encore à poser la condition pour laquelle, dans le cas où elle est remplie, $f(x)$ sera exprimée par une seule fonction linéaire.

Pour les applications qui viennent, il importe de prouver que la condition suivante suffit. On doit avoir partout sans exception

$$\operatorname{abs}\frac{f(x+\Delta x)-2f(x)+f(x-\Delta x)}{\Delta x}<\delta.$$

La fonction continue qui donne une ligne de zigzags est une intégrale, c'est-à-dire qu'elle possède une dérivée intégrable.

Car, après la mise à part des points discrets, il y a dans tous les intervalles une dérivée qui dans chaque intervalle est constante et par conséquent intégrable.

On peut donc poser, quand même la dérivée à l'approche des points discrets deviendrait infinie,

$$f(x)=\int^{x}f'(x)\,dx.$$

La nature de cette seconde condition est de faire disparaître les changements brusques de $f'(x)$ en chaque place; car on a

$$\frac{f(x+\Delta x)-2f(x)+f(x+\Delta x)}{\Delta x}$$
$$=\frac{1}{\Delta x}\left[\int_{x}^{x+\Delta x}f'(x)\,dx+\int_{x}^{x-\Delta x}f'(x)\,dx\right].$$

Si les limites $\lim f'(x+\Delta x)$ et $\lim f'(x-\Delta x)$ ont des valeurs finies et déterminées par $\Delta x=0$, ces valeurs ne peuvent pas différer

l'une de l'autre. Pour la fonction $f'(x)$, on connaît partout la valeur de la dérivée $f''(x) = 0$ (à l'exception des points discrets). On sait alors, d'après le théorème XI, que $f'(x)$ est une fonction continue, pour laquelle

$$f'(x) - f'(\alpha) = \int_{\alpha}^{x} f''(x)\,dx = 0$$

et, ce qu'il faut démontrer, $f'(x)$ est constante dans tout l'intervalle. Le résultat est le suivant :

Théorème XIII. — *Si $f(x)$ est une fonction continue, pour laquelle on peut déterminer* 1° *à chaque place d'un intervalle de a à b (excepté une masse discrète), une limite supérieure pour Δx, de sorte que l'on ait*

$$\operatorname{abs} \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{\Delta x^2} < \delta;$$

2° *faire partout sans exception*

$$\operatorname{abs} \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{\Delta x} < \delta,$$

on aura

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{x-a}{b-a}[f(b) - f(a)].$$

Très uni avec ce théorème se trouve le suivant :

Theorème XIV. — *Si l'on peut déterminer dans une fonction continue* $F(x)$ *à chaque place (excepté une masse discrète), une limite supérieure de Δx, telle que*

$$\frac{F(x+\Delta x) - 2F(x) + F(x-\Delta x)}{\Delta x^2},$$

diffère d'une fonction intégrable $f(x)$ de moins que de tout petit nombre δ et que

$$\lim \frac{F(x+\Delta x) - 2F(x) + F(x-\Delta x)}{\Delta x} = 0,$$

pour chaque valeur de x, et si l'on désigne par $F_1(x)$ l'intégrale double

$$F_1(x) = \int_{\beta}^{x} dy \int_{\alpha}^{y} f(z)\,dz.$$

(α et β sont des valeurs quelconques dans l'intervalle donné), la différence $(\mathrm{F}\,x) - \mathrm{F}_1(x) = \varphi(x)$ *est une fonction linéaire de* x.

La fonction $\mathrm{F}_1(x)$ possède la première dérivée partout continue

$$\mathrm{F}'_1(x) = \int_\alpha^x f(z)\,dz.$$

Il s'ensuit, d'après un théorème connu sur double définition de la seconde dérivée d'une fonction, qu'on a

$$\lim \frac{\mathrm{F}_1(x+\Delta x) - 2\,\mathrm{F}_1(x) + \mathrm{F}_1(x-\Delta x)}{\Delta x^2} = f(x)$$

partout où $\lim f(x \pm \Delta x)$ prend une valeur déterminée pour $\Delta x = 0$.

On peut prouver ce théorème directement par l'égalité

$$\mathrm{F}_1(x) = \int_\beta^x f(y)(x-y)\,dy + \text{const.},$$

$$\mathrm{F}_1(x+\Delta x) - 2\,\mathrm{F}_1(x) + \mathrm{F}_1(x-\Delta x) = \int_0^{\Delta x} [f(x+\alpha) + f(x-\alpha)](\Delta x - \alpha)\,d\alpha$$

$$= [f(x+\theta\,\Delta x) + f(x-\theta\,\Delta x)]\,\frac{\Delta x^2}{2}.$$

Si l'on met à part les places appartenant à une masse discrète, dans lesquelles l'égalité de la fonction $f(x)$ avec la limite du quotient de la différence d'ordre 2 de la fonction $\mathrm{F}(x)$ n'est pas donnée; de plus, les places où les limites de l'indétermination de la fonction $f(x)$ diffèrent de plus de δ ou, dans le cas où $f(x)$ posséderait une valeur déterminée, où les oscillations de la fonction $f(x-\Delta x)$ et $f(x+\Delta x)$ sont plus grandes que δ, places qui, par suite de l'intégrabilité de $f(x)$, ne représentent qu'une masse discrète, on verra que $\varphi(x)$ remplit la condition du théorème XII, et que cette fonction doit être linéaire dans chaque intervalle séparé.

Elle remplit aussi la condition du théorème XIII, d'après la seconde supposition,

$$\frac{\varphi(x+\Delta x) - 2\,\varphi(x) + \varphi(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\mathrm{F}(x+\Delta x) - 2\,\mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(x-\Delta x)}{\Delta x} - \int_{x-\theta\Delta x}^{x+\theta\Delta x} f(x)\,dx.$$

Les deux termes de droite tendent vers o avec Δx, le premier d'après l'hypothèse, le second puisque $f(x)$ est une fonction intégrable.

Donc $\varphi(x)$ est linéaire dans tout l'intervalle.

Un cas spécial de ce théorème est le suivant : *Si une fonction* $F(x)$ *a la propriété que*

$$\lim \frac{F(x+\Delta x) - 2F(x) + F(x-\Delta x)}{\Delta x^2} = f(x)$$

donne une fonction partout finie et intégrable, on a

$$\int_\beta^x dy \int_\alpha^y f(z)\,dz = [F(x) - F(\beta)] - (x-\beta)F'(\alpha),$$

même si l'on change la valeur de la fonction $f(z)$ *arbitrairement aux points discrets.*

Pour le cas où la fonction $f(x)$ devient infinie dans l'intervalle sans pourtant cesser d'être intégrable, l'équation précédente n'a de valeur que si

$$\lim \frac{F(x+\Delta x) - 2F(x) + F(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

devient partout égale à zéro.

(*A suivre.*)

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

G. ZEUTHEN. — GRUNDRISS EINER ELEMENTAR-GEOMETRISCHEN KEGELSCHNITTSLEHRE. 1 vol. in-8°; 97 p. — Leipzig, 1882.

Le nom de M. Zeuthen recommande suffisamment ce petit Livre, écrit pour l'enseignement élémentaire : il n'est sans doute pas utile d'en louer la clarté et la précision; nous nous bornerons à expliquer succinctement l'ordre qui a été suivi.

L'auteur commence par exposer les propriétés des axes radicaux et des faisceaux de cercles dont il aura besoin ensuite : il définit les sections coniques comme lieux du centre d'un cercle passant par un point fixe et tangent à un cercle ou à une droite fixe : cette définition revient sans doute à celle qui exprime la propriété fondamentale des foyers, mais elle a l'avantage de réunir les trois courbes et de relier immédiatement les propriétés des cercles précédemment établies au problème de l'intersection d'une conique par une droite et à la détermination de la tangente en un point, le second problème n'étant qu'un cas particulier du premier.

Les quatre premiers Chapitres sont consacrés à l'exposition des propriétés les plus simples relatives aux foyers et aux tangentes ; on remarquera dans les Chapitres V et VI la construction si simple qui permet d'établir la propriété fondamentale de la directrice, et les procédés ingénieux suivis par l'auteur pour établir l'existence et les propriétés des diamètres ainsi que l'équation d'une conique à centre rapportée à deux diamètres conjugués : tout est établi sans calcul et sans le secours de la Géométrie projective ; M. Zeuthen traite ensuite (Chapitres VII à XI) de la parabole, des asymptotes dans l'hyperbole, de l'hyperbole équilatère, de la détermination de l'aire des coniques, des sections du cône de révolution. Nous signalerons dans le Chapitre suivant une curieuse démonstration du théorème de Pascal, pour un hexagone inscrit dans un cercle : cette démonstration, due à Steiner, repose sur les propriétés bien connues des causes de similitude d'un système de trois

cercles ; la démonstration du théorème de Brianchon, due à M. Bing, est aussi élégante et d'un caractère tout aussi élémentaire. Dans les deux Chapitres suivants, l'auteur traite de la nature des sections planes d'un cône circulaire quelconque ainsi que des propriétés fondamentales des pôles et des polaires.

Dans le Chapitre XV sont développées diverses propriétés des coniques homofocales, ayant pour point de départ la proposition suivante :

Si l'on considère une conique (C), *deux points* A *et* A' *de cette conique et un cercle ayant pour centre le point d'intersection des deux tangentes à cette conique, les quatre tangentes menées des points* A *et* A' *à ce cercle sont tangentes à une conique homofocale à la conique* C.

La proposition réciproque permet d'établir que les bissectrices de l'angle de deux tangentes à une conique sont conjuguées par rapport à cette conique. Enfin un Chapitre consacré aux lois de Kepler, à l'attraction suivant la loi de Newton et à l'attraction proportionnelle à la distance termine cet excellent petit livre, qui ne peut manquer d'être bien accueilli par les étudiants et par les maîtres. Ajoutons que les uns et les autres trouveront à la fin de chaque Chapitre de nombreux et intéressants exercices.

JORDAN (C.). — COURS D'ANALYSE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE. Tome I, *Calcul différentiel.* — 1 vol. in-8°, 378 p. Paris, 1882.

Le *Cours d'Analyse* de M. Jordan prendra assurément place à côté des Livres classiques que la France possède déjà sur cette matière; le nom de l'auteur dispense de tout éloge banal : il suffira d'indiquer l'ordre suivi et ce qui distingue particulièrement le Livre de M. Jordan des Traités analogues.

L'Ouvrage comprend une Introduction et six Chapitres; les deux premiers traitent des dérivées et des différentielles, de leurs propriétés principales et de la formation des équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles.

Le troisième Chapitre est intitulé : *Développement en série;* l'auteur débute par l'étude de la formule de Taylor et des principaux procédés pour effectuer les développements en série : on remarquera là une exposition claire et concise de la marche à suivre pour développer en série les racines d'une équation algébrique entre deux variables et des résultats essentiels obtenus par M. Puiseux. Vient ensuite une étude fort bien faite des séries et des produits infinis; la distinction entre les séries convergentes et des séries semi-convergentes, les conditions sous lesquelles on peut affirmer qu'une série est uniformément convergente sont présentées d'une façon simple et précise; comme application, M. Jordan traite des séries qui servent de fondement à la théorie des fonctions exponentielles et circulaires, puis de celles qui définissent les transcendantes de Jacobi; il donne aussi quelques indications sur la série hypergéométrique et la fonction $\Gamma(x)$, et applique aux séries d'Eisenstein et aux fonctions ϑ à plusieurs variables les propositions relatives à la convergence des séries multiples; enfin l'auteur termine en établissant les propriétés élémentaires des fractions continues arithmétiques et algébriques. Le Chapitre IV est consacré aux maxima et minima. Le Chapitre V est intitulé : *Applications géométriques de la série de Taylor;* ce titre nous paraît plus heureux que celui d'*Applications géométriques du Calcul différentiel,* sous lequel on range ordinairement les théories du contact et de la courbure, parce qu'il met nettement en évidence la nature essentiellement analytique des hypothèses sur lesquelles reposent ces théories. M. Jordan traite du contact en suivant à peu près la même voie que M. Hermite dans son Cours d'Analyse : on remarquera dans ce Chapitre les paragraphes consacrés aux propriétés infinitésimales du premier ordre des surfaces réglées, des congruences et des complexes de droites, ainsi que la façon ingénieuse dont l'auteur établit la notion de l'aire d'une surface courbe.

Enfin, dans le Chapitre VI, l'auteur établit diverses propriétés des courbes algébriques, propriétés dont l'importance, au point de vue du Calcul intégral, ne peut plus être contestée depuis les travaux de Clebsch et de ses successeurs. J. T.

ROBERTS (R.-A.). — A COLLECTION OF EXAMPLES AND PROBLEMS ON CONICS AND SOME OF THE HIGHER PLANE CURVES. — 1 vol. in-12. Dublin, 1882.

L'auteur dit, dans sa Préface, que la plupart des théorèmes et problèmes qui composent cet intéressant petit recueil lui ont été suggérés, pour les coniques et cubiques, par la lecture des Livres bien connus de M. Salmon sur les coniques et les courbes de degré supérieur, et, pour les quartiques bicirculaires, par la lecture du Mémoire de M. Casey et du Livre de M. Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* : on y trouvera un grand nombre de questions curieuses résolues par ces méthodes brèves et élégantes qui sont en honneur chez les professeurs anglais.

MÉLANGES.

THÉORIE DE LA SÉRIE DE FOURIER.

PAR M. LE D[r] AXEL HARNACK, A DRESDE.

(SUITE.)

II.

Preuve que la représentation d'une fonction par une série trigonométrique est possible seulement d'une manière unique (1).

Les points de divergence d'une série infinie sont de deux espèces : ou la somme des termes croît au-dessus de toute limite; la série sera alors en cet endroit infinie d'une manière déterminée ou indéterminée; ou bien la somme donne des valeurs qui oscillent entre des limites finies. Dans le premier cas, la divergence peut être nommée infinie; par contre, dans le second, on peut lui fixer une mesure finie. Désignons par S_{n-1} la somme des termes possédant l'indice o, 1, ... jusqu'à $n-1$, et par R_n la somme de tous les autres, bref le reste de la série, et formons la suite $S_{n-1}, S_n, S_{n+1}, \ldots$; il existe une limite supérieure (finie) G_n et une limite inférieure g_n, qui ne sont pas surpassées par les termes de la suite infinie.

Si l'indice n croît à volonté, G_n atteindra, en diminuant continuellement ou en restant constant, une valeur G', et g_n en augmentant continuellement ou en restant constant, une valeur g'. Ces valeurs G' et g' représentent les limites dernières pour l'oscillation de la série et leur différence sera appelée la mesure de divergence.

(1) Ce paragraphe contient les deux principes fondamentaux des séries trigonométriques prouvés par M. Cantor (*Math. Annalen.*, t. IV et V), et cela sous la forme la plus générale qu'on puisse leur donner. Les preuves mêmes pourraient rester sans changer dans leur principe, mais l'idée d'une masse discrète rend fort simple la preuve du second théorème.

Si cette mesure est égale à zéro, la série sera convergente en ce point.

Soit la différence $S_{n+k} - S_{n-1} = R_{n,k}$; la suite de restes $R_{n,0}, R_{n,1}, \ldots$ a la propriété que la valeur de chaque terme est au plus égale à la différence $G_n - g_n$. Si la mesure de divergence est plus petite qu'un nombre d, on pourra trouver une place n à partir de laquelle la valeur de tous les restes $R_{n,k}$ reste plus petite que d.

La série trigonométrique

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} a_k \sin kx + b_k \cos kx$$

doit être appelée « en général convergente » dans l'intervalle de a à b, si les places x, où la mesure des divergences est infinie ou plus grande qu'un petit nombre quelconque δ, ne représentent toujours qu'une masse discrète. Il n'est pas dit, pour cela, que les places où la série diverge déterminent dans leur ensemble une masse discrète; au contraire, il peut y avoir dans chaque intervalle, si petit qu'il soit, des places de divergence. Il n'y a que les points de divergence, possédant des valeurs infinies, ou des limites d'indétermination dont la différence est plus grande que δ, qui forment une masse discrète.

Théorème XV. — *Dans une série trigonométrique qui, dans un intervalle quelconque, est « en général convergente », on a* $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = 0$ *pour* $n = \infty$.

Pour chaque point x, où la mesure de la divergence peut être faite plus petite que δ, on peut déterminer une limite inférieure de n, de telle sorte que les termes de la série, dont l'indice est égal ou plus grand que n, possèdent une valeur plus petite que δ. Puisque les points où la mesure de la divergence est plus grande que δ n'appartiennent qu'à une masse dicrète, il s'ensuit qu'on peut déterminer, dans un voisinage quelconque de tout point de l'intervalle, une partie de $x - \varepsilon$ à $x + \varepsilon$, dans laquelle on ne trouve aucun point où la mesure de divergence reste plus grande que δ.

On peut aussi trouver une valeur n, de façon que, pour celle-ci

et pour toutes les valeurs plus grandes, les termes

$$a_n \sin n(x+\varepsilon) + b_n \cos n(x+\varepsilon)$$
$$= (a_n \sin nx + b_n \cos nx)\cos n\varepsilon + (a_n \cos nx - b_n \sin nx)\sin n\varepsilon,$$
$$a_n \sin n(x-\varepsilon) + b_n \cos n(x-\varepsilon)$$
$$= (a_n \sin nx + b_n \cos nx)\cos n\varepsilon - (a_n \cos nx - b_n \sin nx)\sin n\varepsilon,$$

en valeur absolue deviennent plus petits que δ, où x est une valeur dans un voisinage quelconque de chaque place, ε une valeur arbitraire à l'intérieur de l'intervalle construit.

Il se peut que, pour chaque valeur de ε, il reste à fixer une autre limite de n ; il n'est pas encore dit que la même limite de n suffise à toutes les valeurs de ε, pour remplir la condition demandée.

On reconnaît facilement, par addition et soustraction de ces égalités, que les valeurs de

$$(a_n \sin nx + b_n \cos nx)\cos n\varepsilon \quad \text{et} \quad (a_n \cos nx - b_n \sin nx)\sin n\varepsilon$$

doivent être sûrement plus petites que δ.

Si l'on multiplie la première égalité par $\sin nx \sin n\varepsilon$, et la seconde par $\cos nx \cos n\varepsilon$, on trouve par addition que $a_n \sin 2n\varepsilon$, et d'une manière analogue que $b_n \sin 2n\varepsilon$ doivent être plus petits que $4\delta = \delta'$, bref peuvent être faits plus petits que tout nombre donné δ'. Soit la valeur $2\varepsilon = \alpha$, on dira alors : il faut, pour toutes les valeurs de α dans un intervalle déterminé (dont nous appelons les limites a et b) que $\lim a_n \sin n\alpha$ (ainsi que $\lim b_n \sin n\alpha$) devienne plus petit que δ'. Cela montre que pour chaque α on peut déterminer une place n, à partir de laquelle les valeurs

$$[a_n \sin n\alpha] \ \ldots \ [a_{n+k} \sin(n+k)\alpha] \ \ldots$$

sont toutes plus petites que δ' (pourtant il n'est pas dit que le même n suffise pour toutes les valeurs de x).

Cette demande ne sera accomplie que si à partir d'une place n toutes les valeurs $[a_n]$, ..., $[a_{n+k}]$ sont plus petites que δ'.

Admettons que ce n'est pas le cas ; on pourra former une série avec un nombre infini de membres a_{n_1}, a_{n_2}, ..., a_{n_n}, ..., dont les valeurs sont toutes égales ou plus grandes que δ'. Dans ce cas on pourra trouver une valeur α dans l'intervalle donné de a à b (et par suite dans chaque partie de celui-ci, si petite que soit cette partie),

pour laquelle la série $a_{n_1} \sin n_1 \alpha$, $a_{n_2} \sin n_2 \alpha$, ..., $a_{n_u} \sin n_k \alpha$ n'a pas la limite o.

Car on peut de la série des nombres entiers positifs croissants sans limite $n_1, n_2, \ldots, n_k \ldots$ tirer une seconde série infinie $n'_1, n'_2, \ldots, n'_k, \ldots$, pour laquelle on peut déterminer une valeur α, de sorte que les produits $n'_1 \alpha, n'_2 \alpha, \ldots, n'_k \alpha \ldots$ diffèrent toujours de moins d'un petit nombre quelconque ε avec un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$; par conséquent, que la valeur du sinus se trouve aussi près qu'on le veut de l'unité et par suite la valeur de $\alpha'_{nk} \sin n'_k \alpha$ au moins aussi près qu'on le veut de la valeur δ' différente de o.

On pose

$$n_1 \alpha > y_1 \frac{\pi}{2} - \varepsilon \quad \text{et} \quad n_1 \alpha < y_1 \frac{\pi}{2} + \varepsilon,$$

d'où

$$\frac{y_1 \frac{\pi}{2} - \varepsilon}{n_1} < \alpha < \frac{y_1 \frac{\pi}{2} + \varepsilon}{n_1},$$

y_1 désignant un nombre impair entier, et encore à déterminer. La valeur de α tombe dans l'intervalle donné de a à b si l'on a

$$a < \frac{y_1 \frac{\pi}{2} - \varepsilon}{n_1}, \quad b > \frac{y_1 \frac{\pi}{2} + \varepsilon}{n_1}.$$

ou

$$(n_1 a + \varepsilon) \frac{2}{\pi} < y_1 < (n_1 b - \varepsilon) \frac{2}{\pi}.$$

Cet intervalle contiendra sûrement un nombre impair si l'on choisit

$$[n_1 (b - a) - 2\varepsilon] \frac{2}{\pi} \geqq 2 \quad \text{ou} \quad n_1 \geqq \frac{\pi + 2\varepsilon}{b - a}.$$

Cette demande sert à fixer une limite inférieure n'_1 pour la série à former, et c'est justement en ce qu'il est nécessaire de fixer une limite inférieure que repose l'essentiel de toute la preuve. Aurait-on choisi y_1, d'après l'inégalité précédente, α se trouve sur un intervalle déterminé brièvement par

$$a' = \frac{y_1 \frac{\pi}{2} - \varepsilon}{n'_1}, \quad b' = \frac{y_1 \frac{\pi}{2} + \varepsilon}{n'_1},$$

et d'une longueur $\frac{2\varepsilon}{n'_1}$.

Dans cet intervalle, il nous faut déterminer α, de telle façon que, pour $n'_2 > n'_1$, on ait

$$\frac{y_2\frac{\pi}{2}-\varepsilon}{n'_2} < x < \frac{y_2\frac{\pi}{2}+\varepsilon}{n'_2};$$

y_2 doit répondre à l'inégalité

$$(n'_2 a' + \varepsilon)\frac{2}{\pi} < y_2 < (n'_2 b' - \varepsilon)\frac{2}{\pi};$$

il est plus grand que y_1; dans cet intervalle il se trouvera au moins un nombre impair si

$$n'_2 \geqq \left(\frac{\pi+2\varepsilon}{b'-a'} = \frac{\pi+2\varepsilon}{2\varepsilon}\,n'_1\right).$$

De cette façon nous ne possédons toujours qu'une limite inférieure, selon laquelle on tire n'_2 de la série primitive $n_1, n_2, \ldots$ et après que y_2 est choisi selon l'inégalité donnée, il reste encore la grandeur α limitée sur un intervalle fini, dont la longueur est $\frac{2\varepsilon}{n'_2}$.

Dans cet intervalle, on peut déterminer un nouvel intervalle, pour les valeurs duquel une grandeur $n'_3 . \alpha$ répond à la question, et ainsi de suite une place α sera définie par ce procédé, pour laquelle les valeurs $\sin n'_1\alpha$, $\sin n'_2\alpha$, $\ldots$, $\sin n'_k\alpha$, $\ldots$ sont différentes de l'unité de quantités aussi petites qu'on le veut, de sorte que contrairement à l'hypothèse la valeur absolue des membres de la série

$$a_{n'_1}\sin n'_1\alpha,\quad a_{n'_2}\sin n'_2\alpha,\quad \ldots,\quad a_{n'_k}\sin n'_k\alpha\ \ldots$$

n'est pas plus petite que δ'.

Il n'existe donc pas de série a_{n_1}, a_{n_2}, ... dont les valeurs sont toutes égales ou plus grandes que tout petit nombre δ', c'est-à-dire que l'on ait $\lim a_n = 0$, de même que $\lim b_n = 0$.

Théorème XVI. — *Si deux séries trigonométriques, en général convergentes, concordent partout, excepté aux points discrets dans un intervalle de $-\pi$ à $+\pi$, c'est-à-dire si leur différence forme une série trigonométrique, qui en général est nulle et seulement aux points discrets différente de 0 d'une quantité*

plus grande que δ, ou enfin, dans le cas où elle diverge, seulement aux points discrets posséderait des limites d'indétermination dont la valeur est plus grande que δ : ces deux séries sont identiques dans leur forme, c'est-à-dire que les coefficients correspondants sont égaux et leur différence est partout nulle.

La différence des deux séries donne une série avec des coefficients qui finalement disparaissent.

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} (c_k \sin kx + d_k \cos kx),$$

ce qui définit une fonction $f(x)$ qui seulement aux points discrets diffère de o d'une valeur déterminable, ou possède des limites d'indéterminations dont la différence avec o est plus grande que δ.

La série trigonométrique

$$\frac{1}{2} d_0 x^2 - \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{c_k \sin kx + d_k \cos kx}{k^2}$$

définit une fonction continue $F(x)$ qui, comme Riemann ([1]) l'a démontré, a la propriété que premièrement

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{F(x + \Delta x) - 2F(x) + F(x - \Delta x)}{\Delta x^2} = f(x)$$

partout où $f(x)$ est convergente, et secondement que partout sans exception

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{F(x + \Delta x) - 2F(x) + F(x - \Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

D'après cela, la fonction $F(x)$ répond aux conditions du théorème XIII et est une fonction linéaire :

$$Cx + C' + \frac{1}{2} d_0 x^2 = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{c_k \sin kx + d_k \cos kx}{k^2}.$$

([1]) *L. c.*, p. 232. Le théorème de Riemann sert de fondement à la démonstration ici comme plus loin, § 6.

Il s'ensuit que $C = d_0 = 0$, car l'égalité doit subsister pour toutes les valeurs de x, et le second membre de l'égalité est une fonction périodique.

La série infinie du second membre est uniformément convergente, car la série $\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{k^2}$ est convergente.

On peut alors facilement prouver, en intégrant entre les limites $-\pi$ à $+\pi$ (le second membre peut être intégré terme à terme), après que l'on a multiplié chaque membre par $\sin lx$ et $\cos lx$, que

$$C' = 0 \quad \text{et} \quad c_k = d_k = 0$$

pour toutes les valeurs de k, parce que

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin \overline{kx}^2 \, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos \overline{kx}^2 \, dx = \pi$$

et

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \sin lx \, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \cos lx \, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \cos kx \, dx = 0$$

(k et l sont des nombres entiers différents).

Ces dernières équations sont appelées les propriétés des intégrales des fonctions trigonométriques.

Le théorème démontré attire l'attention sur une circonstance particulière de la série trigonométrique. Si une fonction $f(x)$ est définie par une série trigonométrique dans l'intervalle de $-\pi$ à $+\pi$, et qu'on la change aux points discrets, il n'existera pour cette nouvelle fonction aucune autre série trigonométrique que la primitive. On peut même dire que celle-ci doit être considérée comme la seule et unique représentation de la nouvelle fonction par une série trigonométrique, quoique la fonction et la série diffèrent en un nombre infini de points, qui, il est vrai, sont discrets.

Le premier théorème de ce paragraphe repose sur la propriété plus générale d'une masse discrète et peut par conséquent être étendu à des points qui, dans un intervalle, ne sont pas partout denses.

Le deuxième théorème demande pour sa preuve le théorème XIII et est, par cela même, joint à la seconde propriété d'une masse discrète.

Il me semble impossible de prouver le théorème XIII sans employer cette propriété.

III

Sur la représentation des valeurs moyennes d'une fonction, par une série de Fourier.

Une série trigonométrique sera dite série de Fourier, si ses coefficients ont la forme

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin kx\,dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx\,dx,$$

$$b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx.$$

$f(x)$ est une fonction quelconque intégrable, seulement dans l'intervalle de $-\pi$ à $+\pi$.

Pour qu'une série infinie composée avec ces coefficients puisse en général être convergente, il faut que, d'après le premier théorème du paragraphe précédent, $\lim a_k = 0$, $\lim b_k = 0$ pour $k = \infty$. La fonction $f(x)$ doit aussi remplir cette condition. Je remplace cette condition par la condition, plus étroite comme on le verra plus tard : « *Non seulement $f(x)$, mais aussi $[f(x)]^2$, doivent être intégrables dans le même intervalle.* »

Cette condition sera remplie d'elle-même si $f(x)$ est partout une fonction finie et intégrable ; elle peut aussi subsister, si $f(x)$ devient infini ; il n'y a que la manière de devenir infini qui est limitée.

Cette condition sera introduite pour montrer la propriété importante des coefficients que M. Plarr (¹), et plus tard, indépendamment de ce dernier, M. Töpler (²), ont démontrées.

Si l'on considère le problème de représenter une fonction qui est

---

(¹) *Comptes rendus,* mai 1857.

(²) Les questions générales de cette espèce ont été étudiées d'une manière plus large dans la dissertation de M. Gram : *Om Rækkeudviklinger bestemte ved Hjælp af de mindste Kvadraters Methode.* Kjöbenhavn, 1879. — *Anzeiger der Akad. zu Wien,* 7 déc. 1876. — *Repertorium der Math.,* F. I, p. 302.

intégrable ainsi que son carré, et qui est donnée arbitrairement pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle de $-\pi$ à $+\pi$, par une série avec un nombre fini de termes,

$$b_0 + \sum_{k=1}^{k=n} (a_k \sin kx + b_k \cos kx),$$

et cela de la manière la plus avantageuse, c'est-à-dire que, d'après la méthode des moindres carrés,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} [f(x) - b_0 - \sum_{k=1}^{k=n} (a_k \sin kx + b_k \cos kx)^2 dx$$

soit un minimum, on trouve, par la différentiation partielle de l'intégrale relativement à chaque coefficient, que d'après la propriété des intégrales des fonctions représentant sin et cos, chaque coefficient doit prendre la valeur qu'il possède dans le développement de la série de Fourier. Il obtient cette valeur indépendamment du nombre n de membres pris dans la série et de la manière de laquelle ceux-ci ont été choisis.

Théorème XVII. — *Chaque terme de la série de Fourier a la propriété, qu'il donne, considéré en lui-même, avec la plus petite déviation, définie plus haut, une représentation de la fonction dans un intervalle de* $-\pi$ *à* $+\pi$.

Je me sers de l'intégrale précédente, au moyen de laquelle la grandeur de la déviation est mesurée pour la démonstration du

Théorème XVIII. — *Si une fonction* $f(x)$ *et son carré sont intégrables, on a*

$$\lim \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx\, dx = 0$$

et

$$\lim \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx\, dx = 0$$

pour $n = \infty$.

En effet, si l'on résout l'intégrale, dans laquelle a_k et b_k sont les

intégrales au commencement définies, on obtient l'égalité

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\left[f(x)-b_0-\sum_{k=1}^{k=n}(a_k\sin kx+b_k\cos kx)\right]^2 dx$$

$$=\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2\,dx-2\pi b_0^2-\pi\sum_{k=1}^{k=n}(a_k^2+b_k^2).$$

Le premier membre de l'égalité est positif, quelque grand que soit n, et par conséquent le second membre ne devient pas négatif si grand que soit n. De là

$$2\pi b_0^2+\pi\sum_{k=1}^{k=n}a_k^2+b_k^2$$

ne dépassera pas la valeur $\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2\,dx$ pour les valeurs arbitrairement croissantes de n.

On peut alors déterminer n, de telle façon que

$$\sum_{k=n}^{k=n+m}a_k^2+b_k^2$$

reste pour toutes les valeurs de m une grandeur aussi petite qu'on voudra.

Il s'ensuit que $\lim a_n$ et $\lim b_n$ sont égales à o.

En même temps se trouve démontré le théorème suivant :

Théorème XIX. — *Les coefficients d'une série de Fourier où $f(x)$ est intégrable ainsi que son carré tendent vers* o *de façon que*

$$\lim a_n\sqrt{n}\quad\text{et}\quad\lim b_n\sqrt{n}=0.$$

Il est utile de remarquer que dans cette preuve la fonction n'est nullement limitée quant à ce qui touche le nombre des maxima et minima.

Dans le cas que le nombre de maxima et minima dans la fonction $f(x)$ est fini, MM. Heine et C. Neumann ont donné des limites supérieures pour les intégrales

$$\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\sin nx\,dx\quad\text{et}\quad\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\cos nx\,dx$$

pour chaque valeur de n (*Kugelfunctionen*, 2. Auflage, t. I; et *Die Kreis- Kugel- u. Cylinderfunctionen*, Leipzig, 1881).

Il faut remarquer du reste que, dans le théorème précédent, n désigne l'indice que a_n et b_n reçoivent véritablement dans la série $\Sigma\, a_k^2 + b_k^2$; il s'ensuit que le théorème XIX *n'a pas de valeur dans sa forme pour une série, dans laquelle manque un nombre infini de membres:* comme par exemple dans la série $\Sigma a^n \sin(b^n x)$, où b est nombre entier quelconque et où l'on peut avoir $a < 1$ et $a\sqrt{b} > 1$.

Comme $f(x)$ est une fonction quelconque, on pourra donner au théorème XVIII la forme suivante :

Théorème XX. — *Si $f(x)$ et son carré sont des fonctions intégrables, on a entre des limites quelconques*

$$\lim \int_{x_0}^{x_1} f(x) \sin nx\,dx \quad \text{et} \quad \lim \int_{x_0}^{x_1} f(x) \cos nx\,dx = 0.$$

Le résultat nous dit davantage; car, si l'on désigne le reste de la série de Fourier, à partir du terme possédant l'indice n au terme à l'index $n+m$, par R_{nm}, on a

$$R_{nm} = \sum_{k=n}^{k=n+m} a_k \sin kx + b_k \cos kx$$

et

$$\int_{-\pi}^{+} R_{mn}^2\,dx = \pi \sum_{k=n}^{k=n+m} a_k^2 + b_k^2.$$

Le reste R_{nm} a alors la propriété, qu'en choisissant n on peut rendre l'intégrale de R_{nm}^2 plus petite que tout petit nombre δ, et comme l'intégrale ne contient que des termes positifs, il est clair que, entre des limites quelconque x_0 et x_1 tombant dans l'intervalle de $-\pi$ à $+\pi$, on aura

$$\int_{x_0}^{x_1} R_{nm}\,dx < \delta.$$

Nous tirons de cette inégalité que toutes les places où la valeur R_{nm} est plus grande qu'un nombre quelconque g ne peuvent remplir qu'un intervalle h, qui est déterminé par la condition

$g^2 h < \delta$. De là on a

$$\int_{x_0}^{x_1} \operatorname{abs}[\mathrm{R}_{nm}]\,dx < g(x_1 - x_0) + \frac{\delta}{g},$$

et si l'on pose $g = \sqrt{\dfrac{\delta}{x_1 - x_0}}$, le second membre de l'inégalité sera alors plus petit que $2\sqrt{\delta(x_1 - x_0)}$ et

$$\operatorname{abs}\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{R}_{nm}\,dx \leqq \int_0^{x_1} \operatorname{abs}\mathrm{R}_{nm}\,dx < 2\sqrt{\delta(x_1 - x_0)}.$$

pour toutes les valeurs de m, seulement en choisissant n [1].

Désignons par S_n la somme des termes

$$b_0 + \sum_{k=1}^{k=n} (a_k \sin kx + b_k \cos kx),$$

on aura, d'après le théorème démontré plus haut, que

$$\lim \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{S}_n(x)\,dx,$$

pour $n = \infty$, a une valeur déterminée. Car

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{S}_{n+m}\,dx - \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{S}_n(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{R}_{n+1,m}\,dx$$

est une différence qui, par le choix de m, devient aussi petite qu'on le veut, indépendamment de m.

Nous avons à déterminer la valeur de cette intégrale. D'après la sommation connue et développée par Dirichlet, on a

$$\mathrm{S}_n = b_0 + \sum_{k=1}^{k=n} (a_k \sin kx + b_k \cos kx) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{k=n} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos k(\alpha - x)\,d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(\alpha - x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}\,d\alpha.$$

---

[1] Il ne faut pas conclure de cette inégalité que R_{nm}, par un choix de n indépendant de m, devienne aussi petite qu'on le veut même pour une valeur unique de x; car, d'après les valeurs variées de m, des valeurs oscillantes peuvent appartenir à la même place x, et ces valeurs peuvent devenir aussi grandes qu'on le veut. L'en-

Après le remplacement de l'ordre de l'intégration, on a

$$\int_{x_0}^{x_1} S_n(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(\alpha - x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}\,dx.$$

L'intégrale se partage en deux parties,

$$\int_{x_0}^{x_1} S_n(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sin n(\alpha - x)\cos\frac{1}{2}(\alpha - x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}\,dx$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha \int_{x_0}^{x_1} \cos n(\alpha - x)\,dx.$$

Le second terme du second membre reçoit, après le développement de l'intégrale intérieure, le facteur $\frac{1}{n}$ et tend vers o, avec des valeurs croissantes de n; il faudra alors considérer la limite du premier terme et nous la désignerons par le signe I.

Nous posons $\int_{-\pi}^{x} f(x)\,dx = \varphi(x)$ ou $f(x) = \varphi'(x)$; de là il suit

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi'(\alpha)\,d\alpha \int_{\alpha - x_1}^{\alpha - x_0} \sin nz \cot\tfrac{1}{2}z\,dz;$$

désignons l'intégrale intérieure simplement par $\psi(\alpha)$, on a, après l'intégration par parties,

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi'(\alpha)\psi(\alpha)\,d\alpha$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[\varphi(\alpha)\psi(\alpha)\right]_{-\pi}^{+\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha)\psi'(\alpha)\,d\alpha.$$

Cette formule est valable pour toutes les valeurs finies de n, car les fonctions φ et ψ sont partout finies. Mais, comme $\varphi(-\pi) = 0$ et

$$\psi'(\alpha) = \sin n(\alpha - x_0)\cot\tfrac{1}{2}(\alpha - x_0) - \sin n(\alpha - x_1)\cot\tfrac{1}{2}(\alpha - x_1)$$

on a

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx \int_{\pi - x_1}^{\pi - x_0} \sin nz \cot\tfrac{1}{2}z\,dz$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha)\left[\sin n(\alpha - x_1)\cot\tfrac{1}{2}(\alpha - x_1) - \sin n(\alpha - x_0)\cot\tfrac{1}{2}(\alpha - x_0)\right]d\alpha.$$

---

semble de ces places ne doit remplir, pour chaque valeur de m, qu'un intervalle plus petit que $\frac{\delta}{g^2}$.

Si x_0 et x_1 se trouve *dans l'intervalle* de $-\pi$ à $+\pi$, l'argument $\frac{1}{2}z$ dans l'intégrale de la première somme ne sera ni nul ni égal à π; $\cot\frac{1}{2}z$ sera alors une fonction continue et finie dans l'intervalle d'intégration et, d'après le théorème XX,

$$\lim_{n=\infty}\int_{-\pi-x_1}^{\pi-x_1}\sin nz\cot\tfrac{1}{2}z\,dz=0.$$

On prend de nouveau dans l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\cot\tfrac{1}{2}(\alpha-x_1)\sin n(\alpha-x_1)\,d\alpha$$

un petit intervalle aussi petit qu'on le veut et qui renferme les places $\alpha=x_1$. A l'extérieur de cet intervalle $\varphi(\alpha)\cot\frac{1}{2}(\alpha-x_1)$ est une fonction continue et finie et la valeur limite des intégrales relatives à ces parties d'intervalle est égale à zéro. On a

$$\lim\int_{x_0}^{x_1}S_n(x)\,dx=\lim_{n=\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{+\delta}[\varphi(x_1+z)-\varphi(x_0+z)]\cot\tfrac{1}{2}z\sin nz\,dz.$$

D'après les théorèmes qui seront démontrés dans le paragraphe suivant à propos de la valeur limite de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{+\delta}F(z)\cot\tfrac{1}{2}z\sin nz\,dz,$$

et comme la fonction

$$\varphi(x_1+z)-\varphi(x_0+z)=\int_{x_0+z}^{x_1+z}f(x)\,dx=F(z)$$

est continue et possède une dérivée dont le carré est intégrable, on a

$$\lim\int_{x_0}^{x_1}S_n(x)\,dx=F(0)=\int_{x_0}^{x_1}f(x)\,dx;$$

cela prouve le théorème suivant :

Théorème XXI. — *Si l'on forme, à l'aide d'une fonction qui, de même que son carré, est intégrable (spécialement avec une fonction continue), les coefficients de la série de Fourier, cette série donne toujours une représentation des valeurs moyennes de $f(x)$, quand même la fonction a un nombre infini de maxima*

et de minima en un nombre infini de places. Par rapport à tout petit intervalle de x_0 à x_1, la valeur moyenne de la fonction sera donc exprimée avec une approximation quelconque par la valeur moyenne de la série de Fourier intégrée terme à terme.

Cette représentation peut être appelée uniformément convergente. Soit h la longueur de l'intervalle d'intégration ; on peut rapprocher à volonté la valeur moyenne de $S_n(x)$ dans l'intervalle de x à $x+h$ de la valeur moyenne de $f(x)$, et cela pour toutes les valeurs de x, uniquement par le choix de n.

Car la série

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} S_n(x)\,dx = b_0 + \sum_{k=1}^{k=n} -\frac{a_k}{k}\,\frac{\cos k(x-h) - \cos kx}{h} + \frac{b_k}{k}\,\frac{\sin k(x-h) - \sin kx}{h}$$

est, d'après le théorème XIX, uniformément convergente, dès qu'une valeur déterminée et finie de h est donnée.

Cette formule reste valable si les limites de l'intégrale se confondent avec les limites $-\pi$ à $+\pi$, soit séparément, soit toutes deux.

Nous verrons plus tard que l'on peut encore plus étendre les suppositions de ce théorème.

Ce théorème peut être considéré comme la suite du théorème sur l'intégration d'une série trigonométrique, qui sera discuté dans le dernier paragraphe. La preuve donnée ici est plus générale, car on ne fait pas l'hypothèse que la représentation de la fonction $f(x)$ doit avoir lieu par une série trigonométrique.

Il me semble important de rendre attentif sur ce que la nature de la série de Fourier existe dans la représentation de la valeur moyenne (comme toutes le séries analogues). Elle rend ce service pour toutes les fonctions continues sans exception.

Une autre question plus éloignée est celle-ci : Sous quelles conditions la série de Fourier nous donne-t-elle la valeur de la fonction $f(x)$ en une place déterminée?

La réponse est donnée par le théorème de Riemann : *Si la série*

en un point pour lequel $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ *a une valeur déterminée est convergente, elle tend toujours vers cette valeur.* [*Voir* plus loin le théorème XXVIII, intimement uni au théorème de M. du Bois-Reymond (théorème XXVII)].

Les recherches commencées par Dirichlet, et poursuivies par d'autres, cherchent à répondre à la question suivante : Sous quelles conditions la série de Fourier devient-elle convergente en une place déterminée?

(*A suivre.*)

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

REYE (W.-Th.), Professeur à l'Université de Strasbourg. — Leçons sur la Géométrie de position, traduites de l'allemand par O. Chemin, Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées. 2 vol. grand in-8, avec figures, 1881-1882. — Paris, chez Dunod.

Il y a longtemps que l'opinion du public mathématique est faite sur le Livre dont nous avons sous les yeux une excellente traduction française. Cet Ouvrage qui a eu pour origine les leçons faites par l'auteur à l'École Polytechnique de Zurich, pour servir d'introduction à l'étude de la Statique graphique, mais qui s'adresse aussi à tous ceux qui désirent s'initier aux méthodes de la Géométrie de situation, a pleinement répondu à son but. Écrit avec la clarté et l'élégance de style qui distinguent M. Reye, il a su rendre accessibles les théories de la *Geometrie der Lage* du profond géomètre d'Erlangen, von Staudt.

Il n'est pas besoin d'insister ici sur toute l'importance de l'œuvre de Staudt. Qui ne sait aujourd'hui que c'est lui qui a établi sur des fondements indépendants la science des propriétés descriptives des figures, propriétés qu'une distinction bien tranchée sépare des propriétés métriques, lesquelles ne doivent plus être regardées comme des propriétés inhérentes aux figures de l'espace, mais plutôt comme des relations de ces figures avec une autre figure, le cercle à l'infini sur la sphère?

Si l'on peut citer dans les Mathématiques des chefs-d'œuvre accomplis, au point de vue du développement et de la coordination des idées, l'œuvre de Staudt en est un. Ainsi l'étude de la Science qu'il a su fonder se recommande à tous ceux qui s'intéressent aux Mathématiques, quelque restreint que puisse paraître son cadre. On trouvera dans cette étude achevée d'une portion, peut-être limitée, mais fort belle de la Géométrie, la réalisation de l'idéal qui reste encore à atteindre dans d'autres parties des Mathématiques.

M. Reye n'a cependant point suivi pas à pas la marche de v. Staudt. Les travaux antérieurs de Poncelet, de Möbius, de Steiner lui ont servi à apporter plusieurs perfectionnements à son exposition. Mais son Livre contient aussi plusieurs Chapitres qui lui sont

dus en entier et qui sont son œuvre personnelle. Et certes ce ne sont pas ces Chapitres, consacrés au développement purement géométrique de plusieurs sujets difficiles et nouveaux en bonne partie, qui constituent la partie la moins importante de son travail. Ainsi on lira avec le plus grand intérêt les Chapitres sur les systèmes linéaires de coniques et de surfaces du second ordre, sur les correspondances quadratiques dans le plan, sur les complexes tétraédraux, sur les surfaces et les courbes planes du troisième ordre, sur la surface de Steiner, sur le système de rayons du deuxième ordre, sur la surface de Kummer, etc.

La traduction de M. Chemin, faite avec infiniment de goût et avec une connaissance parfaite du sujet, ne laisse rien à reprendre. Elle fait honneur à l'habile professeur de l'École des Ponts et Chaussées, qu'on ne saurait trop féliciter de l'heureuse détermination qu'il a prise de faire connaître en France divers travaux mathématiques justement renommés.

Le choix des termes pouvant rendre en français les expressions de l'original a été l'objet de beaucoup de soin; et ce n'était point la portion la moins ardue du travail.

Aussi nous croyons que le livre dont M. Chemin nous a offert une si bonne traduction française trouvera en France un accueil chaleureux, non seulement auprès des personnes qui voudront entreprendre l'étude de la *Statique graphique* de Culmann (¹), mais aussi auprès de tous ceux qui s'intéressent à la Géométrie.

C. S.

MÉLANGES.

THÉORIE DE LA SÉRIE DE FOURIER.

Par M. le Dr Axel HARNACK, à Dresde.

(SUITE ET FIN.)

IV.

De la convergence d'une série en une place déterminée.

Dans le paragraphe précédent, nous avons montré que la

(¹) Dont une première partie vient déjà de paraître chez Dunod.

somme

$$S_n(x) = b_0 + \sum_{k=1}^{k=n} a_k \sin kx + b_k \cos kx$$

est égale à

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(\alpha - x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}\,d\alpha.$$

Cette intégrale se partage en deux parties

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,\frac{\sin n(\alpha - x)\cos\frac{1}{2}(\alpha - x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}\,d\alpha$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos n(a - x)\,d\alpha.$$

La limite du second membre pour $n = \infty$ est à déterminer.

La seconde intégrale converge *uniformément*, c'est-à-dire indépendamment de x, vers o, si l'on choisit n aussi grand qu'on le veut, parce que la fonction $f(x)$, ainsi que son carré, est intégrable.

Dans la première intégrale, on prend un petit intervalle quelconque à partir de $\alpha = x - \delta$ jusqu'à $\alpha = x + \delta$; à l'extérieur de cet intervalle, la fonction $f(\alpha)\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha - x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}$ est, ainsi que son carré, intégrable, et de là l'intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{x+\delta} + \frac{1}{\pi}\int_{x+\delta}^{+\pi} f(\alpha)\,\frac{\sin n(\alpha - x)\cos\frac{1}{2}(\alpha - x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}\,d\alpha$$

converge *uniformément* vers o pour une valeur constante de δ.

Nous n'avons plus qu'à considérer l'intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(\alpha)\,\frac{\sin n(\alpha - x)\cos\frac{1}{2}(\alpha - x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}\,d\alpha$$

et nous aurons prouvé le théorème suivant :

Théorème XXII. — *La valeur de la série de Fourier en une place quelconque ne dépend que de la nature de la fonction $f(x)$ aux environs aussi rapprochés qu'on le veut de cette place.*

Après la substitution $\alpha - x = \beta$, l'intégrale prendra la forme

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{+\delta} f(x+\beta)\,\frac{\sin n\beta\cos\frac{1}{2}\beta}{2\sin\frac{1}{2}\beta}\,d\beta$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}[f(x+\beta)+f(x-\beta)]\,\frac{\sin n\beta\cos\frac{1}{2}\beta}{2\sin\frac{1}{2}\beta}\,d\beta.$$

La limite de cette intégrale décide dans tous les cas sur la valeur $\varphi(x)$ de la somme de la série, et la série de Fourier convergera uniformément vers cette valeur, si l'intégrale peut être, indépendamment de x, amenée aussi près qu'on le veut de sa limite par un choix convenable de n, pendant que δ est invariable.

Mais $\cos\frac{1}{2}\beta\,\dfrac{\beta}{2\sin\frac{1}{2}\beta}$ est une fonction continue de β, et égale à l'unité pour $\beta = 0$; de plus, cette fonction est positive dans l'intervalle de $\beta = 0$ à $\beta = \delta$, et possède des valeurs décroissantes. On pourra alors, à l'aide d'un théorème connu, donner une autre forme à l'intégrale. J'emploie ici ce théorème dans sa forme la plus simple donnée par Bonnet ([1]).

Dans le cas où $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont intégrables et $\varphi(x)$ une fonction continue, constamment positive ou négative, dont les valeurs absolues décroissent, on a l'égalité

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = \varphi(a)\int_a^{a+\theta(b-a)}\psi(x)dx \quad (0 < \theta < 1).$$

Par le renversement des limites on obtient, si les valeurs croissent, pendant que x parcourt l'intervalle de a à b, l'égalité

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = -\int_b^a \varphi(x)\psi(x)dx = \varphi(b)\int_{a+\theta(b-a)}^b \psi(x)dx.$$

On peut alors, au lieu de notre intégrale, substituer directement

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta'}[f(x+\beta)+f(x-\beta)]\,\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta,$$

δ' étant une valeur entre 0 et δ. La limite supérieure δ' est variable,

---

([1]) *Journal de Mathématiques*, t. XIV, p. 249. — Du Bois-Reymond, *Journal für Mathematik*, t. LXIX.

elle dépend de n, mais l'intégrale

$$\int_0^{\delta} [f(x+\beta)+f(x-\beta)]\left(\frac{\cos\frac{1}{2}\beta}{2\sin\frac{1}{2}\beta}-\frac{1}{\beta}\right)\sin n\beta\, d\beta$$

a toujours la valeur limite o.

Il faut alors, dans le cas où l'intégrale primitive donne une valeur limite déterminée, que l'autre intégrale possède la même valeur limite et réciproquement.

En posant, dans l'hypothèse que $f(x+\beta)+f(x-\beta)$ ait une valeur déterminée pour $\beta = 0$,

$$[f(x+\beta)+f(x-\beta)]-[f(x+0)+f(x-0)] = \lambda(\beta),$$

on aura

$$\lim S_n(x) = [f(x+0)+f(x-0)] \lim \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{\sin n\beta}{\beta}\, d\beta + \lim \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\lambda(\beta)\frac{\sin n\beta}{\beta}\, d\beta,$$

$$\lim_{n=\infty}\int_0^{\delta}\frac{\sin n\beta}{\beta}\, d\beta = \lim_{n=\infty}\int_0^{n\delta}\frac{\sin\beta}{\beta}\, d\beta = \frac{\pi}{2}.$$

L'énoncé de ce résultat sera le suivant :

Théorème XXIII. — *La série ne converge en une place déterminée d'après la valeur* $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ *que si*

$$\lim_{n=\infty}\int_0^{\delta}\lambda(\beta)\frac{\sin n\beta}{\beta}\, d\beta = 0.$$

Les recherches nombreuses et pleines de valeur qu'ont faites MM. du Bois-Reymond (1) et Dini (2), sur les conditions pour la convergence de cette intégrale, vont être discutées.

Nous ne prendrons que les théorèmes les plus importants, qui se trouvent directement dans l'équation ainsi formée, et qui sont indispensables pour ce qui suit.

1. Si la fonction continue $\lambda(\beta)$, qui disparaît par $\beta = 0$, ne

(1) *Abhandlungen d. K. Bay. Akad.*, 2 Kl. L. XII, Abth. II.
(2) *Serie di Fourier*. Pisa, 1880.

possède pas aux environs de la place o un nombre infini de maxima et de minima (condition de Dirichlet), on a, d'après le théorème de Bonnet,

$$\int_0^{\delta} \lambda(\beta)\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta = \lambda(\delta)\int_{\theta\delta}^{\delta}\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta = \lambda(\delta)\int_{n\theta\delta}^{n\delta}\frac{\sin\beta}{\beta}\,d\beta.$$

Cette dernière intégrale reste toujours finie indépendamment de θ, si grand que soit n, pendant que $\lambda(\delta)$ est aussi petit qu'on le veut. Il se trouve alors démontré que, par un choix convenable de n, la valeur de $S_n(x)$ diffère aussi peu qu'on le veut de

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

c'est-à-dire que

$$b_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty}(a_k \sin kx + b_k \cos kx) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

On obtient en même temps que la série de Fourier converge partout uniformément, si la fonction $f(x)$ est partout continue, et ne possède pas un nombre infini de maxima et de minima.

Car, dans ce cas, on peut choisir une valeur de δ, telle que, *pour toutes les valeurs de* x, la valeur absolue de $\lambda(\delta)$ soit plus petite que tout petit nombre déterminé. Si la fonction $f(x)$ ne subit de brusques discontinuités qu'aux points discrets, on renferme ceux-ci dans des intervalles aussi petits qu'on le veut; à l'exception de ces places, la série convergera uniformément.

2. *La série converge en une place x où les valeurs absolues du quotient $\frac{\lambda(\beta)}{\beta}$ sont intégrables aux environs du point* o, *même si $\lambda(\beta)$ contient un nombre infini de maxima et de minima.*

Car, dans ce cas, $\int_0^{\delta}\frac{\lambda(\beta)}{\beta}\sin n\beta\,d\beta$ est aussi petit qu'on le veut, par un choix convenable de δ pour toutes les valeurs de n, et cela parce que la valeur de cette intégrale est plus petite que l'intégrale

$$\int_0^{\delta}\text{abs}\left|\frac{\lambda(\beta)}{\beta}\right|d\beta.$$

Cette condition contient celle qu'a donnée M. Lipschitz [1]. La

[1] *Journal für Mathematik*, t. 63.

série de Fourier converge, si la valeur de $\lambda(\beta)$ reste toujours plus petite que le produit $C\beta\alpha$, où C est une constante et α un nombre quelconque positif aussi petit qu'on le désire.

Cette condition sera en particulier remplie si

$$\frac{\lambda(\beta)}{\beta} = \frac{f(x+\beta)-f(x+0)}{\beta} + \frac{f(x-\beta)-f(x-0)}{\beta}$$

reste finie pour $\beta = 0$, c'est-à-dire *si la fonction $f(x)$ au point x possède des valeurs finies du quotient différentiel pris en avant et en arrière.*

3. Ce théorème peut être généralisé. Si la fonction $\lambda(\beta)$ possède dans l'intervalle de 0 à δ une dérivée $\lambda'(\beta)$ intégrable, on a, d'après la règle de l'intégration partielle,

$$\int_0^\delta \lambda(\beta)\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta$$
$$= \int_0^\delta \lambda'(\alpha)\,d\alpha \int_\alpha^\delta \frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta = \int_0^\delta \lambda'(\alpha)\,d\alpha \int_{n\alpha}^{n\delta} \frac{\sin y}{y}\,dy.$$

Si les valeurs absolues de $\lambda'(\alpha)$ sont intégrables, on a

$$\text{abs}\int_0^\delta \lambda'(\alpha)\,d\alpha \int_{n\alpha}^{n\delta}\frac{\sin y}{y}\,dy < \int_0^\pi \frac{\sin y}{y}\,dy \int_0^\delta \text{abs}[\lambda'(\alpha)]\,d\alpha,$$

car la valeur de $\int_{n\alpha}^{n\delta}\frac{\sin y}{y}\,dy$ reste toujours plus petite que

$$\int_0^\pi \frac{\sin y}{y}\,dy.$$

Le second membre peut être fait aussi petit qu'on le veut par le choix de δ, et comme $\lim_{n=\infty}\int_\delta^h \lambda(\beta)\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta$ devient sûrement à 0, on aura

$$\lim_{n=\infty}\int_0^h \lambda(\beta)\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta$$

aussi petit qu'on le veut, c'est-à-dire nul. Nous nous trouvons alors avoir démontré que : *Si pour la fonction $f(x)$, au point x, $f(x+\beta)+f(x-\beta)$ est une fonction continue de β qui possède une dérivée absolument intégrable par rapport à β, la série de Fourier converge en ce point vers la valeur*

$$\tfrac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)].$$

V.

Des fonctions dont le carré n'est pas intégrable.

Dans les recherches du § III, la propriété nécessaire pour la convergence, c'est-à-dire la disparition de $\lim a_n$, $\lim b_n$ pour $n = \infty$, était la suite de l'intégrabilité de $[f(x)]^2$. Si nous laissons de côté cette hypothèse, et que nous considérions une fonction qui aux points discrets est infinie, de telle façon qu'elle-même reste intégrable, mais pas son carré, nous nous poserons nécessairement la question : pour quelles conditions dans ce cas la série de Fourier nous donnera-t-elle une représentation des valeurs moyennes?

Désignons l'intégrale de la fonction donnée $f(x)$, qui a $-\pi$ comme limite inférieure, par

$$\int_{-\pi}^{x} f(x)\,dx = F(x),$$

de sorte que $F'(x)$ concorde avec $f(x)$ à l'exception des points discrets (théorème VIII); on a alors, d'après le théorème de l'intégration partielle,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\sin nx\,dx = \left[-\frac{1}{n}F(x)\cos nx\right]_{-\pi}^{+\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{1}{n}F(+\pi) + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx,$$

et

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\cos nx\,dx = \left[\frac{1}{n}F(x)\sin nx\right]_{-\pi}^{+\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$= -\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Multiplions ces égalités par $\sqrt{n}$, on aura

$$\sqrt{n}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\sin nx\,dx = (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}F(+\pi) + \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$

$$\sqrt{n}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\cos nx\,dx = -\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

D'après le théorème XIX le premier membre de ces égalités converge vers 0 pour $n = \infty$, et le théorème suivant se trouve être démontré :

Théorème XXIV. — *Pour chaque fonction intégrable, on a*

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx\, dx \quad et \quad \lim \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx\, dx,$$

égal à o *pour* $n = \infty$.

Du reste, ce théorème n'a de valeur, comme il a été remarqué au théorème XIX, que dans l'hypothèse que la série des intégrales est complète. Si ce n'était pas le cas, le théorème subsistera toujours si l'on introduit au lieu de $\frac{1}{\sqrt{n}}$ le facteur $\frac{1}{n}$.

Les intégrales mêmes peuvent devenir infinies pour $n = \infty$, et Riemann en a donné un exemple.

Mais la disparition de ces intégrales est la suite nécessaire de l'intégrabilité de $f(x)$ dès que l'intégrale $\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, dx$ est absolument convergente, c'est-à-dire, dans le cas où elle est finie et déterminée, si l'on remplace $f(x)$ par ses valeurs absolues. Car la disparition des intégrales par rapport à un intervalle d'intégration où se trouvent les points d'infinis peut être prouvée de sorte que l'on fait la décomposition suivante :

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx\, dx = \int_{-\pi}^{c-\delta} + \int_{c-\delta}^{c+\delta} + \int_{c+\delta}^{c_1-\delta} + \int_{c_1-\delta}^{c_1+\delta} + \ldots$$

Chaque intégrale de la forme $\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) \sin nx\, dx$ est en valeur absolue plus petite que $\int_{c-\delta}^{c+\delta} \text{abs}[f(x)]\, dx$ et peut être faite aussi petite qu'on le veut en choisissant δ; les autres intégrales disparaissent pour $n = \infty$.

Théorème XXV. — *Si la fonction* $f(x)$ *est absolument intégrable, on a* $\lim a_n$ *et* $\lim b_n = 0$.

La condition de la convergence absolue est remplie d'elle-même, dès que $f(x)$ est partout infinie d'une manière déterminée; car, pour devenir infinie d'une manière déterminée en une place c, il faut qu'on puisse déterminer aux environs de cette place un intervalle où la fonction ne change plus son signe. Elle peut pourtant de chaque côté du point posséder des signes différents. On peut alors formuler le corollaire suivant :

Si la fonction intégrable n'est infinie que d'une manière déterminée, on a $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = 0$.

La représentation des valeurs moyennes de la fonction $f(x)$ demande que l'on ait

$$\lim \int_x^{x+h} S_n(x)\,dx = b_0 h + \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{k=n} -a_k \frac{\cos k(x+h) - \cos kx}{k}$$
$$+ b_k \frac{\sin k(x+h) - \sin kx}{n} = \int_x^{x+h} f(x)\,dx,$$

pour des valeurs quelconques de x à $x+h$.

Mais, d'après les égalités développées plus haut, on a

$$\frac{a_n}{n} = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\cos nx\,dx,$$
$$\frac{b_n}{n} = (-1)^n \frac{1}{n\pi} F(+\pi) + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\sin nx\,dx,$$
$$b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi} F(+\pi);$$

de là

$$\int_x^{x+h} S_n(x)\,dx = \frac{1}{\pi} F(+\pi)\left[\frac{x+h}{2} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k \sin k(x+h)}{k}\right]$$
$$- \frac{1}{\pi} F(+\pi)\left[\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k \sin kx}{k}\right]$$
$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{k=n} \cos k(x+h) \int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\cos kx\,dx$$
$$+ \sin k(x+h) \int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\sin kx\,dx$$
$$- \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{k=n} \cos kx \int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\cos kx\,dx$$
$$+ \sin kx \int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\sin kx\,dx.$$

Soient x et $x+h$ deux places, où la dérivée de la fonction $F(x)$ ne devient pas infinie, d'après les recherches du § IV (n° 2); le second membre de l'égalité convergera vers la valeur $F(x+h) - F(x)$, car on a

$$\frac{x}{2} = \lim \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{k-1} \frac{\sin kx}{k}.$$

Il en est de même (§ IV, n° 3) en une place où la dérivée devient infinie, mais reste absolument intégrable. L'énoncé de ce résultat sera le suivant :

Théorème XXVI. — *Chaque fonction intégrable $f(x)$ est représentée dans ses valeurs moyennes par la série de Fourier; et cela de telle façon que dans chaque intervalle pour les points finals duquel la fonction ne devient pas infinie, ou bien reste absolument intégrable, la valeur moyenne de la fonction se trouve représentée, avec une approximation d'une grandeur quelconque, par la valeur moyenne formée à l'aide d'un grand nombre quelconque de membres de la série.* (Tous les points pour lesquels la condition exprimée plus haut n'est pas remplie ne forment qu'une masse discrète.)

Dans le cas où les coefficients de la série deviennent à la fois infiniment petits, le théorème XXII subsiste, et la convergence de la série en une place unique ne dépend que du cours de la fonction aux environs aussi rapprochés qu'on le veut de cette place.

VI.

Des rapports d'une série trigonométrique avec la série de Fourier.

Si la fonction $f(x)$ est définie dès le commencement par une série trigonométrique qui n'est pas connue comme étant une série de Fourier, on peut facilement montrer que la série trigonométrique sera la série de Fourier chaque fois que la fonction ainsi définie est intégrable. C'est ce qu'on peut facilement prouver à l'aide des recherches de Riemann.

L'égalité qui donne la définition de la fonction est la suivante :

$$f(x) = b_0 + \sum_{k=1}^{k=n} (a_k \sin kx + b_k \cos kx).$$

Les coefficients ne sont pas donnés comme étant des intégrales. $f(x)$ est une fonction intégrable ; voilà pourquoi $\lim a_n = 0$ et $\lim b_n = 0$, car la série doit converger *en général*. Nous formons

alors l'égalité

$$F(x) = \frac{1}{2} b_0 x^2 - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{a_k \sin kx + b_k \cos kx}{k^2},$$

et

$$F_1(x) = \int_{-\pi}^{x} d\alpha \int_{-\pi}^{\alpha} f(\beta)\, d\beta = \int_{-\pi}^{x} f(\beta)(x-\beta)\, d\beta.$$

$F(x) - F_1(x)$ est une fonction qui, d'après Riemann, remplit les conditions du théorème XIV et qui, par conséquent, est linéaire.

On aura alors l'égalité suivante :

$$F_1(x) + C + C'(x) = \int_{-\pi}^{x} f(\beta)(x-\beta)\, d\beta + C + C'x$$
$$= \frac{1}{2} b_0 x^2 - \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k \sin kx + b_k \cos kx}{k^2}.$$

Le deuxième terme du second membre de l'égalité est une fonction périodique ; on a alors

$$F_1(x+2\pi) + C + C'(x+2\pi) - \tfrac{1}{2} b_0 (x+2\pi)^2 = F_1(x) + C + C'x - \tfrac{1}{2} b_0 x^2$$

ou

$$F_1(x+2\pi) = F_1(x) - 2\,C'\pi + b_0(2x\pi + 2\pi^2),$$

et pour $x = -\pi$, comme $F_1(-\pi) = 0$,

$$F_1(\pi) = -2c'\pi,$$

On tire de la même égalité, en différentiant par rapport à x,

$$F'_1(x+2\pi) = F'_1(x) + 2 b_0 \pi,$$

et pour $x = -\pi$

$$F'_1(\pi) = 2 b_0 \pi.$$

Si nous multiplions par $\sin kx$ ou $\cos kx$ et que nous intégrions chaque terme du second membre de l'égalité, on trouve les relations

$$\int_{-\pi}^{+\pi} [F_1(x) + C + C'x] \sin kx\, dx = -\frac{1}{k^2} a_k \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} [F_1(x) + C + C'x] \cos kx\, dx = -\frac{1}{k^2} b_k \pi + (-1)^k \frac{2 b_0}{k^2} \pi.$$

$F_1(x)$ est différentiable, et la valeur de la première intégrale est

égale à

$$\left\{-\frac{\cos kx}{k}[F_1(x)+C+C'x]\right\}_{-\pi}^{+\pi}+\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{+\pi}[F'_1(x)+C']\cos kx\,dx$$

$$=\left\{-\frac{\cos kx}{k}[F_1(x)+C+C'x]\right\}_{-\pi}^{+\pi}+\left\{\frac{\sin kx}{k^2}[F'_1(x)+C']\right\}_{-\pi}^{+\pi}$$

$$-\frac{1}{k^2}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\sin kx\,dx.$$

Les valeurs entre parenthèses disparaissent, et l'on a

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\sin kx\,dx \quad \text{et} \quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\cos kx\,dx.$$

Théorème XXVII. — *Chaque série trigonométrique, qui définit une fonction intégrable, est une série de Fourier;* ou bien : *une fonction intégrable, si l'on peut la représenter par une série trigonométrique, ne peut être représentée que par une série de Fourier.*

L'exemple donné par Riemann (art. 13) d'une fonction intégrable, qu'on ne peut pas développer en une série de Fourier, est en même temps un exemple d'une fonction qu'on ne peut pas représenter par une série trigonométrique.

Par les recherches de Riemann, le théorème suivant est aussi démontré :

Théorème XXVIII. — *Si la série de Fourier converge en un point, où* $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ *a une valeur déterminée, elle convergera toujours vers cette valeur.*

Car la série de Fourier a, en chaque place où elle converge, la valeur

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{F(x+\Delta x)-2F(x)+F(x-\Delta x)}{\Delta x^2},$$

---

(1) Ce théorème a été démontré pour la première fois par M. du Bois-Reymond : *Abhandlungen der K. Bayer. Akad.*, 2 Cl. Vol. XII, Abth. I. — *Voir* aussi Ascoli, *Atti della Accademia dei Lincei*, ser. 3, Vol. II, p. 584. — *Math. Annalen*, t. VI.

et cette valeur est $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, par suite de l'égalité

$$\begin{aligned}F(x+\Delta x)-2F(x)+F(x-\Delta x) &= \int_x^{x+\Delta x} f(\beta)(x+\Delta x-\beta)\,d\beta \\ &\quad -\int_{x-\Delta x}^{x} f(\beta)(x-\Delta x-\beta)\,d\beta \\ &= \int_0^{\Delta x}[f(x+\alpha)+f(x-\alpha)](\Delta x-\alpha)\,d\alpha \\ &= [f(x+\Theta\alpha)+f(x-\Theta\alpha)]\,\frac{\Delta x^2}{2},\end{aligned}$$

même si $f(x+0)$ et $f(x-0)$, considérés séparément, ne représentent aucune valeur déterminée.

Réciproquement, il est possible que la série de Fourier converge en un point α pendant que la fonction qui a donné naissance à cette série, $f(x+\delta)+f(x-\delta)$ pour $\delta=0$, soit indéterminée; de pareils exemples ont été donnés par M. du Bois-Reymond.

Il se présente des cas semblables dans le Calcul intégral, où la dérivée de l'intégrale a une valeur déterminée, et la fonction à intégrer est au même point indéterminée.

Il faut encore remarquer que les théorèmes précédents de ce paragraphe et ceux du § V peuvent être étendus aux fonctions, qui ne sont pas en général intégrables, dans le cas où il n'existe que des valeurs singulières de l'intégrale.

Le cas le plus simple de cette espèce est le suivant, donné par Riemann.

L'intégrale principale

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\,dx = \int_0^{\delta}[f(c+\alpha)+f(c-\alpha)]\,d\alpha$$

peut donner une valeur déterminée finie qui, pour $\delta=0$, tend vers 0, pendant que $f(x)$, au point c, devient infinie sans avoir un nombre infini de maxima et de minima et que la fonction $f(x)$ n'est pas intégrable.

Dans ce cas $[f(c+\alpha)+f(c-\alpha)]\alpha$ doit être égal à zéro pour $\alpha=0$.

Si c'est le cas, et si, en outre

$$\lim_{n=\infty}\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\sin n(x-c)\,dx = \lim_{n=\infty}\int_0^{\delta}[f(c+\alpha)-f(c-\alpha)]\sin n\alpha\,d\alpha = 0.$$

$$\lim_{n=\infty}\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\cos n(x-c)\,dx = \lim_{n=\infty}\int_0^{\delta}[f(c+\alpha)+f(c-\alpha)]\cos n\alpha\,d\alpha = 0,$$

tous les théorèmes précédents auront lieu, si dans le calcul des coefficients de la série de Fourier on se sert des valeurs de l'intégrale principale.

Ces conditions se trouvent remplies, si les produits $\alpha f(c+\alpha)$ et $\alpha f(c-\alpha)$ tendent chacun vers o. Cette condition est aussi nécessaire; car, la fonction $f(c+\alpha)+f(c-\alpha)$ étant intégrable d'une manière absolue, on a

$$\text{abs}\int_0^{\delta}[f(c+\alpha)+f(c-\alpha)]\cos n\alpha\,d\alpha < \int_0^{\delta}\text{abs}[f(c+\alpha)+f(c-\alpha)]\,d\alpha,$$

si grand que devienne x.

La deuxième des intégrales trouvées plus haut peut alors devenir aussi petite que l'on veut pour toutes les valeurs de x par un choix convenable de δ. De plus, afin que

$$\int_0^{\delta}[f(c+\alpha)-f(c-\alpha)]\sin n\alpha\,d\alpha = \int_0^{\delta}[f(c+\alpha)-f(c-\alpha)]\,\alpha\,\frac{\sin n\alpha}{\alpha}\,d\alpha$$

devienne aussi petit qu'on le veut, le § IV nous dit que la fonction

$$[f(c+\alpha)-f(c-\alpha)]\alpha$$

doit nécessairement disparaître. Cette fonction n'a pas un nombre infini de maxima et de minima. Il s'ensuit que

$$\lim[f(c+\alpha)-f(c-\alpha)]\alpha \quad \text{et} \quad [f(c+\alpha)-f(c-\alpha)]\alpha = 0,$$

ce qui prouve notre affirmation.

Théorème XXIX. — *Si la fonction devient infinie en quelques points sans oscillation, de telle façon que son intégrabilité se trouve touchée, cette fonction pourra être encore représentée par une série de Fourier, dans le cas où aux environs de tels points* $f(c+\alpha)+f(c-\alpha)$ *pour* $\alpha=0$ *reste intégrable et de plus* $\alpha f(c+\alpha)$ *et* $\alpha f(c-\alpha)$ *disparaissent. Les coefficients de la série se calculent d'après la formule*

$$\pi a_k = \int_{-\pi}^{c-\delta} f(x)\sin nx\,dx + \sin nc\int_0^{\delta}[f(c+\alpha)+f(c-\alpha)]\cos n\alpha\,d\alpha$$
$$+\cos nc\int_0^{\delta}[f(c-\alpha)-f(c-\alpha)]\sin n\alpha\,d\alpha + \int_{c+\delta}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,$$

et d'une manière analogue pour b_k.

VII.

Règles pour la différentiation et l'intégration d'une série trigonométrique.

Soit $f(x)$ une fonction continue dans tout l'intervalle de $-\pi$ à $+\pi$, et représentée par série trigonométrique convergente en général

$$b_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} a_k \sin kx + b_k \cos kx.$$

Supposons qu'on sache que cette fonction possède une différentielle intégrable, que cette différentielle soit intégrable absolument (en particulier, finie ou déterminée infinie aux points discrets). D'après les théorèmes précédents, la série pour $f(x)$ converge partout sans exception, et donne la valeur $\int^x f'(x)\,dx$.

De plus, les valeurs moyennes de la fonction intégrable $f'(x)$ peuvent être représentées par celles d'une série

$$\beta_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} \alpha_k \sin kx + \beta_k \cos kx,$$

où

$$\beta_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}[f(+\pi) - f(-\pi)],$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}[f(x)\sin kx]_{-\pi}^{+\pi} - \frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx\,dx$$
$$= -kb_k,$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}[f(x)\cos kx]_{-\pi}^{+\pi} + \frac{k}{\pi}\int_{\pi}^{+\pi} f(x)\sin kx\,dx$$
$$= \frac{(-1)^k}{\pi}[f(+\pi) - f(-\pi)] + ka_k.$$

La valeur moyenne de la fonction $f'(x)$ sera alors représentée par la série trigonométrique

$$\frac{1}{2\pi}[(f+\pi) - f(-\pi)] + \sum_{k=1}^{k=\infty} -kb_k \sin kx$$
$$+ \left\{\frac{(-1)^k}{\pi}[f(+\pi) - f(-\pi)] + ka_k\right\}\cos kx.$$

Partout où cette série converge, elle converge aussi vers la valeur

$$\tfrac{1}{2}\,[f'(x+0)+f'(x-0)].$$

Pour le cas où $f(+\pi)=f(-\pi)$, on aura la forme plus simple

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} -kb_k\sin kx + ka_k\cos kx,$$

qui sera obtenue par une différentiation directe de chaque terme de la série primitive. Si cette condition n'est pas remplie, cette série ne convergera pas, car $\lim ka_k$ ne devient pas nulle. On aura pourtant une représentation de la valeur moyenne de la fonction $f'(x)$, car la série

$$f'(x)-\frac{f(+\pi)-f(-\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^k\cos kx\right]$$

a la valeur moyenne o. Il n'y a à excepter que les intervalles dont les derniers points se confondent avec les limites $-\pi$ et $+\pi$.

Il existe, par conséquent, pour la fonction avec la valeur constante o deux représentations à l'aide d'une série trigonométrique : l'une nous est donnée par la série dont tous les coefficients disparaissent; l'autre est la série nommée plus haut, qui ne converge pour aucune valeur de x.

La première forme prévaut partout par un intervalle de x à $x+h$, la deuxième manque aux points finals $-\pi$ et $+\pi$ de l'intervalle. Il n'existe pas d'autre représentation sans exception de la valeur o : car, dans le cas où la série trigonométrique

$$b_0+\sum_{k=1}^{k=\infty}(a_k\sin kx+b_k\cos kx),$$

a la propriété que, pour toutes les valeurs de x et de $x+h$ (inclusivement $-\pi$ et $+\pi$),

$$0=b_0[(x+h)-x]+\sum_{k=1}^{k=\infty}-a_k\frac{\cos k(x+h)-\cos kx}{k}$$
$$+\,b_k\frac{\sin k(x+h)-\sin kx}{k},$$

tous les coefficients b_0, a_k, b_k doivent disparaître.

D'après ce théorème, on voit qu'il n'existe qu'une seule forme

pour représenter une fonction intégrable par une série trigonométrique, forme qui reste valable aux points finals $-\pi$ et $+\pi$ (dans le cas où la fonction à représenter possède en ces points une valeur finie ou est au moins intégrable sans restriction). A cause de cette exception possible, je veux spécialiser un peu ce théorème et dire :

Théorème XXX. — *Pour toute fonction intégrable absolument, il n'existe qu'une seule représentation trigonométrique des valeurs moyennes, qui est valable pour chaque intervalle. Cette forme nous est donnée par la série de Fourier.*

La règle pour l'intégration a la forme suivante :

Une série trigonométrique

$$b_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} a_k \sin kx + b_k \cos kx,$$

qui représente une fonction intégrable périodique $f(x)$, est une série de Fourier.

Si l'on veut former l'intégrale

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a),$$

où les limites a et x tombent dans l'intervalle de $-\pi$ à $+\pi$, il existe pour cette fonction, en tant qu'elle est partout continue, une série de Fourier.

Posons

$$F(x) - F(a) = B_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \sin kx + B_k \cos kx,$$

on a

$$B_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\,dx - F(a),$$

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\sin kx\,dx = \frac{-1}{k\pi}\left[F(x)\cos kx\right]_{-\pi}^{+\pi}$$

$$+ \frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}\left[F(+\pi) - F(-\pi)\right] + \frac{1}{k} b_k,$$

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{k\pi}\left[F(x)\sin kx\right]_{-\pi}^{+\pi} - \frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin kx\,dx$$

$$= -\frac{1}{k} a_k;$$

$F(x)$ sera alors, en général, représentée par la série

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\,dx + \sum_{k=1}^{k=\infty}\left\{\frac{(-1)^{k-1}}{k\pi}\,[F(+\pi) - F(-\pi)] - \frac{1}{k}\,b_k\right\}\sin kx$$
$$+ \frac{1}{k}\,a_k \cos kx.$$

Cette série se partage en deux parties, car la valeur de

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k\pi}\,[F(+\pi) - F(-\pi)]\sin kx$$

est convergente et égale à

$$\frac{x}{2\pi}\,[F(+\pi) - F(-\pi)] = b_0 x;$$

car

$$b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\,[F(+\pi) - F(-\pi)];$$

seulement aux points finals de l'intervalle

$$\sum_{k=1}^{k} (-1)^{k-1}\,\frac{\sin kx}{k} = 0.$$

La fonction $F(x)$ est alors, en général, égale à

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\,dx + b_0 x + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k}\,b_k \sin kx - \frac{1}{k}\,a_k \cos kx.$$

C'est aux points discrets que la valeur de la série peut différer de cette valeur.

Si la fonction est intégrable absolument, la valeur de la série doit se confondre sans exception avec la valeur de $F(x)$, et dans cette forme, pas tout à fait purement trigonométrique, on a aussi

$$F(+\pi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\,dx + b_0\pi + \sum_{k=1}^{k=\infty} -\frac{1}{k}\,a_k(-1)^k,$$

$$F(-\pi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\,dx - b_0\pi + \sum_{k=1}^{k=\infty} -\frac{1}{k}\,a_k(-1)^k.$$

comme

$$\frac{F(+\pi)+F(-\pi)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\,dx + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k}\, a_k(-1)^k.$$

et

$$\frac{F(+\pi)-F(-\pi)}{2} = b_0\pi.$$

La différence $F(x) - F(a)$ est égale à

$$b_0(x-a) + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k}\, b_k(\sin kx - \sin ka) - \frac{1}{k} a_k(\cos kx - \cos ka),$$

c'est-à-dire égale à la série qu'on obtient par intégration terme à terme entre les limites a et x de la série primitive.

Pour plus de clarté, nous formulerons brièvement les deux règles :

Théorème XXXI. — *Toute série trigonométrique qui définit en général une fonction continue, avec une dérivée intégrable absolument, est elle-même une fonction partout continue, dont la dérivée peut être représentée en moyenne par une série trigonométrique. Celle-ci sera tirée de la série primitive par une différentiation terme à terme, en ayant soin d'ajouter après chaque terme de la série à former le membre*

$$(-1)^k[f(+\pi) - f(-\pi)]\cos kx.$$

En chaque point où la série converge, elle donne la valeur de la dérivée $f'(x)$, ou la valeur moyenne

$$\tfrac{1}{2}[f'(x+0) + f'(x-0)].$$

Théorème XXXII. — *L'intégrale de toute série trigonométrique, entre des limites quelconques tombant dans l'intervalle de $-\pi$ à $+\pi$, est représentée en général par une intégration terme à terme; il est sous-entendu que la série définit une fonction intégrable. Si la série donnée définit une fonction intégrable absolument, la série formée par intégration sera égale sans exception à l'intégrale.*

SCHLEGEL (V.), Oberlehrer am Gymnasium in Waren. — Lehrbuch der elementaren Mathematik. — Wolfenbüttel, Druck und Verlag von Julius Zwissler, 1878-1880. — 4 vol. in-8°.

Nous sommes habitués depuis longtemps à considérer l'apparition d'un Traité élémentaire de Mathématiques comme un événement pédagogique ou commercial n'ayant rien de commun avec la Science pure. Si l'on met à part quelques honorables exceptions, c'est toujours le même Livre qui reparaît sous une couverture de couleur différente, avec quelques pages transposées, quelques propositions secondaires introduites ou supprimées, quelques démonstrations modifiées sinon perfectionnées, quelques développements de plus suivant les tendances des programmes officiels. Quant à la manière d'exposer les principes fondamentaux de la Science, rien n'est changé. Les découvertes qu'on a faites dans les hautes Mathématiques depuis un siècle et qui ont si admirablement éclairci les difficultés que présentaient encore les éléments d'Algèbre semblent étrangères à nos auteurs, qui expliquent les imaginaires comme au temps de Bézout et de Lacroix, et présentent parfois à leurs lecteurs des notions géométriques en arrière de beaucoup sur celles qu'exposait Euclide il y a plus de deux mille ans.

Cet état de choses est commun à tous les peuples de l'Europe. En Angleterre, l'enseignement est resté ce qu'il était au temps de Barrow et de Simson; heureusement le vieil Euclide a été choisi et fidèlement conservé à l'abri des prétendus perfectionnements des Traités modernes. En Allemagne, les auteurs cherchent encore leur voie, et, malgré quelques Traités hors ligne, comme celui de M. Baltzer, l'esprit du haut enseignement ne pénètre qu'avec peine dans l'enseignement élémentaire.

Dans ces dernières années, un disciple de H. Grassmann, M. Victor Schlegel, déjà auteur d'une lumineuse exposition de la doctrine de son illustre maître, a entrepris de lancer les Mathématiques, et la Géométrie en particulier, dans une autre voie plus courte et plus sûre, et il a publié, en s'inspirant des vues originales et hardies de l'auteur de l'*Ausdehnungslehre*, un Cours élémentaire en quatre minces volumes, comprenant, en 712 pages, l'Arith-

métique et l'Algèbre, la Géométrie plane et solide et la Trigonométrie tant rectiligne que sphérique.

I.

Nous ne nous arrêterons pas longtemps sur le contenu du premier Volume, intitulé *Arithmetik und Combinatorik* (182 pages), et traitant de l'Algèbre élémentaire et de la Théorie des combinaisons. La première Partie comprend d'abord les principes du calcul littéral, la résolution des équations des quatre premiers degrés, les séries, les fractions continues, le calcul décimal et les calculs d'intérêts. Puis, dans l'autre Partie, il est question des combinaisons et des permutations, et des premières notions sur le Calcul des probabilités. Le tout est exposé avec une concision qui n'exclut pas la clarté, et avec une rigueur irréprochable.

II.

Nous nous occuperons avec plus de détails des Volumes suivants, qui forment la partie vraiment originale de l'Ouvrage, et d'abord du tome II, *Geometrie*, où l'auteur expose, en 222 pages, les principes de la Géométrie *plane*. C'est ici que l'on peut apprécier la révolution dans l'enseignement préparée par les idées de Grassmann, et dont nous essayerons de présenter un résumé. Comme la Géométrie des Anciens, la nouvelle méthode repose aussi sur des hypothèses, suggérées par l'expérience, mais différentes, au moins par la forme, des axiomes euclidiens.

Un *corps* ou *volume* est une portion limitée de l'espace; sa limite est une surface.

Une *aire* (*Figur*) est une portion limitée de surface.

Une *figure* (*Gebilde*) limitée complètement par des aires est un *volume*.

La limite d'une aire est une *ligne*. — Une portion de ligne est un *segment* (*Strecke*).

Une figure limitée complètement par des segments est une *aire*.

Les limites d'un segment sont des points.

Un point est un *lieu* dans l'espace.

Un point, en se mouvant, décrit une ligne; de même un segment décrit une surface; une aire décrit un corps. — Ces figures

sont limitées ou illimitées, suivant que le mouvement lui-même est limité ou illimité.

De la loi du mouvement dépend la *forme* (*Gestalt*) de la figure engendrée. Un point n'a pas de forme. Deux figures de même forme sont dites *semblables*.

Le mouvement par lequel une figure est engendrée devient une propriété inhérente à cette figure, et s'appelle *dimension*. — Le point n'a aucune dimension, le segment en a une, l'aire deux, le volume trois.

Suivant que le mouvement est continué plus ou moins loin, la dimension correspondante sera dite *plus* ou *moins grande*. La grandeur d'un segment est sa *longueur;* la grandeur d'une aire dépend de sa *longueur* et de sa *largeur;* celle d'un volume, de sa *longueur,* de sa *largeur* et de son *épaisseur*.

Deux figures de même grandeur sont dites *égales* ([1]).

Sommes et différences de deux segments, de deux aires, de deux volumes.

Mouvement simple; mouvement composé. — Un point, au moment où il commence à changer de lieu, a le choix entre une infinité de mouvements qui se distinguent entre eux par leur *direction*.

Si un point conserve toujours la direction qu'il a choisie au départ, son mouvement est dit un *mouvement simple,* et le segment qu'il parcourt est une *ligne droite*. — Le caractère distinctif d'un mouvement simple est donc sa *direction*.

Si un segment de droite se meut de telle manière que chacun de ses points exécute un mouvement simple, c'est-à-dire parcourt lui-même une ligne droite, le mouvement total du segment sera un mouvement simple, et l'aire résultante sera une aire *plane*.

Si un point mobile change à chaque instant de direction, il décrit une ligne *courbe,* et son mouvement est dit *composé*.

Toute surface non plane est une surface *courbe*.

Une figure ne peut se transporter par un mouvement simple d'une position à une autre que d'une seule manière, au plus. Un

---

([1]) Ou, conformément aux habitudes françaises, *équivalentes*. Les Allemands expriment la relation d'égalité par congruence par les deux mots *gleich und ähnlich*.

même déplacement peut s'effectuer par une infinité de mouvements composés différents.

De la loi particulière du mouvement qui engendre une *construction* résulte pour celle-ci la propriété d'avoir une *forme* déterminée. Le point n'a pas de forme ; toutes les lignes droites, ainsi que toutes les surfaces planes, ont la même forme ; il en est de même pour les lignes ou les surfaces engendrées par la même loi de mouvement.

Le mouvement est limité ou illimité ; il en est de même des figures qu'il engendre.

Le mouvement est fini ou infini. Un mouvement illimité peut engendrer une ligne ou une surface finie, lorsque ce mouvement est rentrant sur lui-même.

Toute figure illimitée peut être considérée comme un *domaine* pouvant contenir des figures limitées d'un nombre de dimensions égal ou inférieur, ainsi que des figures illimitées d'un nombre de dimensions inférieur.

Un domaine est *simple*, lorsqu'il est engendré par des mouvements simples. Les domaines simples sont le point, la droite, le plan et l'espace.

Un domaine est *libre*, lorsqu'il peut se mouvoir sur lui-même d'une manière quelconque. Tels sont les domaines simples de la droite, du plan et de l'espace et les domaines non simples du cercle, de l'hélice et de la sphère.

La science de l'espace se divise en deux parties : la science des figures planes (*reine Geometrie*), et la science des figures dans l'espace (*Stereometrie*). A ces deux parties se rattachent les deux parties correspondantes de la Trigonométrie.

Le tome II s'occupe de la *Géométrie* (*plane*).

PREMIÈRE SECTION. — *Géométrie des figures en mouvement.*

I. *Géométrie de la droite.* — Le point et son mouvement sur la droite.

(2) *Mouvement unique d'un point.* — Un point se distingue d'un autre par sa *position*. — Un point mobile équivaut à une série de points fixes quelconques.

Lorsqu'un point A décrit une droite, celle-ci est déterminée :

1° par la *position* (*Lage*) du point mobile; 2° par la *direction* du mouvement de ce point. — Deux droites de même position et de même direction coïncident entre elles (¹).

La direction suivant laquelle un point A, animé d'un mouvement *simple*, commence à se mouvoir, détermine d'avance tous les points qu'il doit rencontrer dans son mouvement. Réciproquement, l'un de ces derniers points B suffit, avec le premier A, pour déterminer la direction de la droite. — Un point quelconque de la droite pouvant être pris pour le point initial A, la droite est déterminée *en position et en direction* par deux quelconques de ses points.

Une droite est dite avoir *même position* qu'un point, lorsqu'elle passe par ce point.

(β) Mouvement multiple d'un point. — Mouvement d'un segment sur une droite.

1° Opérations géométriques sur les segments : addition, soustraction, multiplication, partition (division par un nombre), mesure (division par un segment).

2° Les deux directions opposées d'une droite. — Segments positifs et négatifs.

3° Mouvement d'un segment le long d'une droite. — Relation $MA + MB = 0$; généralisation; centre de gravité d'un segment.

II. *Géométrie du plan.*

[*a*] *La droite et ses mouvements dans le plan.*

(α) *Mouvement unique de la droite.* — Détermination de la droite.

1° Changement de position de la droite. Lorsqu'une droite change de *position* sans changer de *direction*, les deux situations obtenues sont dites deux droites *parallèles*.

Dans ce cas, tous les points de la droite primitive ont aussi changé de position, en éprouvant tous des déplacements identiques en grandeur et en direction.

(¹) La donnée de la direction équivaut à ce que la Géométrie moderne appelle le point à l'infini de la droite; de sorte que la détermination actuelle peut être envisagée comme un cas particulier de la détermination de la droite au moyen de deux points.

Par un point donné on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite. — Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.

De la considération du mouvement d'un point sur une droite mobile parallèlement à elle-même, ce mouvement étant tel qu'à des déplacements égaux de la droite correspondent toujours des déplacements égaux du point, on conclut facilement le théorème de la proportionnalité des segments.

2° Changement de direction de la droite. L'*angle*. — Relations entre deux droites : Deux droites de même position ont la même direction. Deux droites de même direction ont des positions différentes. Deux droites de position différentes ont la même direction. Deux droites de direction différente ont la même position.

Lorsqu'une droite fait le tour complet autour d'un de ses points, elle décrit un *angle fermé*. Tous les angles fermés sont égaux, ainsi que leurs moitiés et que leurs quarts. Le quart de l'angle fermé est l'unité angulaire (angle droit), pour laquelle l'usage a conservé l'incommode division babylonienne.

La direction d'un segment redevient la même lorsque le segment a fait un nombre n quelconque de tours autour d'une de ses extrémités, n étant positif et entier. Le résultat sera donc le même que si on l'avait multiplié par $(+1)^n$, ou, ce qui revient au même, par $(-1)^{2n}$. S'il fait un nombre impair $2n+1$ de demi-tours, il s'arrètera sur la direction opposée à la première et sera multiplié par -1 ou par $(-1)^{2n+1}$. Ainsi, dans tous les cas, une révolution d'un demi-tour équivaut à une multiplication par -1.

Si x est le facteur qui correspond au quart de tour, on devra avoir

$$x \times x = -1,$$

d'où

$$x = \sqrt{-1} = i.$$

En général, si x est le facteur qui correspond à la $n^{\text{ième}}$ partie de l'angle droit, on aura

$$x^{2n} = -1 = i^2,$$

d'où

$$x = i^{\frac{1}{n}}.$$

On peut donc représenter la rotation d'un segment par la multi-

plication de ce segment par une puissance du facteur i qui est le symbole d'une rotation d'un angle droit.

Lorsqu'une droite tourne autour d'un de ses points, chacun des autres points décrit un cercle. Centre, angles au centre, etc.

(3) *Mouvement double de la droite.* — Changement de direction et de position.

Opérations élémentaires sur les angles.

Les deux côtés d'un plan; ces deux côtés diffèrent en ce que les rotations de sens positif pour l'un de ces côtés sont négatives pour l'autre côté. — Angles positifs et négatifs.

Mouvement d'un angle dans un plan. — Angles ayant leurs côtés parallèles chacun à chacun.

Angles autour d'un point, opposés, supplémentaires.

Angles de deux parallèles avec une sécante.

Point à l'infini sur une droite.

Le triangle. — Somme de ses angles. Démonstration de Thibaut.

Sens du triangle. — Relation entre les angles. Angles extérieurs. Extension aux polygones.

Détermination du triangle par ses éléments. — Nous ne pouvons nous empêcher de mettre en doute la légitimité de la démonstration de l'égalité de deux triangles équilatéraux entre eux, fondée sur ce que la position d'un sommet est déterminée par l'intersection de deux cercles décrits des deux autres sommets comme centres, tant que l'on n'aura pas montré, autrement que par l'*évidence*, l'impossibilité de la rencontre de deux cercles en plusieurs points situés d'un même côté de la ligne des centres. La tendance de la nouvelle école à remplacer le raisonnement par le coup d'œil nous semble éminemment dangereuse. Le sentiment de la forme est un précieux auxiliaire, auquel les illustres inventeurs de la Géométrie pure ont dû une grande partie de leurs découvertes; mais rien en Mathématiques ne peut dispenser de la démonstration, d'autant plus que cette partie de la tâche est en général la plus aisée. Dans le cas actuel, la marche d'Euclide n'est pas plus longue, et ne laisse aucun doute dans l'esprit.

Triangle isoscèle. — Il eût mieux valu, selon nous, commencer par les figures les plus régulières auxquelles on ramène ensuite l'étude des figures irrégulières; d'autant plus, ici, que l'étude du triangle

isoscèle est absolument identique à celle des propriétés du cercle. On aurait pu ainsi démontrer rigoureusement la proposition sur l'égalité des triangles de côtés égaux, sans sacrifier en rien la brièveté et l'évidence.

(γ) *Mouvement triple de la droite.* — Le quadrilatère. — Le parallélogramme.

(δ) *Mouvement multiple des segments.* — Opérations géométriques sur les parallélogrammes. — Côtés opposés d'un parallélogramme. — Théorème de Pythagore.

Changement de direction des segments. — Le cercle. — Angles dans le cercle. — Polygones réguliers. — Deux cercles.

Deuxième Section. — *Géométrie des figures en repos.* — Deux figures sont dans une situation *perspective*, lorsque les lignes qui joignent les points correspondants de ces deux figures passent par un même point.

Deux figures qui peuvent être amenées à une situation perspective sont dites *projectives*.

(a) Si les lignes de jonction passent par un point infiniment distant, et que 1° les droites homologues se rencontrent sur une droite infiniment distante, les deux figures sont *congruentes*. — 2° Si les droites homologues se coupent sur une droite à distance finie, les figures sont seulement *affines*.

(b) Si les lignes de jonction se coupent en un point à distance finie, et que 1° les droites homologues se rencontrent sur une droite infiniment distante, les deux figures sont *semblables*. — 2° Si les droites homologues se coupent sur une droite à distance finie, les figures sont *collinéaires*.

I. *Similitude.* — Triangles semblables. — Division harmonique. — Similitude inverse. — Polygones. — Cercles.

II. *Collinéation.* — Quadrilatère complet. — Double rapport. — Triple rapport. — Quadruple rapport. — Pôles et polaires dans le cercle.

Calcul géométrique. — Espace superficiel et produit de segments. — Comparaison des aires de plusieurs figures. — Construction des racines d'une équation. — Le polygone régulier et le cercle.

Appendice. — Les courbes du second ordre. — Ces courbes sont définies par la relation focale $r_1 \pm r_2 = r$, r étant une constante, qui est infinie dans le cas de la parabole.

Le Volume est terminé par un recueil de 737 problèmes et exercices divers sur la Géométrie plane.

III.

Le troisième Volume contient la Trigonométrie rectiligne, et l'auteur l'a rédigé en prenant pour modèle un Traité publié par Grassmann en 1865.

Après une courte Introduction, où il explique la notion de *fonction*, l'auteur aborde la Trigonométrie, en commençant par l'étude des fonctions angulaires sous forme finie. Il traite d'abord des fonctions d'un angle aigu, en prenant pour point de départ le cosinus. Il nous semble que cette dérogation à l'usage établi est conforme au rôle prépondérant que joue le cosinus dans les calculs, comme exprimant la partie réelle du déplacement e^{ip} : la seule objection que l'on nous oppose, c'est la dénomination de *sinus du complément* sous laquelle il est universellement connu; mais on peut dire avec une grande probabilité qu'on lui donnerait un autre nom si la nomenclature était à refaire aujourd'hui.

Cosinus de la somme de deux angles aigus. — Calcul des cosinus des angles aigus, suivi d'une Table des cosinus à trois décimales, pour chaque demi-degré du quadrant.

Les autres fonctions angulaires se déduisent du cosinus. — Sens de l'accroissement de chaque fonction. — Valeurs limites. — Détermination des fonctions au moyen les unes des autres.

Fonctions d'un angle quelconque. — Formules diverses.

Les fonctions angulaires sous forme transcendante et sous forme de série. — L'auteur démontre, du moins avec autant de rigueur qu'en peuvent comporter les notions que le lecteur a dû puiser dans le Tome I du présent Ouvrage, qu'il existe une série infinie

$$F_x = 1 + a_1 x + \frac{a_1^2}{2!} x^2 + \frac{a_1^3}{3!} x^3 + \dots$$

qui jouit de la propriété que

$$F_x \times F_y = F_{x+y}.$$

En particularisant cette série, on définit le nombre e, qui correspond à $a_1 = x = 1$.

Si l'on remplace x par ix, on a une série complexe, que l'on peut écrire sous la forme

$$e^{ix} = f_x + i\varphi_x.$$

La partie réelle f_x est le cosinus de x et la partie imaginaire est $i \sin \lambda$.

Représentation des fonctions angulaires inverses sous la forme de logarithmes. — Développement de arc sin en série. — Séries logarithmiques. — Calcul des logarithmes. — Calcul de π.

Maintenant vient la Trigonométrie proprement dite :

Calcul des triangles. — Triangle rectangle.

Le triangle obliquangle. — Nous ne pouvons nous empêcher de remarquer que l'auteur pense, comme la majorité, que l'on gagne *toujours* du temps dans les calculs numériques, en les effectuant tous au moyen des logarithmes, après avoir transformé toutes les sommes en produits. Rien n'est plus inexact et nous avons plus d'une fois montré, par une supputation rigoureuse du nombre de lectures auquel oblige chaque formule, que *le plus souvent*, tant dans les calculs de Trigonométrie rectiligne que dans ceux de Trigonométrie sphérique, ce sont les formules sous la forme de somme qui, contrairement au préjugé régnant, sont les plus avantageuses dans le calcul.

M. Schlegel énumère les diverses méthodes sur lesquelles reposent les formules trigonométriques.

Première méthode. — (a) Procédé géométrique. — Théorème des sinus. — Théorème des cosinus.

(b) Procédé algébrique. — Nous n'y trouvons pas la formule

$$a = b \cos \gamma + c \cos \beta,$$

d'où les autres se tirent avec tant de facilité, et qui, mise sous la forme

$$a = b e^{i\gamma} + c e^{i\beta},$$

contient la Trigonométrie presque tout entière.

Deuxième méthode. — (a) Théorème du cercle circonscrit.

(b) Théorème des tangentes.

(c) Théorème du cercle inscrit.

Résolution des équations du deuxième et du troisième degré.

Résumé synoptique des formules et des règles.

Appendice. — Exercices et problèmes.

Une addition très précieuse, et que nous voyons ici pour la première fois dans un Ouvrage élémentaire, consiste dans une Table des triangles *rationnels*, tant rectangles qu'obliquangles, où l'on peut puiser d'excellents exercices de calcul numériques. Cette Table est précédée d'un exposé des méthodes pour la recherche des triangles rationnels.

L'Ouvrage est terminé par un recueil de Tables logarithmiques à quatre décimales, savoir, une Table des logarithmes des nombres jusqu'à 2000 et une Table trigonométrique de minute en minute. La première de ces Tables est très commodément disposée et d'un usage facile. Nous sommes moins satisfaits de la seconde; bien qu'elle ait le grand avantage de procéder par intervalles très rapprochés, elle a l'inconvénient grave de donner seulement les logarithmes des tangentes et des sinus, sans suppléer, par une graduation complémentaire, à l'absence des logarithmes des fonctions cotangente et cosinus.

IV.

La quatrième Partie, consacrée à la Géométrie de l'espace, est précédée d'une Introduction où l'auteur indique les méthodes les plus convenables pour représenter clairement les figures dans l'espace. Ces méthodes consistent soit dans l'emploi de modèles en relief, soit dans celui des images stéréoscopiques. On trouve à la fin du Volume quatre planches destinées à être vues au stéréoscope, et représentant des polyèdres plus ou moins compliqués.

L'auteur aborde ensuite son sujet, en exposant la génération du plan. Un plan est déterminé par trois éléments : la *position*, déterminée par un point ; la *direction*, déterminée par une droite passant par ce point, et enfin le *côté* (*Seite*), qui distingue entre eux les plans de même *position* et de même *direction*.

(α) Mouvement simple du plan. -

Diverses manières de déterminer par d'autres éléments la position d'un plan.

Changements de *position* et de *direction* du plan.

Changement de côté du plan. — Angle dièdre (*Raumwinkel*).

Mouvement d'une droite entraînée par un plan mobile. Génération du cône et du cylindre de révolution.

Droites et plans perpendiculaires ou parallèles.

Inclinaison d'une droite sur un plan.

Lieux d'un point assujetti à certaines conditions. — Sphère.

(β) Double mouvement du plan.

Intersection de trois plans.

Angles trièdres. — Leur mesure au moyen de la sphère. — Angles trièdres, considérés comme analogues aux triangles (triangles sphériques).

Le tétraèdre.

La pyramide.

Le cône (droit ou oblique, à base circulaire).

Le pentaèdre (pyramide quadrangulaire, tronc de pyramide triangulaire, prisme triangulaire à bases parallèles ou non).

Les figures et leurs mouvements dans l'espace. — Mouvement du triangle (prisme triangulaire). — Mouvement du parallélogramme (parallélépipède, *Säule*), d'un polygone (prisme), du cercle (cylindre).

Mouvement du parallélogramme. — Parallélépipède et prisme triangulaire. — Prisme et pyramide triangulaires (le volume de la pyramide est le tiers de celui du prisme, etc.).

Variation du *côté* des figures. — Corps de révolution. — Sphère, ses propriétés.

Polyèdres réguliers.

Application du calcul à la Stéréométrie. — Mesures des volumes et des surfaces.

Trigonométrie sphérique. — Triangles sphériques rectangles.

Triangles obliquangles. — Les formules sont établies par trois méthodes : 1° méthode géométrique; 2° méthode algébrique; 3° méthode des angles auxiliaires.

Appendice. — Les surfaces du second degré. — Elles sont considérées comme engendrées par le déplacement des courbes du second ordre.

L'Ouvrage est terminé par un Recueil de 434 problèmes sur les matières traitées dans le tome IV.

D'après l'exposé rapide que nous avons donné de cet intéressant

Traité, on peut déjà se faire une idée de la nouveauté des méthodes et des avantages qu'elles peuvent présenter dans un grand nombre de cas. Un auteur se disposant à écrire un Traité classique ne saurait trouver une meilleure préparation que la lecture du Livre de M. Schlegel, où il apercevrait tant d'horizons nouveaux, inconnus à la routine et qui eux-mêmes peuvent conduire à des découvertes ultérieures.

Peut-être certaines méthodes sembleront-elles reposer sur des innovations trop hardies. Par exemple, est-il bien sûr que l'on gagne beaucoup en rapidité et en clarté lorsqu'on remplace l'axiome euclidien des parallèles par la notion vague et un peu nuageuse de la *direction* d'une droite, et qu'on substitue la démonstration de Thibaut à la classique démonstration qui sert depuis deux mille ans? Dans la Géométrie à trois dimensions, les éléments qui fixent la position du plan présentent-ils aux commençants des idées parfaitement nettes et plus rigoureuses que celles que présente la méthode ancienne? C'est ce que nous n'oserions affirmer.

Quoi qu'il en soit, nous sommes si peu accoutumés à rencontrer dans les Manuels de Géométrie des idées neuves et hardies, que nous n'hésitons pas à saluer comme un heureux événement dans la littérature géométrique l'apparition de ce Traité, où le disciple fidèle de Grassmann s'est fait le sagace interprète des idées du maître sur l'enseignement élémentaire.

A côté des innovations que les partisans du passé pourront trouver téméraires, combien ne trouve-t-on pas dans ce Livre de chapitres traités avec une supériorité incontestable et par des méthodes qui sont au fond celles de tout le monde, mais plus largement comprises! Combien de passages qui deviennent clairs quand on s'est habitué au style un peu trop laconique de l'auteur! Nous ne pouvons donc trop recommander l'étude du *Lehrbuch* de M. Schlegel, et surtout celle des deux Volumes de la Géométrie à l'attention des maîtres qui désirent rajeunir et perfectionner leurs méthodes d'enseignement, et même aux bons élèves, qui pourront y apprendre à penser et s'exercer à la discussion des doctrines scientifiques.

J. H.

MÉLANGES.

SUR UNE ÉQUATION LINÉAIRE AUX DÉRIVÉES PARTIELLES;

Par M. P. APPELL.

L'équation différentielle linéaire

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{m(1-m)}{(x-y)^2}\,z,$$

à laquelle M. Darboux a consacré une Note si intéressante dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* du 10 juillet 1882, peut être considérée comme un cas particulier de l'équation

$$(2)\qquad (x-y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \beta'\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

que j'ai rencontrée dans la théorie des fonctions hypergéométriques de deux variables (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 29 mars 1880). En effet, si dans l'équation (1) on fait

$$z = (x-y)^m u,$$

cette équation prend la forme (2), où $\beta = \beta' = m$. Cette remarque m'a conduit à essayer d'étendre à l'équation (2) les principales propriétés indiquées par M. Darboux pour l'équation (1).

Tout d'abord, l'équation (2) ne change pas si l'on remplace respectivement x et y par

$$ax+b,\quad ay+b,$$

a et b étant des constantes quelconques. Elle ne change pas non plus si l'on y remplace x par $\frac{1}{x}$, y par $\frac{1}{y}$ et u par $x^\beta y^{\beta'} u$. En combinant ces deux propriétés, on voit que, si

$$u = \varphi(x, y)$$

est une solution de l'équation (2), la fonction

$$(ax+b)^{-\beta}(ay+b)^{-\beta'}\varphi\left(\frac{cx+d}{ax+b}, \frac{cy+d}{ay+b}\right),$$

en est une autre solution.

Cherchons maintenant les solutions fonctions du seul rapport $\frac{y}{x}$. Soit $\frac{y}{x} = t$; alors

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{du}{dt}\frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{dt}\frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -\frac{du}{dt}\frac{1}{x^2} - \frac{d^2 u}{dt^2}\frac{y}{x^3}.$$

Substituant ces expressions dans l'équation (2) et faisant en outre $y = tx$, on obtient l'équation

$$(3) \qquad t(1-t)\frac{d^2 u}{dt^2} + [(1-\beta) - (1+\beta')t]\frac{du}{dt} = 0,$$

qui admet l'intégrale

$$u = t^{\beta}F(\beta, \beta+\beta', \beta+1, t),$$

le signe F désignant, comme il est d'usage, la série hypergéométrique de Gauss. L'équation (2) admet donc la solution

$$(3) \qquad u = \left(\frac{y}{x}\right)^{\beta} F\left(\beta, \beta+\beta', \beta+1, \frac{y}{x}\right)$$

et, par raison de symétrie, la solution

$$(3') \qquad u = \left(\frac{x}{y}\right)^{\beta'} F\left(\beta', \beta+\beta', \beta'+1, \frac{x}{y}\right).$$

Les deux solutions précédentes sont des cas particuliers des solutions

$$(4) \qquad u = x^{-\beta}y^{\mu}F\left(\beta, \mu+\beta', \mu+1, \frac{y}{x}\right),$$

$$(4') \qquad u = x^{\lambda}y^{-\beta'}F\left(\beta', \lambda+\beta, \lambda+1, \frac{x}{y}\right),$$

dans lesquelles λ et μ sont des constantes arbitraires. Les solutions (3) et (3') s'obtiennent en faisant $\mu = \beta$ et $\lambda = \beta'$; et la solution de l'équation (1),

$$z = \left(1 - \frac{y}{x}\right)^m F\left(m, m, 1, \frac{y}{x}\right),$$

indiquée par M. Darboux, s'obtient en faisant dans (4)

$$\mu = 0, \quad \beta = \beta' = m.$$

Cherchons maintenant la solution entière la plus générale de

l'équation (2). Employons, à cet effet, la méthode des coefficients indéterminés et cherchons à vérifier l'équation (2) par la série

$$(5) \qquad u = \sum_{m,n=0}^{m,n=\infty} A_{m,n} x^m y^n;$$

on trouve, pour déterminer les coefficients $A_{m,n}$, l'équation

$$(m+1)(n+\beta')A_{m+1,n} = (n+1)(m+\beta)A_{m,n+1},$$

d'où

$$(6) \qquad A_{m,n} = \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)\beta'(\beta'+1)\ldots(\beta'+n-1)}{1.2\ldots m.\ 1.2\ldots n}\psi(m+n),$$

ψ étant une fonction arbitraire. En particulier, si l'on prend

$$\psi(m+n) = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+m+n-1)},$$

on obtient comme solution la série hypergéométrique de deux variables désignée par

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y).$$

On voit que l'équation (2) admet toujours pour solution *des polynômes en nombre infini de tous les degrés*. Il suffit en effet, pour que la solution (5) donne un polynôme de degré N, d'assujettir la fonction arbitraire $\psi(m+n)$ qui figure dans (6) à la condition

$$\psi(m+n) = 0 \quad \text{pour} \quad m+n > N;$$

pour cela on pourra, par exemple, poser

$$\psi(m+n) = N(N-1)\ldots(N-m-n+1)\varpi(m+n),$$

la fonction ϖ étant arbitraire.

Dans le cas particulier où les deux nombres β et β' sont des *entiers négatifs*, toutes les solutions données par la série (5), $A_{m,n}$ ayant la valeur (6), sont des polynômes; en effet, si

$$\beta = -N, \quad \beta' = -N',$$

on a $A_{m,n} = 0$ pour toutes les valeurs de m et n satisfaisant aux conditions

$$m > N, \quad n > N'.$$

D'une façon générale, désignons par $u(\beta, \beta')$ une solution de l'équation (2); on aura

$$(7)\quad \begin{cases} u(\beta+1, \beta') = \dfrac{\partial u(\beta, \beta')}{\partial x}, \\[2ex] u(\beta, \beta'+1) = \dfrac{\partial u(\beta, \beta')}{\partial y}; \end{cases}$$

c'est-à-dire que, si $u(\beta, \beta')$ est une solution de l'équation (2), $\frac{\partial u(\beta, \beta')}{\partial x}$ est une solution de l'équation (2) où l'on a remplacé β par $\beta+1$, et $\frac{\partial u(\beta, \beta')}{\partial y}$ une solution de cette même équation où l'on a remplacé β' par $\beta'+1$. Pour le démontrer, il suffit de différentier le premier membre de l'équation (2) par rapport à x ou à y.

La propriété exprimée par les équations (7) conduit à l'intégrale générale de l'équation (2) quand β et β' sont des *entiers positifs* : $\beta = m$, $\beta' = n$.

Remarquons, en effet, que si $\beta = \beta' = 1$, l'intégrale générale de l'équation (2) est

$$u(1, 1) = \frac{X - Y}{x - y},$$

X étant une fonction de x seul et Y de y seul. Alors, d'après (7),

$$u(2, 1) = \frac{\partial\left(\dfrac{X - Y}{x - y}\right)}{\partial x},$$

et

$$u(m, n) = \frac{\partial^{m+n-2}}{\partial x^{m-1}\, \partial y^{n-1}} \left(\frac{X - Y}{x - y}\right).$$

Telle est donc l'expression de l'intégrale générale quand β et β' sont des entiers positifs m et n. Le cas où β et β' sont des entiers négatifs se ramène immédiatement au précédent. En effet, si, dans l'équation (2), on fait

$$(8)\qquad u = (x - y)^{1-\beta-\beta'}\, t,$$

cette équation prend la forme

$$(9)\qquad (x - y)\frac{\partial^2 t}{\partial x\, \partial y} - (1 - \beta)\frac{\partial t}{\partial x} + (1 - \beta')\frac{\partial t}{\partial y} = 0,$$

c'est-à-dire la forme (2), où β et β' sont changés respectivement

en $1-\beta'$ et $1-\beta$. Si donc β et β' sont des entiers négatifs, $1-\beta$ et $1-\beta'$ sont des entiers positifs et l'intégrale t de l'équation (9) est donnée par la formule établie précédemment.

Supposons enfin que, β' étant quelconque, β soit un entier que l'on pourra toujours supposer positif à cause de la transformation (8). En supposant d'abord $\beta = 1$, on voit que l'intégrale générale de l'équation (2) est

$$u(1, \beta') = (x-y)^{-\beta'}\left[\int Y (x-y)^{\beta'-1}\,dy + X\right];$$

et, par suite,

$$u(m, \beta') = \frac{\partial^{m-1} u(1, \beta')}{\partial x^{m-1}},$$

m étant entier. On a une formule analogue si, β étant quelconque, β' est entier.

Lorsque les nombres β et β' sont quelconques, on peut, par la transformation (8) et l'application répétée des formules (7), ramener ces deux nombres à avoir leurs parties réelles comprises entre 0 et 1. On obtient alors l'expression suivante de l'intégrale générale :

$$u = \int_x^y \varphi(\alpha)(y-\alpha)^{-\beta'}(\alpha-x)^{-\beta}\,d\alpha$$

$$+ (x-y)^{1-\beta-\beta'}\int_x^y \psi(\alpha)(y-\alpha)^{\beta-1}(\alpha-x)^{\beta'-1}\,d\alpha,$$

φ et ψ désignant des fonctions arbitraires.

LETTRE DU D[r] P. VETH,

Professeur de l'Université de Leyde,

A M. ARISTIDE MARRE,

de Paris, Membre correspondant de l'Institut royal des Indes néerlandaises.

Monsieur et très honoré Collègue,

Je vous suis bien reconnaissant de la bonté que vous avez eue de m'envoyer votre traduction du *Catalogue des étoiles australes*, de Frédéric de Houtman.

En restituant à un homme de mérite l'honneur qui lui est dû, vous avez en même temps revendiqué pour ma patrie un des titres de gloire qui lui appartient, mais qui était oublié en partie par sa propre négligence. Il est vrai que le mérite de de Houtman comme astronome n'était pas entièrement inconnu en Hollande. W. Blaeu en a fait mention dans son *Institutio astronomica* et sur un grand globe céleste qui se trouve dans la Bibliothèque de l'Université d'Utrecht; et d'après Blaeu, feu le professeur G. Moll d'Utrecht a renouvelé, en 1825, la mémoire des services que l'ancien navigateur a rendus à la Science; mais, comme il ignorait parfaitement l'Ouvrage dans lequel de Houtman a rendu compte de ses recherches, il n'a pas su concilier le témoignage de Blaeu sur de Houtman avec celui de Merula, dans sa *Cosmographia generalis*, sur un certain Pieter Dircksz, pilote du navire sur lequel de Houtman fit son premier voyage aux Indes orientales.

Chose curieuse! Le *Spraeckende Woordenboeckde* de Houtman n'a jamais été inconnu à ceux qui s'occupaient de l'étude du malai; il a été réimprimé avec omission du *Catalogue des étoiles circumpolaires australes*, à la suite de la grammaire malaie de Werndly, et le titre est répété dans plusieurs Ouvrages bibliographiques; mais, autant que je sache, les mathématiciens et les astronomes néerlandais n'ont jamais fixé leur attention sur l'appendice si remarquable qui se trouvait au bout d'un livre qui, pour son contenu principal, était étranger à leur domaine. Le seul qui ait remarqué cette omission n'était pas un astronome, mais l'illustre historien, feu M. de Jonge, qui, en faisant mention des énonciations douteuses du professeur Moll, observe qu'il paraît ne pas avoir connu le *Catalogue des étoiles de l'hémisphère austral*, que de Houtman lui-même avait publié à la suite de la première édition de son *Spraeckende Woordenboeck in de Maleijsche ende Madagaskarsche talen*, dont un exemplaire se trouve à la Bibliothèque royale de la Haye.

Excité par votre exemple, j'ai composé un petit essai sur la relation qui a existé entre le pilote Dircksz et le commis de Houtman, et sur les causes qui ont amené l'oubli des découvertes astronomiques de ces deux hommes remarquables qui, dans leur humble sphère, ont donné des preuves de connaissances solides réclamant l'hommage de la postérité. J'ai trouvé dans la Bibliothèque de la

Société des Lettres Néerlandaises, de Leyde, un second exemplaire de l'édition originale du *Spraeckende Woordenboeck*, lequel, avec l'aide de votre *Introduction*, m'a fourni la matière de quelques éclaircissements. Ce petit essai, intitulé : *Jets over de verdiensten van Frederik de Houtman als Sterrekundige,* je l'ai offert à notre Société de Géographie, et il sera inséré prochainement dans son *Bulletin*.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME SIXIÈME.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME VI; 1882. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MÉLANGES.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME VI.

7911 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *J. Hoüel*, Secrétaire de la rédaction, Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux, cours d'Aquitaine, 66.

7911 Paris. Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES
ET
ASTRONOMIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAÏEF, BROCARD, LAISANT, LAMPE,
LESPIAULT, MANSION, POTOCKI, RADAU, RAYET, WEYR, ETC.,

SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME VI. — ANNÉE 1882.

(TOME XVII DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1882

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAÎTRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE (1).

Tome IX; 1880. 2e série.

Sainte-Claire Deville et *Mascart*. — Sur la construction de la règle géodésique internationale. (9-20).

Cornu (*A.*). — Sur le spectre normal du Soleil, partie ultra-violette. (21-106).

André (*D.*). — Développements par rapport au module des fonctions elliptiques $\lambda(x)$, $\mu(x)$ et de leurs puissances. (107-118).

Si l'on pose

$$\lambda^{2p+1}(x) = C_0^{(p)} + C_1^{(p)} k^2 + C_2^{(p)} k^4 + C_3^{(p)} k^6 + \ldots,$$

$$\lambda^{2p}(x) = D_0^{(p)} + D_1^{(p)} k^2 + D_2^{(p)} k^4 + D_3^{(p)} k^6 + \ldots,$$

$$\mu^{2p+1}(x) = E_0^{(p)} + E_1^{(p)} k^2 + E_2^{(p)} k^4 + E_3^{(p)} k^6 + \ldots,$$

$$\mu^{2p}(x) = F_0^{(p)} + F_1^{(p)} k^2 + F_2^{(p)} k^4 + F_3^{(p)} k^6 + \ldots,$$

(1) Voir *Bulletin*, IV$_2$, p. 16.

on aura

$$C_n^{p} = \sum G_{i,j} x^{2i} \sin(2j+1)x + \sum H_{i,j} x^{2i+1} \cos(2j+1)x,$$

$$D_n^{(p)} = \sum G_{i,j} x^{2i} \cos 2jx \qquad + \sum H_{i,j} x^{2i+1} \sin 2jx,$$

$$E_n^{(p)} = \sum G_{i,j} x^{2i} \cos(2j+1)x + \sum H_{i,j} x^{2i+1} \sin(2j+1)x,$$

$$F_n^{(p)} = \sum G_{i,j} x^{2i} \cos 2jx \qquad + \sum H_{i,j} x^{2i+1} \sin 2jx,$$

dans chacune desquelles on désigne par $G_{i,j}$ et $H_{i,j}$ des coefficients indépendants de x, par i et j des entiers quelconques, non négatifs, et dans chacune desquelles on étend le premier $\sum$ à tous les systèmes de valeurs des entiers i et j qui satisfont à la fois aux deux conditions

$$2i \leqq n, \quad 2i + j \geqq n + p,$$

et le second à tous ceux qui satisfont à la fois aux deux conditions

$$2i + 1 \leqq n, \quad 2i + 1 + j \leqq n + p.$$

Appell (*P.*). — Sur une classe de polynômes. (119-144).

L'auteur s'occupe des polynômes en x, formant une suite $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$, telle que l'on ait

$$\frac{dA_n}{dx} = nA_{n-1},$$

polynômes dont la forme générale est

$$A_n = \alpha_n + \frac{n}{1}\alpha_{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha_{n-2}x^2 + \ldots + \frac{n}{1}\alpha_1 x^{n-1} + \alpha_0 x^n,$$

les α étant arbitraires; dans chaque polynôme figure un de ces coefficients, qui n'entrait pas dans les précédents.

Si l'on considère le développement

$$a(h) = \alpha_0 + \frac{h}{1}\alpha_1 + \frac{h^2}{1.2}\alpha_2 + \ldots,$$

le produit $a(h)e^{hx}$ sera de la forme

$$A_0 + \frac{h}{1}A_1 + \frac{h^2}{1.2}A_2 + \ldots,$$

d'où le nom de *fonction génératrice* des polynômes $A_0, A_1, \ldots,$ donné par M. Appell à la fonction $a(h)$.

Si l'on considère deux séries de polynômes

$$A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots,$$
$$B_0, B_1, \ldots, B_n, \ldots,$$

la série de polynômes dont le terme général est $\lambda A_n + \mu B_n$, où λ, μ désignent

des constantes, jouit de la propriété fondamentale : elle a pour fraction génératrice $\lambda a(h) + \mu b(h)$.

Si dans le polynôme A_n on remplace $x^0, x^1, \ldots, x^n$ respectivement par $B_0, B_1, \ldots, B_n$, on obtiendra un polynôme $(AB)_n$; la suite des polynômes dont $(AB)_n$ est le terme général jouit encore de la propriété fondamentale, et la fonction génératrice de cette suite est $a(h)\,b(h)$; on en conclut

$$(AB)_n = (BA)_n.$$

Cette propriété s'étend évidemment à un produit symbolique d'autant de facteurs qu'on veut et conduit à la notion des puissances entières symboliques. L'opération inverse de la multiplication conduit à la notion de division symbolique; ainsi les polynômes B, tels que

$$(AB)_n = x^n,$$

ont pour fonction génératrice $\frac{1}{a(h)}$, et on peut les représenter par $\frac{1}{A}$ ou par A^{-1} : par exemple, les polynômes B, inverses des polynômes A, qui ont pour fonction génératrice $1 - h$, sont donnés par la formule

$$B_n = 1.2\ldots n\left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n}\right);$$

la considération des polynômes inverses $(P^{-1})_n$ des polynômes P_n, ayant pour fonction génératrice e^{-h^2}, conduit à la formule

$$(P^m)_n = m^{\frac{n}{2}} P_n\left(\frac{x}{\sqrt{m}}\right),$$

où m est un nombre quelconque entier ou fractionnaire, positif ou négatif.

En désignant par $(d^k A)_n$ les polynômes qui ont pour fonction génératrice $\frac{d^k a(h)}{dh^k}$, on a

$$(d^k A)_n = A_{n+k} - \frac{k}{1} x A_{n+k-1} - \frac{k(k-1)}{1.2} x^2 A_{n+k-2}.$$

Dans le second membre, tous les termes en x de degré supérieur à n se détruisent.

Lorsque la fonction $a(h)$ satisfait à une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des polynômes en h, on en déduira facilement, en vertu de ce qui précède, une relation linéaire entre un certain nombre de polynômes A, (dA), (d^2A), que l'on pourra ensuite transformer en une relation linéaire par rapport aux polynômes A; enfin cette dernière relation permettra de former une équation différentielle linéaire à laquelle devra satisfaire le polynôme A_n. Ainsi les polynômes Q ayant pour fonction génératrice la série hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, h)$ conduisent à l'équation différentielle

$$x^2 \frac{d^3 Q_n}{dx^3} - x(x + a + 2n - 4)\frac{d^2 Q_n}{dx^2}$$
$$+ [(n-1)(2x + a + n - 2) + \gamma x + b]\frac{dQ_n}{dx} - n(n + \gamma - 1)Q_n = 0,$$

où

$$a = \alpha + \beta + 1, \quad b = \alpha\beta.$$

Les polynômes $(d^{-1}A)$ ayant pour fonction génératrice $\int a(h)\,dh$ sont donnés par la formule

$$(d^{-1}A)_n = x^n(d^{-1}A)_0 + A_{n-1} + xA_{n-2} + \ldots + x^{n-1}A_0.$$

Si l'on a formé le polynôme inverse $(A^{-1})_n$ du polynôme A_n et que l'on ait

$$(A^{-1})_n = \lambda_0 x^n + \lambda_1 x^{n-1} + \ldots + \lambda_n,$$

la définition même des polynômes inverses donne

$$x^n = \lambda_0 A_n + \lambda_1 A_{n-1} + \ldots + \lambda_n A_0,$$

d'où le moyen de développer un polynôme entier en x en une série procédant suivant les puissances entières et positives de x, suivant ces polynômes : citons, par exemple, la formule

$$\cos x = \frac{1}{e}\left[P_0 - \frac{P_2}{1.2} + \frac{P_4}{1.2.3.4} - \ldots + (-1)^n \frac{P_{2n}}{1.2.3.4} + \ldots\right],$$

où le développement procède suivant les polynômes P, déjà considérés, qui ont pour fonction génératrice e^{-h^2}.

Étant donnée une série $F(x)$ procédant suivant les puissances entières et positives de x, si l'on y remplace partout x^n par le polynôme A_n, on obtient ainsi une nouvelle série qui, si elle est convergente, définit une fonction que M. Appell désigne par $F(A)$.

Si $F(x)$ satisfait à une équation différentielle linéaire à coefficients constants, $F(A)$ satisfait à la même équation. Supposant ensuite que $F(x)$ satisfasse à une équation différentielle linéaire, dont les coefficients et le second membre sont respectivement des polynômes entiers en x et une série $\varphi(x)$ procédant suivant les puissances entières et positives de x, l'auteur traite particulièrement le cas où l'on considère des développements qui procèdent suivant les polynômes P définis plus haut : la même marche conduit au but toutes les fois qu'on a affaire à des polynômes tels qu'un certain nombre de polynômes consécutifs soient liés par une relation linéaire.

Le premier membre de l'équation différentielle que vérifie la fonction $y = F(x)$ est une somme de termes de la forme

$$x^p \frac{d^q y}{dx^q},$$

multipliés par des coefficients constants.

Or, en supposant la série $z = F(P)$ convergente, on reconnaît aisément qu'il existe une fonction linéaire de z et de ses dérivées successives, fonction dont les coefficients sont des polynômes entiers en x, telle que, en y remplaçant z par $F(P)$ et ordonnant suivant les polynômes P, on tombe sur une série dans laquelle le coefficient de P_n soit le même que le coefficient de x^n dans la série obtenue en remplaçant, dans $x^p \dfrac{d^q y}{dx^q}$, y par $F(x)$; la fonction $z = F(P)$ vérifiera donc une équation différentielle linéaire dont le premier membre se déduit du premier membre de l'équation différentielle linéaire que vérifie la fonction $y = F(x)$ et dont le second membre est $\varphi(P)$.

Ainsi de l'équation

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+n^2y=0,$$

que vérifie le polynôme $y=\cos n(\arccos x)$, on déduit l'équation

$$4\frac{d^4z}{dx^4}-4x\frac{d^3z}{dx^3}+(x^2-5)\frac{d^2z}{dx^2}+x\frac{dz}{dx}-n^2z=0,$$

que vérifie le polynôme

$$z=\cos n(\arccos P).$$

Enfin, M. Appell termine par quelques remarques sur ce que deviennent les polynômes considérés lorsque n augmente indéfiniment.

Picard (É.). — Mémoire sur les fonctions entières. (145-166).

L'objet principal de l'important travail de M. Picard est la démonstration de deux théorèmes généraux sur les fonctions entières (au sens de M. Weierstrasss).

1° Il ne peut y avoir plus d'une valeur finie que ne puisse prendre pour une valeur finie de la variable une fonction entière.

2° Il ne peut y avoir plus d'une valeur finie a pour laquelle l'équation $G(z)=a$, $G(z)$ étant une fonction entière, ait seulement un nombre limité de racines, à moins que $G(z)$ ne soit un polynôme.

I. La démonstration repose sur la considération de la fonction

$$\omega=\frac{K'i}{K},$$

où K' et K ont le sens habituel dans la théorie des fonctions elliptiques; ω est regardé comme une fonction de la variable $x=k^2$; l'équation différentielle linéaire à laquelle satisfont K et K' permet de définir ces quantités dans tout le plan; ω n'admet que les points critiques 0, 1, ∞; dans toute région à contour simple qui n'enferme aucun de ces points, c'est une fonction uniforme et continue de x; si on la met sous la forme ordinaire des quantités imaginaires, le coefficient de i n'est jamais négatif; on en conclut aisément que ce coefficient n'est jamais nul, en dehors des points critiques.

Ceci posé, si la fonction entière $G(z)$ ne peut prendre ni la valeur $a=0$, ni la valeur $b=1$, cette fonction est une constante; en effet, si l'on pose $x=G(z)$, ω devient une fonction de z; si l'on fait décrire à z un chemin fermé, partant de z_0 et y revenant, x décrira un chemin fermé que l'on pourra réduire par des déformations continues au point $x_0=G(z_0)$, et cela sans passer par le point 0 ou par le point 1, puisque la fonction $G(z)$ ne peut atteindre ni la valeur 0 ni la valeur 1.

Si maintenant, z allant du point z_0 au point z_1 par différents chemins, ω, partant toujours d'une détermination ω_0 qui corresponde à $x_0=G(z_0)$, arrivera toujours en z_1 avec la même valeur ω_1; en sorte qu'on peut regarder ω comme une fonction entière de z. Soit $f(z)$ cette fonction; la fonction entière $e^{if(z)}$ aurait son module constamment moindre que 1, puisque le coefficient de i dans ω est constamment positif: $f(z)$ ou $\omega[G(z)]$, est donc une constante; il en est de même de $G(z)$.

M. Picard déduit de là qu'une fonction uniforme n'admettant pas d'autres

points singuliers que des pôles et qui ne peut prendre ni la valeur a ni la valeur b, peut prendre toute autre valeur c; il suit en effet des principes posés par M. Weierstrass qu'une telle fonction peut se mettre sous la forme

$$f(z) = \frac{ae^{Q(z)} - be^{P(z)}}{e^{Q(z)} - e^{P(z)}},$$

$P(z)$, $Q(z)$ désignant des fonctions entières de z : l'équation

$$f(z) = c$$

équivaut donc à une équation de la forme

$$Q(z) - P(z) = \log \frac{b-c}{a-c} + 2m\pi i;$$

mais, le second membre pouvant prendre une infinité de valeurs, il est clair, d'après le théorème précédent, que cette équation peut être vérifiée.

Enfin, la même proposition fournit une démonstration immédiate du théorème fondamental de l'Algèbre.

L'auteur donne ensuite une expression, valable pour tous les points du plan, d'une fonction n'ayant que les trois points critiques o, 1, ∞.

II. Pour la démonstration du second théorème général, M. Picard se sert de la transcendante $\nu(\omega)$ définie par les deux équations

$$\omega = \frac{K'i}{K}, \quad \nu = \frac{4}{27} \frac{(x+\varepsilon)^3(x+\varepsilon^2)^3}{x^2(1-x)^2},$$

où $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$; cette transcendante a été étudiée, à divers points de vue, par M. Hermite et par M. Dedekind. La quantité ν, regardée comme fonction de ω, n'est définie que dans une moitié du plan, où elle est uniforme; elle reprend la même valeur pour deux nombres ω et ω_0, liés par la relation

$$\omega = \frac{\nu + \rho\omega_0}{\lambda + \mu\omega_0},$$

où les entiers réels λ, μ, ν, ρ vérifient l'équation

$$\lambda\rho - \mu\nu = 1.$$

Si l'on regarde ω comme une fonction de ν, on aura comme points critiques les seuls points o, 1, ∞ ; le coefficient de i dans ω sera toujours positif; à chaque valeur de ν correspondront une infinité de valeurs de ω liées entre elles par la relation précédente.

Si maintenant les équations

$$G(z) = 0, \quad G(z) = 1$$

avaient un nombre fini de racines, la fonction ω de ν, où l'on remplacerait ν par $G(z)$, deviendrait une fonction $F(z)$ dont les points critiques, autres que le point ∞, étant en nombre fini, pourraient être enfermés à l'intérieur d'un cercle c dont l'origine serait le centre : c'est par une étude approfondie de la fonction

$\omega = F(z)$ ou plutôt de la fonction

$$\frac{\alpha + \beta\omega}{\gamma + \delta\omega},$$

à l'extérieur du cercle c, que M. Picard atteint son but : α, β, γ, δ sont des constantes telles que, la variable z ayant fait le tour du cercle et la fonction $F(z)$, pour laquelle on prend tout d'abord une détermination ω, ayant, par suite de la révolution de la variable z, pris la détermination

$$\frac{\nu + \rho\omega}{\lambda + \mu\omega},$$

l'expression

$$\frac{\alpha + \beta F(z)}{\gamma + \delta F(z)}$$

prenne la détermination

$$\frac{\alpha + \beta\omega}{\gamma + \delta\omega} \times k,$$

k étant une constante; les constantes α, β, γ, δ, k étant déterminées, il est aisé de former une fonction qui, après une révolution de z autour de c, reprenne la même valeur; l'examen des différents cas conduit toujours à des conclusions inadmissibles (telles, par exemple, que la variation de signe du coefficient de i dans ω), sauf dans le cas où l'on aurait

$$(\lambda + \rho)^2 = 4;$$

dans ce cas, on peut déterminer des entiers α, β, γ, δ, M tels que $\beta\gamma - \alpha\delta = 1$ et que $\frac{\alpha + \beta\omega}{\gamma + \delta\omega}$ se change, après une révolution de la variable z, en $\frac{\alpha + \beta\omega}{\gamma + \delta\omega} + M$. M. Picard parvient alors à établir que le module de $G(z)$ augmente indéfiniment de quelque façon que z se rapproche du point ∞, et cela suffit à prouver que $G(z)$ est un polynôme : c'est ce qui avait été annoncé.

L'auteur termine en montrant comment cette proposition permet de compléter l'étude faite par M. Weierstrass d'une fonction uniforme dans le voisinage d'un point essentiel; il établit qu'il existe dans ce voisinage une infinité de valeurs de la variable pour laquelle cette fonction prend telle valeur a qu'on veut; il peut toutefois y avoir exception pour deux valeurs de a.

Elliot. — Sur la transformation des intégrales abéliennes. (107-186).

I. *Transformations réversibles*. — Étant donnée l'équation irréductible

$$(1) \qquad f(x, y) = 0,$$

à chaque point (x, y) de la courbe définie par cette équation, on fait correspondre un point (x_1, y_1) par les formules suivantes

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \\ y_1 &= \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \end{aligned} \right.$$

où M, N, P, Q désignent des polynômes quelconques. A une *solution analytique*

(x, y) correspond toujours un seul point (x_1, y_1), une solution analytique étant définie non seulement par les valeurs de x et y pour le point considéré, mais par le développement en série de y pour la branche considérée qui passe par ce point.

M. Elliot montre comment on peut parvenir à l'équation *irréductible*

$$f_1(x_1, y_1) = 0, \tag{3}$$

de la courbe lieu des points x_1, y_1.

Pour une solution quelconque de l'équation (3), les équations (2) n'auront, en général, qu'une solution commune en x, y; à cette condition, qui n'exclut pas la possibilité de plusieurs solutions communes pour certains points particuliers (x_1, y_1) de la courbe (2), la transformation sera réversible et l'on pourra exprimer x, y rationnellement en x_1, y_1.

II. *Transformations rationnelles quelconques.* — Si, dans l'équation (1), on remplace x, y par les valeurs

$$x = \frac{M_1(x_1, y_1)}{N_1(x_1, y_1)}, \quad y = \frac{P_1(x_1, y_1)}{Q_1(x_1, y_1)}, \tag{4}$$

où M_1, N_1, P_1, Q_1 sont des polynômes quelconques en x_1, y_1, on tombera sur un résultat de la forme

$$f\left(\frac{M_1}{N_1}, \frac{P_1}{Q_1}\right) = \frac{F(x_1, y_1)}{N_1^\alpha Q_1^\beta}.$$

Pour toute solution (x, y) de l'équation (1), les équations (4) ont une ou plusieurs solutions dont l'ensemble constitue la courbe transformée; si, pour une solution (x, y), les équations (4) avaient une infinité de solutions, celles-ci appartiendraient à une courbe qui aurait le premier membre de son équation en facteur dans l'équation transformée : soit f_1 le quotient de F par ces facteurs, qui donnent des courbes répondant à des points particuliers de $f = 0$; $f_1 = 0$ sera l'équation de la courbe transformée : l'auteur montre que, si cette dernière courbe se décompose en plusieurs autres, chacune d'elles peut être regardée comme la transformée de la courbe (1), ou, en d'autres termes, comme décrite par un ou plusieurs points x_1, y_1 quand le point x, y décrit la courbe (1); pour qu'on ait affaire à une transformation réversible, il faut ainsi que la courbe $f_1 = 0$ se décompose en d'autres courbes dont l'une soit décrite par *une seule* des solutions des équations (4).

III. Transformation des intégrales algébriques.

L'auteur montre comment les notions qui précèdent permettent de préciser le sens d'une telle transformation. Il traite en particulier le cas des intégrales de première espèce mises sous la forme

$$\int \frac{\varphi(x, y)\,dx}{\frac{df}{dy}};$$

ces intégrales, par une transformation rationnelle, doivent rester de première espèce, et, en effet, M. Elliot montre comment, après la transformation, on retombe sur la même forme. On n'obtient d'ailleurs, par ce procédé, *toutes* les intégrales de première espèce, que si la transformation est réversible.

Enfin l'auteur applique ces résultats au cas où l'équation (1) est de la forme

$$y^3 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D;$$

on obtient alors un résultat analogue au théorème de Jacobi sur la transformation des intégrales elliptiques; la courbe étant du genre 1, il n'y a qu'une seule intégrale de première espèce, à savoir

$$\int \frac{dx}{(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)^{\frac{2}{3}}}.$$

Si l'on fait la transformation $y = y_1$, $x = \frac{U_1}{V_1}$, et que l'on détermine les polynômes U_1 et V_1 de telle façon que l'on ait

$$AU_1^3 + BU_1^2V_1 + CU_1V_1^2 + DV_1^3 = P_1^3 Q_1,$$

P_1, Q_1 étant des polynômes dont le second est du troisième degré, on aura

$$\int \frac{dx}{(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)^{\frac{2}{3}}} = k \int \frac{dx_1}{Q_1^{\frac{2}{3}}},$$

k étant une constante.

Mathieu (É.). — Réflexions sur les principes mathématiques de l'électrodynamique. (187-208).

Admettant, dans les mouvements accomplis par les actions des courants, les principes suivants :

I. Le principe de la conservation vive;

II. Le principe de la réaction égale et directement opposée à l'action;

III. La supposition que les actions mutuelles de deux éléments de courants parallèles, de même sens et perpendiculaires à la droite qui joint leurs milieux, varient en raison inverse du carré de cette distance.

IV. La supposition que les actions mutuelles entre deux éléments de courants linéaires, donnés en intensité et en position, ne varient pas avec leurs courbures.

M. Mathieu parvient aux résultats suivants :

Si l'on suppose que chaque courant soit formé par deux mouvements égaux et opposés des deux électricités positive et négative, l'action entre deux molécules de fluide se compose de deux parties : l'une qui donne la force trouvée par Weber, et l'autre qui renferme une fonction arbitraire. Mais cette seconde partie disparaît dans l'action de deux éléments de courants, qui se trouve être celle que donne la loi d'Ampère.

Ensuite, par la condition qu'un courant fermé et constant soit sans action sur de l'électricité statique, la loi de Weber se trouve avoir lieu nécessairement.

Si l'on suppose l'électricité positive seule en mouvement et une même quantité d'électricité négative fixée au corps conducteur, on trouve pareillement que

deux molécules électriques ne peuvent agir l'une sur l'autre que suivant la loi de Weber, et deux éléments de courants que suivant la loi d'Ampère. Toutefois, d'après cette théorie, un courant fermé constant agirait sur de l'électricité statique, à moins qu'on n'admette que l'action de l'électricité de courant sur de l'électricité statique ne peut pas se déduire de l'action de l'électricité de courant sur une pareille électricité : ce qui est peu vraisemblable.

Les principes I, II, III paraissent incontestables à l'auteur ; le principe IV, au contraire, n'est pas évident *a priori*, en sorte que la fin de ses recherches pourrait seule être modifiée.

André (*D.*). — Second Mémoire sur la sommation des séries. (209-226).

L'auteur se propose de donner la somme de toutes les séries convergentes où la forme du terme général se définit par l'égalité

$$u_n = \frac{U_n}{n(n+1)\ldots(n+p-1)} x^n,$$

où n désigne un entier quelconque supérieur à zéro et où le numérateur U_n est le terme général d'une série récurrente proprement dite.

On suppose que U_n n'est divisible ni par n, ni par $n+p-1$ et que, en outre, dans l'équation génératrice de la série récurrente dont U_n est le terme général, nulle racine n'est de degré de multiplicité supérieur à p ; M. André montre d'ailleurs comment on peut toujours ramener le cas où cette condition ne serait pas remplie à celui où elle le serait.

Après avoir établi la formule

$$\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+p-1)} = \sum_{t=0}^{t=p-1} \frac{(-1)^t}{(p-1-t)!\,t!} \frac{1}{n+t},$$

l'auteur montre comment U_n peut être décomposé en deux parties :

Désignons par a l'une quelconque des racines de l'équation génératrice et par α son degré de multiplicité (inférieur à p) ; on a

$$U_n = \sum \sum_{t=0}^{t=p-1} \frac{(-1)^t}{(p-1-t)!\,t!} \psi_a(n,t)\, a^n x^n$$
$$+ \sum \sum_{t=0}^{t=p-1} \frac{(-1)^t}{(p-1-t)!\,t!} \frac{\varphi_a(-t)}{n+t} a^n x^n,$$

où le premier Σ s'étend à toutes les racines de l'équation génératrice, où les polynômes φ et ψ sont définis par les égalités

$$U_n = \sum \varphi_a(n)\, a^n,$$

$$\frac{\varphi_a(n)}{n+t} = \psi_a(n,t) + \frac{\varphi_a(-t)}{n+t}.$$

En faisant la somme de tous les U_n, les premières parties disparaissent ; la

somme des secondes parties, ou la somme de la série, est égale à

$$\sum\sum_{t=1}^{t=p-1}\frac{(-1)^{t+1}}{(p-1-t)!\,t!}\,\frac{\varphi_a(-t)}{a^t x^t}\left(\frac{ax}{1}+\frac{a^2x^2}{2}+\ldots+\frac{a^t x^t}{t}\right)$$

$$-\sum\sum_{t=0}^{t=p-1}\frac{(-1)^{t+1}}{(p-1-t)!\,t!}\,\frac{\varphi_a(-t)}{a^t x^t}\log(1-ax).$$

M. André donne ensuite quelques applications.

Niewenglowski. — Exposition de la méthode de Riemann pour la détermination des surfaces minima de contour donné. (227-300).

M. Niewenglowski a cherché dans ce travail à rendre plus aisée la lecture du Mémoire où Riemann a déterminé les surfaces minima dont le contour se compose de lignes droites; il s'est aidé pour cela des travaux de M. O. Bonnet.

On sait que les variables (x, y) dont ce géomètre s'est servi sont définies par les formules

$$e^y = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta,\quad x = \varphi,$$

où φ et θ sont la longitude et la colatitude du point m où une sphère fixe de rayon 1 est rencontrée par une parallèle menée par son centre à la normale en un point quelconque de la surface considérée.

L'équation du plan tangent à cette surface est alors

$$\xi\cos x + \eta\sin x + \zeta i\sin iy = -z,$$

où ξ, η, ζ correspondent à un système de coordonnées rectangulaires dont l'origine coïncide avec le centre de la sphère et où z est une fonction de x, y qui définit la surface.

Cette équation fournit le moyen d'exprimer en fonction de x et y les coordonnées d'un point (ξ, η, ζ) de la surface; celle-ci est minimum si l'on a

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}=0.$$

Les variables μ et μ' de Riemann sont définies par les formules

$$\mu = e^{y+xi},\quad \mu' = e^{y-xi};$$

La variable μ est représentée par la projection stéréographique du point m. De cette remarque que l'expression

$$(d\log\mu)^2\frac{d\zeta}{d\log\mu}$$

ne change pas quand on fait varier le trièdre des coordonnées, résulte l'introduction de la variable U définie par l'équation

$$U = \int\sqrt{\frac{i\,d\zeta}{d\log\mu}}\,d\log\mu.$$

et de la conjuguée U'; de ce que ζ est la somme d'une fonction de μ et d'une fonction de μ', il résulte qu'on peut faire

$$\zeta = \int \frac{\partial\zeta}{\partial\mu}\,d\mu + \int \frac{\partial\zeta}{\partial\mu'}\,d\mu',$$

ou

$$\zeta = -i\int\left(\frac{\partial U}{\partial \log\mu}\right)^2 d\log\mu + i\int\left(\frac{\partial U'}{\partial \log\mu'}\right)^2 d\log\mu';$$

par une transformation de coordonnées, on en déduira

$$\xi = -\frac{i}{2}\int\left(\frac{\partial U}{\partial \log\mu}\right)^2\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right)d\log\mu + \frac{i}{2}\int\left(\frac{\partial U'}{\partial \log\mu'}\right)^2\left(\mu' - \frac{1}{\mu'}\right)d\log\mu',$$

$$\eta = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial U}{\partial \log\mu}\right)^2\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right)d\log\mu - \frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial U'}{\partial \log\mu'}\right)^2\left(\mu' - \frac{1}{\mu'}\right)d\log\mu'.$$

Transformant ces formules en y introduisant les variables

$$x_1 = x + iy \quad \text{et} \quad y_1 = y - xi,$$

l'auteur parvient à des formules permettant de trouver une infinité de surfaces minima à contour indéterminé; M. Weierstrass a donné pour le même usage des formules équivalentes.

Si l'on se donne U exprimé au moyen de μ, on voit que la surface minimum est par cela même donnée : pour le problème spécial qu'il avait en vue, à savoir la détermination des surfaces minima dont le contour est formé de lignes droites, Riemann introduit une variable auxiliaire t; la question est ainsi ramenée à exprimer U et μ en fonction de t. Cette variable est assujettie aux conditions suivantes : elle est réelle tout le long du contour; elle y est infinie en un point pour lequel U a une valeur finie; pour les points à l'intérieur du contour son argument est compris entre o et π.

Il est essentiel de remarquer qu'un point (du contour) où passent deux droites non rectangulaires est nécessairement singulier.

Soient $a_1, a_2, \ldots$ les valeurs de t qui répondent aux points multiples relatifs à la variable μ et situés à l'intérieur du contour; soient $b_1, b_2, \ldots$ celles qui répondent aux points multiples non anguleux du contour; soient $c_1, c_2, \ldots$ celles qui répondent aux points anguleux; soient enfin $e_1, e_2, \ldots$ les valeurs de t qui répondent aux secteurs infinis de la surface minimum, on aura

$$\frac{dU}{dt} = \sqrt{\frac{\Pi(t-a)\Pi(t-a')\Pi(t-b)}{\Pi(t-e)}}\,\frac{H}{\Pi(t-e)},$$

où les a' sont les quantités conjuguées des quantités a.

Quant à la détermination de μ en fonction de t, voici le procédé indiqué par Riemann.

V étant une fonction indéterminée de t, on a identiquement

$$\frac{dU}{d\log\mu} = \frac{dU}{dV}k_1 k_2,$$

où

$$k_1 = \sqrt{\frac{dV}{d\mu}}, \quad k_2 = \mu\sqrt{\frac{dV}{d\mu}} = \mu k_1.$$

On en déduit que, en désignant par k l'une quelconque des quantités k_1, k_2,

on a

$$\frac{dV}{dt}\frac{d^2k}{dt^2}-\frac{dk}{dt}\frac{d^2V}{dt^2}=\left(\frac{dV}{dt}\right)^3\frac{d^2k}{dV^2},$$

en sorte que, si l'on parvenait à exprimer $\frac{1}{k}\frac{d^2k}{dV^2}$ en fonction de t, si cette quantité était, par exemple, égale à $F(t)$, k_1 et k_2 se trouveraient être deux solutions particulières d'une équation différentielle linéaire du second ordre liées par la relation

$$k_1\frac{dk_2}{dV}-k_2\frac{dk_1}{dV}=1.$$

k_1 et k_2 étant supposés connus, le problème s'achèvera facilement par les formules précédemment établies.

Pour trouver la fonction V, on fera en sorte que les points singuliers se trouvent parmi les points $a, b, c, \ldots$. Riemann indique deux solutions. Dans la première, il pose

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\varphi(t)}{\sqrt{\chi(t)}},$$

où

$$\varphi(t)=\Pi(t-a)\Pi(t-a')\Pi(t-b),$$
$$\chi(t)=\Pi(t-c)\Pi(t-e)^2,$$

et dans la seconde

$$\frac{dV}{dt}=\frac{1}{\sqrt{\varphi(t)\chi(t)}}.$$

Les applications de la méthode concernent les cas où la surface doit contenir deux droites non situées dans un même plan; trois droites non parallèles; trois droites dont deux se coupent et dont la troisième est parallèle au plan des deux autres, enfin les quatre côtés d'un quadrilatère gauche faisant partie d'un tétraèdre régulier.

Duport. — Sur un mode particulier de représentation des imaginaires. (301-362).

Hautefeuille. — Sur la reproduction de quelques minéraux. (363-408).

Picart (A.). — Mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes. (409-418).

La détermination du potentiel, lorsque l'on connaît les surfaces de niveau, dépend de l'intégration d'une équation différentielle du second ordre.

Du théorème de Steiner, l'auteur déduit la nature des surfaces de niveau pour une couche ellipsoïdale homogène infiniment mince comprise entre deux ellipsoïdes concentriques et homothétiques; il est ensuite mené à l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2V}{d\rho^2}+\left(\frac{\rho}{\rho^2-b^2}+\frac{\rho}{\rho^2-c^2}\right)\frac{dV}{d\rho}=0,$$

d'où il déduit l'expression connue de V.

Gohierre de Longchamps. — Sur les intégrales eulériennes de seconde espèce. (419-427).

Démonstration nouvelle de la formule que Gauss a adoptée comme définitive de ces intégrales.

Charve (L.). — De la réduction des formes quadratiques ternaires positives et de son application aux irrationnelles du troisième degré. (3-156 du Supplément.).

Ce travail, qui a fait l'objet d'une Thèse soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris, a eté analysé dans la première Partie du *Bulletin*.

MATHEMATISCHE ANNALEN, begründet von A. Clebsch und C. Neumann, gegenwärtig herausgegeben von F. Klein und A. Mayer (¹)

Tome XVI; 1880.

Sonine (N.). — Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries. (1-80; fr.).

« Ces recherches sont divisées en six Sections. La première est consacrée à l'étude des conséquences auxquelles conduit la propriété récurrente des fonctions cylindriques exprimée par la relation

$$(1)\qquad S_{n+1}(x) + 2\frac{dS_n(x)}{dx} - S_{n-1}(x) = 0.$$

Comme résultat final on obtient le développement d'une fonction $S_0(\alpha + x)$ en série de la forme

$$(2)\qquad S_0(\alpha + x) = J^0(\alpha).\ S_0(x) + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n J^n(\alpha).\ S_n(x).$$

» Dans la seconde Section, j'adjoins à la propriété (1) cette autre

$$(3)\qquad nS_n(x) = \frac{x}{2}[S_{n-1}(x) + S_{n+1}(x)],$$

et je considère les intégrales définies d'une forme nouvelle qui possèdent ces deux propriétés caractéristiques des fonctions cylindriques et qui s'expriment linéairement par ces fonctions.

» La troisième Section est consacrée à l'évaluation des intégrales indéfinies contenant les fonctions cylindriques. Le sujet a été traité récemment par M. Lommel, mais à l'aide d'une méthode peu directe et peu générale.

(¹) Voir *Bulletin*, V_2, 139.

» Dans la quatrième Section, j'étudie les intégrales définies contenant les fonctions cylindriques. J'y établis une formule très générale et, je crois, très importante, à savoir

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \omega_3 &= \int_0^\infty \mathrm{J}^m(bx)\,.\; x^{m+1}.\; \frac{\mathrm{J}^n\left(a\sqrt{x^2+z^2}\right)}{\left(\sqrt{x^2+z^2}\right)^n}\,dx \\ &= \frac{b^m}{a^n}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{z}\right)^{n-m-1} \mathrm{J}^{n-m-1}\left(z\sqrt{a^2-b^2}\right),\ \text{pour } a>b \\ &\text{et} = 0,\ \text{pour } a<b;\quad n>m>-1, \end{aligned}\right.$$

et j'en fais plusieurs applications; par exemple, j'en déduis la généralisation d'une formule célèbre d'Abel,

$$(5)\quad \mathrm{F}(a)-\mathrm{F}(0) = \frac{2a\sin p\pi}{\pi}\int_0^1 \frac{x^{2p}\,dx}{(1-x^2)^p}\int_0^1 \frac{\mathrm{F}'(axt)\,dt}{(1-t^2)^{1-p}},\quad 0<p<1.$$

Une formule de M. H. Weber me conduit au développement d'une fonction continue pour chaque valeur réelle positive de la variable, en série procédant suivant des polynômes entiers d'une forme déterminée.

» A la fin de la Section se trouve une expression très élégante de la fonction cylindrique de seconde espèce $\mathrm{Y}^0(\varkappa)$, savoir

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{Y}^0(\varkappa) &= -2\int_0^\infty \mathrm{J}^0(x)\,\frac{\cos(x+\varkappa)}{x+\varkappa}\,dx \\ &= -2\int_0^\infty \frac{\mathrm{J}^0(x)\,dx}{x+\varkappa} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varkappa\cos\varphi)\,d\varphi. \end{aligned}\right.$$

» La cinquième Section traite de l'équation différentielle de Bessel, dont on n'a fait aucune mention dans les quatre Sections précédentes. J'y considère la forme symbolique de la solution, donnée par M. Hargreave, et je fais voir sur cet exemple particulier de quelle utilité peut être souvent la forme symbolique, lors même qu'elle n'a pas d'interprétation directe. Je me permets de faire remarquer que c'est par la considération de la forme symbolique de la fonction $\mathrm{Y}^0(\varkappa)$ que j'ai trouvé son expression qu'on vient d'écrire.

» Enfin, dans la sixième Section, je présente la généralisation des considérations développées dans la première Section, et j'en fais une application, en me réservant de traiter ce sujet à fond dans un Mémoire spécial. »

Cayley (*A.*). — Note sur le Mémoire de Riemann : « Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation » (*Werke*, p. 331-344). (81-82; angl.).

Krause (*M.*). — Sur la transformation du cinquième degré des fonctions hyperelliptiques du premier ordre. (83-88).

Burmester (*L.*). — Sur le système variable bifocalement. (89-111, 2 pl.).

Si, dans un système plan Σ_1, on donne deux points Φ_1, Ψ_1, et dans un autre

système plan Σ_2, deux points Φ_2, Ψ_2 ; si, en outre, on détermine deux points correspondants P_1, P_2 de ces systèmes de telle sorte que l'on ait les équations

$$\Phi_1 P_1 = \Phi_2 P_2, \quad \Psi_1 P_1 = \Psi_2 P_2,$$

alors les deux systèmes Σ_1, Σ_2 ainsi définis seront appelés *bifocaux*. A un point P_1 de Σ_1, aussi bien qu'au point Q_1 de ce système placé symétriquement à P_1 par rapport à la droite focale $\Phi_1\Psi_1$, correspondent dans Σ_2 deux points P_2, Q_2, symétriquement placés par rapport à la droite focale $\Phi_2\Psi_2$; et réciproquement, à chacun des points P_2, Q_2 de Σ_2 correspond le couple de points P_1, Q_1 de Σ_1. Les deux systèmes sont dans une affinité doublement double (*zwei-zweideutig*), dont les relations fondamentales ont été indiquées aphoristiquement par Jacobi dans une lettre à Steiner [1].

Dans le présent Mémoire, l'auteur fait voir qu'un système déterminé Σ_I, semblable au système Σ_1, peut être considéré comme la projection horizontale, et le système Σ_2 comme la projection verticale d'un hyperboloïde à une nappe, dont deux des axes sont respectivement perpendiculaires aux plans de projection. De cette relation on déduit de la manière la plus simple les théorèmes les plus importants sur les systèmes bifocaux.

Un système plan qui varie de telle sorte que toutes ses phases soient des systèmes bifocaux correspondants est dit un système bifocalement variable. La détermination des vitesses des points d'une phase Σ du système variable fait voir que le système Σ_v des points terminaux de ces vitesses est avec la phase du système Σ en affinité simplement double (*ein-zweideutig*). Un système déterminé Σ_{II}, semblable à Σ_v, peut être considéré comme la projection verticale, et le système Σ comme la projection horizontale d'un hyperboloïde à une nappe, dont deux génératrices sont perpendiculaires à la projection horizontale. De ce théorème découlent avec une grande facilité une série de relations intéressantes des deux systèmes d'affinité simplement-double Σ_v, Σ. L'auteur établit ensuite synthétiquement plusieurs autres théorèmes sur les états de vitesse du système bifocalement variable, et termine par un examen concis du système analogue à trois dimensions, qu'il nomme *système trifocalement variable*.

Du Bois-Reymond (*P.*). — Proposition générale concernant la théorie de l'intégrabilité. (112).

Les fonctions intégrables $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ étant, dans l'intervalle $a \leqq x \leqq b$, renfermées entre les limites $\alpha_\iota \leqq \varphi_\iota \leqq \beta_\iota$, et la fonction

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

étant continue dans le domaine $\alpha_\iota \leqq x_\iota \leqq \beta_\iota$, la fonction

$$F[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)]$$

sera intégrable dans l'intervalle $a \ldots b$.

Cantor (*G.*). — Remarque sur les séries trigonométriques. (113-

---

[1] *Journal de Crelle*, t. 12, p. 137.

114). — Nouvelle remarque sur les séries trigonométriques. (267-269).

Dans la théorie des séries trigonométriques, il s'agit de la démonstration de ce théorème ([1]) : « Si, pour toute valeur particulière de x, comprise dans l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$, la condition

$$\lim (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0, \text{ pour } n = \infty,$$

est remplie, alors a_n et b_n, pour n croissant, deviendront infiniment petits ». Une démonstration donnée par M. Appell dans l'*Archiv der Math. und Phys.* t. LXIV, contient implicitement l'affirmation que « si, pour toute valeur particulière de $x \geqq \alpha$ et $\leqq \beta$, on a $\lim f(n, x) = 0$ pour $n = \infty$, $f(n, x)$ désignant pour chaque valeur particulière de n une fonction continue de x, dont le maximum absolu soit B_n, on aura alors $\lim B_n = 0$ pour $n = \infty$ ». Cette affirmation ne peut être admise sans discussion, comme on peut le constater sur l'exemple suivant :

$$f(n, x) = \frac{nx(1-x)}{n^2x^2 + (1-x)^2}, \quad \text{pour } 0 \leqq x \leqq 1.$$

On a ici $\lim f(n, x) = 0$ pour $n = \infty$; mais $B_n = f\left(x, \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}$.

Si l'on pose

$$\varphi_\nu(x) = f(\nu, x) - f(\nu - 1, x),$$

il vient

$$\frac{x(1-x)}{x^2 + (1-x)^2} = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \varphi_\nu(x),$$

série infinie qui, dans le voisinage de $x = 0$, définit bien une fonction continue, et qui cependant ne converge pas uniformément. Des exemples semblables ont été déjà présentés par MM. Darboux ([2]) et Du Bois-Reymond ([3]).

Du Bois-Reymond (*P.*). — La démonstration du théorème fondamental du Calcul intégral : $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$. (115-128.).

Voss (*A.*). — Sur la théorie de la transformation des expressions différentielles du second degré et de la courbure des *variétés* d'ordre supérieur. (129-179).

Schubert (*H.*). — Sur la conservation du genre dans deux

([1]) Voir Cantor, *Math. Ann.*, t. IV.
([2]) *Mémoire sur les fonctions discontinues.* (*Ann. de l'Éc. Norm.*).
([3]) *Abh. der bayer. Akad. d. Wiss.*, Bd. XII.

courbes planes liées entre elles par une correspondance uniforme. (180-182).

Nous reproduisons ici la démonstration, fondée sur le principe de correspondance de Chasles. Soient C et C′ deux courbes planes, rencontrées par toute droite du plan en n et n' points respectivement, auxquelles on peut mener par un point quelconque r et r' tangentes respectivement, et qui ont respectivement $\varkappa$ et $\varkappa'$ points de rebroussement. A chaque rayon d'un faisceau du centre P, qui rencontre la courbe C en n points, correspondent n rayons d'un faisceau P′, qui sont les lignes de jonction du point P avec les points correspondants de C′; de même, à chaque rayon de P′ correspondent n' rayons du faisceau P.

Déterminons maintenant, et cela de deux manières différentes, le nombre de fois qu'il arrive qu'un rayon s de P et un rayon s' de P′ soient liés entre eux de telle façon que deux des points d'intersection du rayon s correspondent à deux des points d'intersection du rayon s'. Soit V ce nombre de fois. Un rayon quelconque passant par P coupe C en n points, auxquels correspondent n points sur C′. La ligne qui joint chacun de ces points avec P′ fournit $n'-1$ autres points d'intersection, auxquels correspondent $n'-1$ points sur C. Joignons chacun de ces points avec P. Alors à chaque rayon de P correspondront $n(n'-1)$ autres rayons, et réciproquement aussi, à chacun de ces rayons correspondront pareil nombre de rayons du premier système. Il existe donc en P

$$2n(n'-1)$$

rayons de coïncidence. A ces rayons appartient d'abord deux fois chacun des V rayons cherchés; en second lieu, chacun des r' rayons correspondants aux r' tangentes menées à C′ par P′; en troisième lieu, chacun des $\varkappa'$ rayons menés aux $\varkappa'$ points qui correspondent aux points de rebroussement de C′. On a donc

$$2V = 2n(n'-1) - r' - \varkappa',$$

et de même aussi

$$= 2n'(n-1) - r - \varkappa.$$

Il en résulte l'égalité

$$r + \varkappa - 2n + 2 = r' + \varkappa' - 2n' + 2 = 2p.$$

Lommel (*E.*). — Sur la théorie des fonctions de Bessel. (183-208).

I. L'intégrale définie

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\omega - z\cos\omega)\,d\omega,$$

par laquelle Bessel a défini la fonction $J^n(x)$ qui porte son nom, dans l'hypothèse de n entier, satisfait, seulement dans cette hypothèse, à l'équation différentielle caractéristique des fonctions de Bessel. L'extension au cas d'une valeur de n quelconque de la relation de cette intégrale avec les fonctions de Bessel est le premier problème résolu dans le présent Mémoire.

II. Le problème des phénomènes de diffraction des ondes sphériques a été ramené par Fresnel aux deux intégrales

$$\int \sin\frac{\pi}{2}v^2\,dv \quad \text{et} \quad \int \cos\frac{\pi}{2}v^2\,dv$$

L'auteur fait voir que ces intégrales peuvent se représenter et se calculer sous la forme d'intégrales de Bessel, d'où résulte en même temps la discussion des phénomènes physiques.

III. De même, les intégrales

$$\int_0^z \frac{\sin z}{z}\,dz \quad \text{et} \quad \int_z^\infty \frac{\cos z}{z}\,dz$$

peuvent se représenter au moyen des fonctions de Bessel, et l'on obtient leurs maxima et leurs minima.

Wedekind (*L.*). — Relations de position dans des triangles plans en perspective. (209-244, 12 pl.).

Kraus (*L.*). — Note sur les groupes spéciaux extraordinaires dans les courbes planes. (245-259).

Les courbes spéciales du genre p qui sont ici considérées se distinguent en ce qu'elles possèdent des systèmes d'un nombre simplement ou multiplement infini de courbes, qui touchent la courbe fondamentale en $p-1$ points. Les groupes spéciaux extraordinaires sont les groupes en nombre simplement ou multiplement infini de ces $p-1$ points de contact. Ces courbes se présentent dans les cas où les fonctions thêta, paires ou impaires, et leurs dérivées s'annulent pour une valeur nulle de l'argument.

Cayley (*A.*). — Sur les groupes finis de transformations linéaires d'une variable. (260-263 ; angl.). — Correction à la Note précédente. (439-440 ; angl.).

Płaszycki (*J.*). — Extrait d'une lettre à M. Neumann. (264-266 ; fr.).

Dans son Mémoire intitulé : *Reduction hyperelliptischer Integrale auf algebraisch-logarithmische Functionen* (¹), M. Königsberger se propose de chercher « les conditions nécessaires et suffisantes pour que des intégrales hyperelliptiques soient réductibles aux fonctions algébriques et logarithmiques », et il donne une règle pour obtenir la valeur de l'intégrale, quand la réduction est possible. M. Płaszycki cite ici une intégrale qui s'exprime par les logarithmes contrairement à cette règle.

Noether (*M.*). — Sur la théorie des fonctions thêta d'un nombre quelconque d'arguments. (270-344).

L'auteur étend ici aux fonctions thêta d'un nombre quelconque p de variables l'exposition du *théorème d'addition* des fonctions thêta et des *relations de thêta,* qu'il a présentée pour les fonctions de quatre arguments, dans le tome XIV des *Mathematische Annalen* (²). Ses recherches reposent essentielle-

(¹) *Mathem. Annalen*, Bd. XI.

(²) Voir *Bulletin*, IV$_2$, 218.

ment sur la considération des rapports de groupement des *caractéristiques,* savoir sur la distinction, signalée principalement par l'auteur, entre les *groupes* et les caractéristiques *proprement dites.*

Ces deux espèces de concepts résultent des 2^{2p} complexes de nombres

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} n_1^\alpha & n_2^\alpha & \dots & n_p^\alpha \\ m_1^\alpha & m_2^\alpha & \dots & m_p^\alpha \end{pmatrix},$$

où les nombres n_i^α, m_i^α ne doivent être pris que suivant mod. 2.

La première espèce se compose des 2^{2p-1} complexes (α), dont les éléments ne sont pas tous $\equiv 0 \pmod{2}$; ils correspondent aux 2^{2p-1} demi-périodes, et sont tous *gleichberechtigt.*

La seconde espèce se partage en $2^{p-1}(2^p - 1)$ caractéristiques paires et $2^{p-1}(2^p - 1)$ impaires, suivant que $\sum_i n_i^\alpha m_i^\alpha$ est pair ou impair, et elle correspond respectivement aux deux classes de fonctions thêta, celle des fonctions paires et celles des fonctions impaires. On ajoute les caractéristiques en ajoutant leurs éléments respectifs. A chaque somme quelconque d'un nombre $\left\{ \begin{matrix} \text{pair} \\ \text{impair} \end{matrix} \right\}$ de caractéristiques propres, on fait correspondre la

$$\left\{ \begin{matrix} \text{caractéristique de groupes} \\ \text{caractéristique propre} \end{matrix} \right\}$$

qui s'y rapporte.

Dans l'étude des systèmes formés au moyen de caractéristiques, M. Noether emploie seulement les propriétés qui sont invariantes dans toutes les substitutions propres. Il parvient ainsi à former tous les systèmes et à discuter leur forme et leur dépendance mutuelle. La marche suivie par l'auteur consiste à démontrer que la théorie des caractéristiques de p séries est identique avec la théorie des caractéristiques de $p - 1$ séries. Tel est, en substance, le contenu du premier Chapitre du Mémoire (§§ 1 à 10).

Comme application, l'auteur traite, au § 11, les résolvantes successives des équations dont les racines peuvent correspondre aux systèmes de caractéristiques (par exemple, la bissection des fonctions abéliennes, etc.).

Le Chapitre II a pour objet le théorème d'addition des fonctions thêta. Comme on sait que $\vartheta(u + v + w)\vartheta(u - v)$ peut s'exprimer en fonction linéaire de 2^p produits de ϑ, linéairement indépendants, et de la forme $\vartheta_\alpha(u + w)\vartheta_\alpha(u)$, il ne reste plus maintenant qu'à déterminer les coefficients indépendants des u. L'auteur choisit à cet effet (§ 13), pour les (α), un certain système de caractéristiques propres pour les demi-périodes des u correspondantes à un deuxième système de 2^p caractéristiques de groupes, qui est coordonné au premier système. Alors les coefficients se présentent encore (§ 14) comme des sommes de 2^{p-3} produits, chacune ayant pour arguments $v + w$ et v. Mais l'auteur fait voir (§ 15) que le déterminant des équations linéaires qui donnent les valeurs des coefficients jouit de la propriété remarquable de se décomposer, par exemple, en un produit de facteurs linéaires; et il se sert (§ 16) de cette propriété pour établir, à la place du théorème d'addition ci-dessus, une formule fondamentale pour $p = 3$. Dans cette formule, le premier membre est une somme de [illegible] produits simples, de la forme

[illegible]

le second membre est également une somme de 2^p produits simple, de la forme

$$\vartheta_{(\beta)}(v)\vartheta_{(\beta)}(v+w)\vartheta_{(\beta)}(u)\vartheta_{(\beta)}(u+w).$$

Les coefficients sont purement numériques.

Cette formule simple permet aussi de présenter toutes les relations de ϑ sous les formes les plus simples (§ 17) : ainsi il existe, par exemple pour $p \geqq 5$, des relations homogènes entre 5.2^{p-4} produits, de la forme

$$\vartheta_{(\alpha)}(0)\vartheta_{(\beta)}(0)\vartheta_{(\alpha)}(u)\vartheta_{(\beta)}(u);$$

pour $p \geqq 6$, des relations homogènes entre 5.2^{p-5} produits de la forme

$$\vartheta_{(\alpha)}(0)\vartheta_{(\beta)}(0)\vartheta_{(\gamma)}(0)\vartheta_{(\delta)}(0).$$

L'auteur traite encore des dépendances entre les relations (§ 18). Il termine (§ 19) en discutant les conditions sous lesquelles, pour $p \geqq 5$, les fonctions ϑ deviennent *hyperelliptiques*.

Brill (*A.*). — Sur une propriété de la résultante. (345-347).

Soient données deux équations algébriques $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$, dont les coefficients dépendent des quantités a, b, c, ..., de telle sorte que, si une rationnelle déterminée de ces quantités $R(a, b, \ldots)$, qui n'est pas elle-même une puissance d'une telle fonction, vient à s'évanouir, il y ait chaque fois n racines des deux équations qui coïncident; alors R est un facteur au moins n-uple de la résultante.

Brill (*A.*). — Sur les singularités des courbes planes algébriques, et sur une nouvelle espèce de courbe. (348-408).

Si, au moyen de l'équation d'une courbe plane algébrique, rapportée à un système de coordonnées cartésiennes et passant par l'origine de ces coordonnées, on développe l'ordonnée suivant les puissances ascendantes de l'abscisse, on obtiendra, pour un point singulier, plusieurs développements procédant suivant les puissances entières ou fractionnaires. Si une telle série, ordonnée suivant les puissances de $x^{\frac{1}{p}}$, est interrompue à un terme convenable, on aura l'équation d'une courbe dont les coordonnées, par l'introduction d'un paramètre $x = \lambda^p$, sera transformée en une fonction rationnelle de λ.

Pour la détermination des nombres d'équivalence de la singularité considérée, établis pour la première fois par Cayley, il suffit maintenant, comme le fait voir l'auteur, d'étudier la singularité de cette courbe rationnelle; on peut même indiquer des courbes dont les coefficients sont des fonctions rationnelles et entières de λ, et qui peuvent remplacer non seulement un système cyclique déterminé (singularité unicursale), mais encore toutes les branches. Cette courbe rationnelle peut toujours alors être déformée de telle manière qu'il en résulte une courbe de même ordre et de même classe qui, au lieu de la singularité considérée, possède les singularités élémentaires équivalentes. De cette manière on gagne deux avantages : d'abord le principe de la déformation est précisé algébriquement; en second lieu, on fait voir que les nombres d'équivalence ont en réalité une signification géométrique déterminée.

Cette étude a pour point de départ les propriétés des courbes qui, dans le

système cartésien, sont représentées par des fonctions rationnelles et entières d'un paramètre, que l'on appelle « rationnellement entières », et dans lesquelles la propriété de l'égalité de la classe et de l'ordre permet une dualité complète de représentation. Le Mémoire se divise dans les paragraphes suivants : § 1. La courbe rationnelle et entière. — § 2. Les développements en séries définissent une singularité d'ordre supérieur. — § 3. Les singularités unicursales et l'opération de la déformation. — § 4. Les singularités composées. — § 5. L'équation aux points doubles d'une courbe rationnelle et entière, et son discriminant. — § 6. Les facteurs du discriminant. — § 7. L'indice de réalité d'une singularité d'ordre supérieur. — § 8. Détermination des nombres d'équivalence d'une singularité unicursale. — § 9. Détermination des nombres d'équivalence au moyen de la représentation par un paramètre. — § 10. Les nombres d'équivalence d'une singularité composée. — § 11. Forme des courbes adjointes en un point singulier.

Neumann (*C.*). — Nouveaux théorèmes sur le potentiel logarithmique. (409-431).

Neumann (*C.*). — Nouveaux théorèmes sur le potentiel newtonien. (432-438).

Lie (*S.*). — Théorie des groupes de transformations I. (441-528).

Le présent Mémoire est une exposition détaillée de la théorie que l'auteur a publiée dans une suite de travaux, insérés pour la plupart dans l'*Archiv for Mathematik og Naturvidenskab;* Christiania, 1876-78-79. Le premier Chapitre traite des groupes de transformations d'une variété simplement étendue. Il s'agit du problème suivant : « Une série de transformations $x' = f(x, a_1, a_2, \ldots, a_r)$, où x' représente la variable primitive, x la nouvelle variable, et les a_i des paramètres, forme un groupe de transformations, quand la succession de deux transformations de la série est équivalente à une seule série de transformations. On veut, d'après cela, déterminer la fonction la plus générale f de x et des r paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_r$, qui satisfasse à une équation de condition de la forme

$$f[f(x, a_1, a_2, \ldots, a_r), b_1, b_2, \ldots, b_r] = f(x, c_1, c_2, \ldots, c_r),$$

où l'on suppose que les c_i ne dépendent que des a et des b_2 ». Le groupe est dit de $r =$ termes (r gliedrig), lorsque le nombre des paramètres ne peut pas être abaissé. Étant connu un groupe quelconque de r termes, on trouve facilement de nouveaux groupes de r termes. Soient, en effet, φ et Φ deux fonctions quelconques inverses l'une de l'autre; l'équation

$$x' = \Phi\{f[\varphi(x), a_1, \ldots, a_r]\}$$

déterminera encore un groupe de r termes. Ce groupe est dit *semblable* au premier; des groupes semblables, dans les recherches générales, doivent être, à un certain point, considérés comme identiques. Le résultat général de ces études est exprimé par ce théorème : *Tout groupe de transformations d'une variété simplement étendue est semblable à un groupe linéaire, et contient, par suite, trois paramètres au plus.*

Dans le deuxième Chapitre, relatif à la détermination de tous les groupes de transformations d'une variété doublement étendue, on établit d'abord que tout

groupe de r termes dont les transformations peuvent se correspondre deux à deux comme transformations inverses contient ∞^{r-1} transformations infinitésimales, qui sont caractéristiques pour le groupe.

D'après cela, l'étude des transformations infinitésimales est la voie qui conduira à la solution du problème général. On obtient d'abord les théorèmes suivants : *A une transformation infinitésimale déterminée appartiennent des séries de courbes $\varphi(x, y) = a$, en nombre illimité, qui restent invariantes; il en est de même aussi pour chaque groupe à deux termes. Au contraire, à un groupe à trois termes appartient une, et en générale une seule série invariante de courbes. Si un groupe de plus de trois transformations infinitésimales laisse invariante une série de courbes $\varphi = a$, φ devra être alors une intégrale commune d'une série d'équations différentielles.* Pour décider s'il existe une telle intégrale, il suffit de considérer les transformations infinitésimales indépendantes d'ordre zéro ou 1, dans le voisinage d'un point (x_0, y_0). Les transformations finies qui laissent invariante une série de courbes, puisqu'il s'agit ici des transformations d'une variété simplement infinie, se décomposent, en vertu des théorèmes trouvés dans le Chapitre Ier, en transformations qui laissent chaque courbe invariante, et en transformations qui transforment les courbes suivant un, deux ou trois paramètres. Ces transformations peuvent être complètement déterminées au moyen de la transformation infinitésimale qu'elles contiennent. Enfin, on détermine complètement tous les groupes qui ne laissent invariante aucune série de courbes $\varphi = a$, et l'on obtient alors un dénombrement de tous les groupes dans le plan. Finalement, l'auteur expose en peu de mots la manière de s'orienter relativement à la dépendance qui règne entre ses recherches, dont l'importance se rattache essentiellement au domaine des équations différentielles, et la théorie des substitutions de Galois, la théorie des groupes de C. Jordan, et les recherches générales sur la transformation des différentielles quadratiques étudiée par Riemann et Helmholtz.

Meissel. — Considérations sur la Géométrie de la sphère. (529-532).

Korteweg. — Sur la théorie des forces électriques. (533-536).

Court extrait, fait par l'auteur, de son Mémoire intitulé : *Allgemeine Theorie der ponderomotorische Kräften,* et publié dans les Mémoires de l'Académie royale des Sciences d'Amsterdam, pour l'année 1879.

Bachmann (*P.*). — Complément d'une étude de Dirichlet. (537-549).

Du Bois-Reymond (*P.*). — Sur le théorème $f'(x) = \lim \frac{f(x)}{x}$. (550).

Noether (*M.*). — Note sur une classe de déterminants symétriques. (551-555).

Voss (*A.*). — Interprétation géométrique de l'équation différentielle $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$. (556-559).

Voss (*A.*). — Sur l'étude de la surface des centres. (560-570).

La surface projective des centres d'une surface générale du $n^{\text{ième}}$ ordre $f = 0$ est la surface des foyers du système de rayons qui se compose des droites qui joignent les pôles Q des plans tangents de f par rapport à une surface du second degré $\varphi = 0$ avec leurs points de contact P. L'auteur détermine, par voie algébrique, les nombres suivants :

Ordre de la surface $= 2n(n-1)(2n-1)$;
Classe de la surface $= 2n(n^2-n-1)$;
Rang de la surface $= 6n(n-1)^2$;
Ordre de la courbe de rebroussement $= 2n(n-1)(11n-16)$;
Classe des plans paraboliques $= 2n(n-2)(8n-5)$.

Ces nombres suffisent pour déterminer aussi l'ordre de la courbe double, sa classe et l'ordre de la congruence des tangentes principales et des tangentes doubles.

Voss (*A.*). — Sur la théorie de la mesure de la courbure de Riemann. (571-576).

Bianchi (*L.*). — Sur les surfaces de courbure négative constante. (577-582).

Cantor (*G.*). — Sur la théorie des fonctions arithmologiques. (583-588). Ax. H.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (1).

Tome XCIII ; 1881, 4e trimestre.

N° 14 ; 3 octobre.

Tisserand. — Sur les déplacements séculaires des plans des orbites de trois planètes. (525).

Dans un Mémoire *Sur le mouvement des nœuds des orbites planétaires* (*Œuvres*, t. IV), Lagrange détermine les expressions analytiques, en fonction du temps, des angles que les plans des orbites de trois planètes font entre eux, mais sans déterminer les positions absolues des orbites. Cette seconde question a depuis été reprise par M. Radau et M. Hübner ; M. Tisserand parvient à l'expression des inclinaisons des trois orbites sur un plan fixe ; ces expressions contiennent deux intégrales elliptiques de troisième espèce, en outre du sinus d'amplitude qui figure dans les inclinaisons mutuelles.

(1) Voir *Bulletin*, V₂, 171.

Gyldén. — Sur une application nouvelle de l'équation de Lamé. (537).

Bigourdan (*G.*). — Observations de la comète *d* 1881 (Encke) et *e* 1881 (Barnard), faites à l'Observatoire de Paris. (540).

N° 15; 10 octobre.

Faye. — Sur le premier Volume des « Nouvelles Annales de l'Observatoire de Bruxelles ». (553).

Coggia. — Comète découverte par M. Denning, le 4 octobre 1881; observation faite à l'Observatoire de Marseille. (559).

N° 16; 17 octobre.

Instructions formulées par la Conférence internationale pour l'observation du passage de Vénus sur le Soleil. (569).

Bigourdan (*G.*). — Observations de la comète *b* 1881 (Tebbutt-Gould-Cruls), faites à l'Observatoire de Paris. (575).

Stephanos. — Sur une configuration remarquable de cercles dans l'espace. (578).

Les diverses sphères de l'espace, constituent un système linéaire

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 + \lambda_4 S_4 + \lambda_5 S_5 = 0.$$

On peut considérer comme coordonnées d'un cercle déterminé par deux sphères

$$\Sigma \lambda_i' S_i = 0, \quad \Sigma \lambda_j'' S_j = 0$$

les dix quantités

$$p_{ij} = \lambda_i' \lambda_j'' - \lambda_i'' \lambda_j',$$

liées entre elles par les cinq relations du type

$$p_{lm} p_{ki} + p_{mk} p_{li} + p_{kl} p_{mi} = 0.$$

M. Stephanos déduit de là qu'à tout système de quatre cercles de l'espace est attaché un cinquième dont les coordonnées sont composées linéairement avec les coordonnées correspondantes des quatre premiers. Exposant ensuite comment, étant donnés quatre cercles, on peut construire le cinquième cercle (formant avec les quatre premiers un *pentacycle*), il est amené à considérer une figure composée symétriquement de quinze cercles, pouvant être groupés en six pentacycles et situés trois à trois sur quinze sphères; dans une Communication postérieure (24 octobre), il développe les propriétés de cette figure.

Poincaré. — Sur les fonctions fuchsiennes. (581).

Sur un mode d'expression des fonctions fuchsiennes au moyen de séries.

Sur le genre de la relation algébrique qui a lieu entre deux fonctions fuchsiennes du même groupe.

N° 17; 24 octobre.

Clausius (R.). — Sur une détermination générale de la tension et du volume des vapeurs saturées. (619).

Stephanos. — Sur une configuration de quinze cercles et sur les congruences linéaires de cercles dans l'espace. (633).

Mathieu (É.). — Sur la théorie mathématique du mouvement vibratoire des cloches. (636).

N° 18; 31 octobre.

Stéphan. — Observations de la comète Cruls (comète *b* 1881) faites à l'Observatoire de Marseille. (656).

Bigourdan. — Observations des comètes *c* 1881 (Schaeberle), *d* 1881 (Encke), *e* 1881, *f* 1881 (Denning), faites à l'Observatoire de Paris. (657).

Bossert. — Éléments elliptiques de la comète *b* 1881. (659).

N° 19; 7 novembre.

Stéphan. — Observation de la comète *f* 1881 (Denning), faite à l'Observatoire de Marseille. (676).

Schulhof. — Éléments de la comète de Denning (1881 *f*).

Baillaud. — Sur une formule générale pour le développement de la partie principale de la fonction perturbatrice. (694).

Picard (É.). — Sur la réduction des intégrales abéliennes. (696).

Soient

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{x} \frac{Q(x, y)\,dx}{f'_y(x, y)}, \quad \int_{x_0}^{x} \frac{P(x, y)\,dx}{f'_y(x, y)}$$

deux intégrales abéliennes de première espèce relatives à la courbe

$$f(x, y) = 0,$$

dont le genre est d'ailleurs quelconque.

Supposons que ces intégrales n'aient l'une et l'autre que quatre périodes, et cela de telle manière que, ω_0, ω_1, ω_2, ω_3 et v_0, v_1, v_2, v_3 représentant quatre couples de périodes correspondantes convenablement choisies, tout autre système de périodes correspondantes ait la forme

$$m_0\omega_0 + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3,$$
$$m_0 v_0 + m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3,$$

où les m sont entiers; le système d'équations différentielles

$$0 = \frac{Q(x_1, y_1)}{f'_{y_1}(x_1, y_1)}dx_1 + \frac{Q(x_2, y_2)}{f'_{y_2}(x_2, y_2)}dx_2 + \frac{Q(x_3, y_3)}{f'_{y_3}(x_3, y_3)}dx_3,$$
$$0 = \frac{P(x_1, y_1)}{f'_{y_1}(x_1, y_1)}dx_1 + \frac{P(x_2, y_2)}{f'_{y_2}(x_2, y_2)}dx_2 + \frac{P(x_3, y_3)}{f'_{y_3}(x_3, y_3)}dx_3$$

a son intégrale générale algébrique.

Il résulte de là que, si l'on considère les équations

$$\int_a^{x_1}\frac{Q(x_1, y_1)}{f'_{y_1}(x_1, y_1)}dx_1 + \int_a^{x_2}\frac{Q(x_2, y_2)}{f'_{y_2}(x_2, y_2)}dx_2 = u,$$
$$\int_a^{x_1}\frac{P(x_1, y_1)}{f'_{y_1}(x_1, y_1)}dx_1 + \int_a^{x_2}\frac{P(x_2, y_2)}{f'_{y_2}(x_2, y_2)}dx_2 = v,$$

$x_1 + x_2$ et $x_1 x_2$ sont des racines d'équations algébriques dont les coefficients sont des fonctions uniformes de u et v.

S'occupant ensuite particulièrement des courbes du troisième genre, l'auteur indique un cas intéressant, où les coefficients de ces équations algébriques s'expriment au moyen des fonctions Θ de deux variables.

Appell. — Sur des équations différentielles linéaires dont les intégrales vérifient des relations de la forme

$$F[\varphi(x)] = \psi(x)F(x).$$

(699).

Soit une équation différentielle linéaire d'ordre n,

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + f_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + f_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + f_n(x)y = 0;$$

en posant $x = \varphi(t)$, $y = z\psi(t)$ et supposant les deux fonctions φ et ψ telles que l'équation transformée soit

$$\frac{d^n z}{dt^n} + f_1(t)\frac{d^{n-1}z}{dt^{n-1}} + \ldots + f_n(t)z = 0.$$

si l'équation (1) admet la solution $y = \Phi(x)$, elle admet aussi les solutions

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{\psi(x)}\,\Phi[\varphi(x)],$$

$$\Phi_2(x) = \frac{1}{\psi(x)}\,\Phi_1[\varphi(x)],$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Entre $n+1$ telles intégrales particulières existera une relation de la forme

$$\lambda_0\Phi_1(x) + \lambda_1\Phi_1(x) + \ldots + \lambda_n\Phi_n(x) = 0,$$

d'où il suit que, en posant

$$F(x) = \mu_0\Phi(x) + \ldots + \mu_{n-1}\Phi_{n-1}(x),$$

on pourra déterminer les μ de façon que $F(x)$ vérifie la relation

$$F[\varphi(x)] = A\,\psi(x)\,F(x),$$

A étant une constante.

Si maintenant on réduit l'équation proposée en faisant

$$y = F(x)\int_{x_0}^{x} \eta\,dx,$$

on vérifie que, si l'équation en η d'ordre $n+1$ admet une intégrale $\eta = \psi(x)$, elle admet aussi l'intégrale

$$\eta_1 = \varphi'(x)\,\psi[\varphi(x)],$$

en sorte qu'on pourra répéter les mêmes raisonnements sur cette équation.

Or M. Appell montre que ces circonstances, exceptionnelles en général, se présentent toujours pour les équations différentielles linéaires du second ordre. Si, en particulier, une telle équation est de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)\,y,$$

$f(x)$ désignant une fonction qui vérifie la relation

$$f\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right) = (\gamma x + \delta)^4 f(x),$$

où

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

cette équation différentielle admettra une solution $F(x)$ vérifiant l'équation

$$F\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right) = \frac{A}{\gamma x + \delta}\,F(x).$$

Gomes Teixeira. — Sur l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre. (702).

L'équation

$$A\frac{d^2 z}{dx\,dy} + B\frac{dz}{dy} + \psi\left(\frac{d^2 z}{dx^2}, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, x, y, z\right) = 0,$$

où A et B sont des fonctions de $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}$, peut être transformée dans une autre du même degré par rapport à $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Boussinesq. — Comment se transmet dans un solide isotrope (en équilibre) la pression exercée sur une très petite partie de sa surface. (703).

Lévy (L.). — Sur la possibilité de l'équilibre électrique. (706).

La démonstration classique du théorème fondamental de l'électrostatique, que *tout système de corps électrisés admet un état d'équilibre et un seul,* suppose essentiellement qu'un certain déterminant est toujours différent de zéro. M. Lévy comble cette lacune en démontrant le théorème suivant :

Tout déterminant dont tous les éléments sont positifs, sauf deux de la diagonale principale qui sont négatifs, est différent de zéro toutes les fois que la somme des éléments de chaque ligne horizontale est négative.

Lévy (M.). — Sur le rendement et la limite de l'opération du transport de la force par l'électricité. (709).

Gagarine. — Systèmes articulés assurant le mouvement rectiligne ou la courbure circulaire. (711).

L'auteur paraît ignorer les recherches publiées sur les systèmes articulés, et en particulier les solutions dans lesquelles on emploie cinq tiges seulement pour obtenir le mouvement rectiligne, et sept tiges seulement pour obtenir le mouvement d'une droite qui reste parallèle à elle-même, tous ses points décrivant des droites.

N° 20; 14 novembre.

Cruls. — Observations de la comète Schaeberle (e 1881), faites à l'Observatoire impérial de Rio-Janeiro. (777).

Callandreau. — Sur la théorie du mouvement des corps célestes. (779).

Halphen. — Sur certaines séries pour le développement des fonctions d'une variable. (781).

Soit

$$\lambda(\zeta) = \mathrm{A}e^{a\zeta} + \mathrm{B}e^{b\zeta} + \mathrm{C}e^{c\zeta} + \ldots,$$

A, B, C, ..., $a, b, c, \ldots$ étant des constantes, et prenons pour $\mathrm{P}_m(x)$ le coefficient du $(m+1)^{\text{ième}}$ terme dans le développement de $e^{\zeta x}\lambda(\zeta)$ suivant les puissances ascendantes de ζ. Il existe une classe de fonctions $f(x)$ pour lesquelles la série dont le terme général est

$$[\mathrm{A}f^{m}(a) + \mathrm{B}f^{m}(b) + \mathrm{C}f^{m}(c) + \ldots]\mathrm{P}_m(x)$$

représente la fonction $f(x)$ elle-même, si toutefois $\lambda(\zeta)$ n'a pas de racine nulle; au cas où $\lambda(\zeta)$ a la racine zéro, multiple d'ordre k, la série représenterait $f^{(k)}(x)$.

Les conditions sous lesquelles le développement s'applique sont indépendantes de x, en sorte que la fonction $f(x)$ est nécessairement synectique dans tout le plan.

Pour que la série s'applique à une fonction $f(x)$, il faut et il suffit : 1° qu'il existe une constante α telle que le produit $\alpha^m f^{(m)}(x)$, pour toute valeur finie de x, ne devienne pas infini avec m; 2° que les racines, autres que zéro, de la fonction $\lambda(\zeta)$ aient leur plus petit module ρ supérieur à celui de $\frac{1}{\alpha}$.

$P_m(x)$ ayant toujours le même sens, la série

$$F(x) = \mu_0 P_0 + \mu_1 P_1(x) + \mu_2 P_2(x) + \ldots,$$

où les μ sont des constantes, convergera quel que soit x, si la série

$$\mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \ldots$$

converge à l'intérieur d'un cercle de rayon supérieur à $\frac{1}{\rho}$.

S'il en est ainsi, la série

$$V(x) = \mu_0 + \mu_1 \frac{x}{1} + \mu_2 \frac{x^2}{1.2} + \ldots$$

est synectique dans tout le plan. La fonction $F(x)$ est une solution de l'équation

$$AF(a+x) + BF(b+x) + CF(c+x) + \ldots = V^{k}(x),$$

caractérisée par la propriété suivante : $\frac{F^{m}(x)}{\rho^m}$ a pour limite zéro avec $\frac{1}{m}$.

On a, en outre, cette conséquence

$$F(x+y) = P_0 V(y) + P_1(x) V'(y) + \ldots + P_k(x) V^{(k)}(y) + \ldots.$$

Boussinesq. — Égalité des abaissements moyens que produisent, chacune, aux points où est déposée l'autre, deux charges égales, arbitrairement distribuées, le long de deux circonférences concentriques, sur un sol horizontal, ou sur une plaque circulaire horizontale ayant même centre que ces circonférences et appuyée ou encastrée sur tout son contour. (783).

Lévy (M.). — Sur le rendement maximum dont sont susceptibles deux machines dynamo-électriques données, lorsqu'on les emploie au transport de la force. (785).

N° 21; 21 novembre.

Callandreau. — Éléments de l'orbite et éphémérides de la planète (217) Eudore. (831).

Halphen. — Sur certains développements en série. (832).

M. Halphen est parvenu, pour le développement de $f(x+y)$ suivant les dérivées d'une fonction quelconque, à la série suivante

(1) $$P_0 V(y) + P_1(x) V'(y) + P_2(x) V''(y) + \dots.$$

$P_m(x)$ est le coefficient du $(m+1)^{\text{ième}}$ terme dans le développement suivant les puissances croissantes de ζ de la fonction

$$\frac{e^{\zeta x}}{\int_b^c \theta(x) e^{\zeta x}\, dx},$$

et la fonction $\theta(x)$ doit être déterminée par la condition

$$\int_b^c \theta(x) f(x+y)\, dz = V(y);$$

les limites b et c sont des constantes à volonté.

Il est nécessaire d'ajouter que si, posant

$$T_\mu = \int_b^c \theta(x) x^\mu\, dx,$$

on avait zéro pour $T_0, T_1, T_2, \dots, T_{k-1}$, et que T_k fût différent de zéro, la série (1) représenterait $f^{(k)}(x+y)$, au lieu de $f(x+y)$.

Quant à la légitimité de ce développement, voici le résultat qu'énonce M. Halphen.

Supposons que la fonction

$$\varphi(\zeta) = \int_b^c e^{\zeta x} \theta(x)\, dx$$

soit synectique aux environs de $\zeta = 0$, et soit k l'ordre de multiplicité de la racine nulle pour cette fonction, k pouvant d'ailleurs être nul; soit aussi ρ le module minimum des valeurs de ζ, pour lesquelles $\zeta^k : \varphi(\zeta)$ cesse d'être synectique.

Dans ces conditions, formons le développement (1). Pour que ce développement représente $f^{(k)}(x+y)$, il faut et il suffit : 1° qu'il existe une constante α laissant $\alpha^m f^{(m)}(x)$ fini pour m infini; 2° que le module de α soit supérieur à $\frac{1}{\rho}$.

Le cas de ρ infini offre un intérêt particulier; l'énoncé suivant répond à un exemple de ce cas.

Soient les polynômes $P_m(x)$ ainsi définis, savoir :

$$\begin{aligned} P_m(x) &= \frac{1}{1.2\dots m}\left(\frac{d^m}{d\zeta^m} e^{\zeta x + (-1)^n a \zeta^{2n}}\right)_{\zeta=0} \\ &= \frac{x^m}{m!} + (-1)^n \frac{a}{1} \frac{x^{m-2n}}{(m-2n)!} + \frac{a^2}{2!} \frac{x^{m-4n}}{(m-4n)!} + \dots \\ &+ (-1)^{sn} \frac{a^s}{s!} \frac{x^{m-2sn}}{(m-2sn)!} + \dots \end{aligned}$$

Formons, avec une fonction $f(x)$, la série

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{m=\infty}(-1)^m \mathrm{P}_m(x)\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\, f(x)e^{-a\omega}\omega^m\cos\left(x\omega - \frac{m\pi}{2}\right).$$

Cette série représente $f(x)$ pour les valeurs réelles de x, sous les conditions suivantes : $f(x)$ doit être développable en série trigonométrique dans tout intervalle fini, et en outre être telle que les intégrales, formant les coefficients de la série, puissent être effectivement étendues, par rapport à x, jusqu'à $\pm\infty$.

Par exemple

$$\cos x = e^{-a}(\mathrm{P}_0 - \mathrm{P}_2 + \mathrm{P}_4 - \ldots),$$
$$\sin x = e^{-a}(\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_3 + \mathrm{P}_5 - \ldots).$$

Si l'on suppose que $f(x)$ est une fonction analytique, le résultat se complète ainsi.

Si, entre deux parallèles à l'axe des quantités réelles placées de part et d'autre de cet axe, la fonction f est synectique, elle est, dans cette étendue, représentée par la série précédente.

Si l'on prend $n = 1$, on tombe sur la série de M. Hermite.

Picard (E.). — Sur une courbe particulière du troisième genre et sur certaines fonctions uniformes de deux variables indépendantes. (835).

La considération des périodes d'un système d'intégrales abéliennes correspondant à la courbe

$$v^3 = u(u-1)(u-x)(u-y),$$

où u, v sont les coordonnées, conduit l'auteur à un exemple de fonctions de deux variables indépendantes se reproduisant par la substitution à u et v d'expressions linéaires convenables en nombre infini

$$\frac{m' + n'u + p'v}{m + nu + pv},\quad \frac{m'' + n''u + p''v}{m + nu + pv}.$$

Cet exemple même amène l'auteur à un procédé beaucoup plus général pour former de telles fonctions, ce que l'on pourra faire si les équations linéaires aux dérivées partielles

$$s = ap + bq + cz,$$
$$r = a_1 p + b_1 q + c_1 z,$$

où les a, b, c sont fonctions de x et y, ayant trois solutions communes linéairement indépendantes w, w', w''; les valeurs de x et y tirées des équations

$$\frac{w'}{w} = u,\quad \frac{w''}{w} = v$$

sont racines d'équations algébriques à coefficients uniformes, en u, v.

Pellet. — Méthode nouvelle pour la division du cercle. (838).

Mathieu. — Intégration des équations différentielles du mouvement vibratoire d'une cloche sphérique. (840).

Lévy (M.). — Applications numériques de la théorie du rendement maximum de deux machines dynamo-électriques employées au transport de la force. (842).

N° 22; 28 novembre.

Villarceau (Y.). — Nouvelle méthode pour annuler la flexion astronomique des lunettes. (886).

Bigourdan. — Observation de la nouvelle comète (*g* 1881), faite à l'Observatoire de Paris. (889).

Laguerre. — Sur les équations algébriques de la forme

$$\frac{A_0}{x-a_0}+\frac{A_1}{x-a_1}+\ldots+\frac{A_n}{x-a_n}=0.$$

(890).

Étant donnée une suite

$$A+B+C+D+\ldots,$$

l'auteur appelle nombre des *alternances* de cette suite le nombre de variations que présente la série des sommes partielles

$$A,\quad A+B,\quad A+B+C,\quad \ldots.$$

Ceci posé, on a la proportion suivante, ξ désignant un nombre entier arbitraire, compris entre a_{i-1} et a_i, de telle sorte que les nombres

$$\ldots,\quad a_{i-2},\quad a_{i-1},\quad \xi,\quad a_i,\quad a_{i+1},\quad \ldots$$

forment une suite croissante ou décroissante. Le nombre des racines de l'équation proposée, qui sont comprises entre ξ et a_i, est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$\frac{A_i}{\xi-a_i}+\frac{A_{i+1}}{\xi-a_{i+1}}+\ldots\ldots+\frac{A_{i-1}}{\xi-a_{i-1}};$$

si ces nombres sont différents, leur différence est un nombre pair.

Soient ξ et ξ' deux nombres arbitraires ne comprenant aucune des quantités $a_0, a_1, a_2, \ldots$, et tels que les nombres

$$\ldots,\quad a_{i-2},\quad a_{i-1},\quad \xi,\quad \xi',\quad a_i,\quad a_{i+1},\quad \ldots$$

forment une suite croissante ou décroissante.

Le nombre des racines de l'équation proposée comprises entre ξ et ξ' est au

plus égal au nombre des variations des termes de la suite

$$\frac{A_i}{\xi' - a_i} + \frac{A_{i-1}}{\xi' - a_{i-1}} + \frac{A_{i-2}}{\xi' - a_{i-2}} + \ldots + \frac{A_{i-1}}{\xi' - a_{i-1}},$$

$$\frac{A_i}{\xi - a_i} + \frac{A_{i-1}}{\xi' - a_{i-1}} + \frac{A_{i-2}}{\xi' - a_{i-2}} + \ldots + \frac{A_{i-1}}{\xi' - a_{i-1}},$$

$$\frac{A_i}{\xi - a_i} + \frac{A_{i-1}}{\xi - a_{i-1}} + \frac{A_{i-2}}{\xi' - a_{i-2}} + \ldots + \frac{A_{i-1}}{\xi' - a_{i-1}},$$

. . . .

$$\frac{A_i}{\xi - a_i} + \frac{A_{i-1}}{\xi - a_{i-1}} + \frac{A_{i-2}}{\xi - a_{i-2}} + \ldots + \frac{A_{i-1}}{\xi - a_{i-1}}.$$

Entre ξ et ξ′ la valeur du premier nombre de l'équation est comprise entre le plus grand et le plus petit nombre de cette suite.

Deprez (*M.*). — Distribution de l'énergie par l'électricité. (892).

N° 23; 5 décembre.

Mouchez. — Observations méridiennes des petites planètes et de la comète *b* de 1881, faites à l'Observatoire de Paris pendant le troisième trimestre de l'année 1881. (913).

Resal. — Sur la théorie des boulets ramés. (916).

Hermite. — Sur quelques applications de la théorie des fonctions elliptiques. (920).

Si l'on écrit l'équation de Lamé pour $n = 2$ sous la forme

$$D_x^2 y = (6k^2 \operatorname{sn}^2 x + 6k^2 \operatorname{sn}^2 a - 4 - 4k^2)y,$$

la solution est donnée par les formules

$$y = C D_x \frac{H(x - \omega)}{\Theta(x)} e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]x} + C' D_x \frac{H(x + \omega)}{\Theta(x)} e^{-\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]x},$$

et l'on a pour la détermination des constantes ω et λ les relations

$$\operatorname{sn}^2 \omega = \frac{\operatorname{sn}^4 a (2k^2 \operatorname{sn}^2 a - 1 - k^2)}{3k^2 \operatorname{sn}^4 a - 2(1 + k^2) \operatorname{sn}^2 a + 1},$$

$$\operatorname{cn}^2 \omega = \frac{\operatorname{cn}^4 a (2k^2 \operatorname{sn}^2 a - 1)}{3k^2 \operatorname{sn}^4 a - 2(1 + k^2) \operatorname{sn}^2 a + 1},$$

$$\operatorname{dn}^2 \omega = \frac{\operatorname{dn}^4 a (2 \operatorname{sn}^2 a - 1)}{3k^2 \operatorname{sn}^4 a - 2(1 + k^2) \operatorname{sn}^2 a + 1},$$

$$\lambda^2 = \frac{(2k^2 \operatorname{sn}^2 a - 1 - k^2)(2k^2 \operatorname{sn}^2 a - 1)(2 \operatorname{sn}^2 a - 1)}{3k^2 \operatorname{sn}^4 a - 2(1 + k^2) \operatorname{sn}^2 a + 1},$$

$$\lambda = \frac{\operatorname{sn} \omega \operatorname{cn} \omega \operatorname{dn} \omega}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 \omega}.$$

Après avoir rappelé ces résultats, l'auteur se propose d'examiner ce qui arrive quand la constante λ est nulle ou infinie.

On a $\lambda = 0$ si $\omega = 0$, K, $K + iK'$; on obtient alors aisément, suivant les cas, les solutions

$$y = D_x \operatorname{sn} x, \quad y = D_x \operatorname{cn} x, \quad y = D_x \operatorname{dn} x.$$

Soit maintenant le cas de λ infini : en désignant par α une solution de l'équation en a

$$3k^2 \operatorname{sn}^4 a - 2(1+k^2)\operatorname{sn}^2 a + 1 = 0,$$

l'auteur pose $a = \alpha + \eta$, $\omega = iK' + \varepsilon$, η et ε étant des infiniment petits; celle des formules précédentes qui donne $\operatorname{sn}^2\omega$ conduit au développement

$$\varepsilon^2 = p\eta + q\eta^2 + \ldots,$$

où p et q sont des constantes, et la dernière, qui donne λ, fournit de même le développement

$$\lambda = \frac{1}{\varepsilon} + \left(k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha - \frac{1-k^2}{3}\right)\varepsilon + \ldots.$$

L'équation

$$\frac{\Theta'(iK'+\varepsilon)}{\Theta(iK'+\varepsilon)} = \frac{H'(\varepsilon)}{H(\varepsilon)} - \frac{i\pi}{2K} = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{i\pi}{2K} + \left(\frac{J}{K} - \frac{1+k^2}{3}\right)\varepsilon + \ldots$$

donne ensuite

$$\lambda - \frac{\Theta'(iK'+\varepsilon)}{\Theta(iK'+\varepsilon)} = \frac{i\pi}{2K} + \left(k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha - \frac{J}{K}\right)\varepsilon + \ldots,$$

et il en résulte

$$\frac{H(x+\omega)}{\Theta(x)} e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]x} = i e^{\frac{K'}{iK}} \frac{\Theta(x+\varepsilon)}{\Theta(x)} e^{gx},$$

où

$$g = \frac{i\pi}{2K} + \left(k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha - \frac{J}{K}\right)x;$$

d'ailleurs

$$\frac{\Theta(x+\varepsilon)}{\Theta(x)} e^{gx} = 1 + \left|\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} + g\right|\varepsilon + \ldots.$$

On obtiendra donc la limite cherchée en remplaçant e par $\frac{e}{\varepsilon}$: la limite, pour $\varepsilon = 0$, de

$$\frac{1}{\varepsilon} D_x \left|\frac{\Theta(x+\varepsilon)}{\Theta(x)} e^{gx}\right|$$

sera

$$D_x \left|\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} + g\right| = k^2(\operatorname{sn}^2 \alpha - \operatorname{sn}^2 x)$$

où la constante $\operatorname{sn}^2 \alpha$ est déterminée par l'équation

$$3k^2 \operatorname{sn}^4 \alpha - 2(1+k^2)\operatorname{sn}^2 \alpha + 1 = 0.$$

Le pendule conique fournit une application intéressante de ces résultats : l'étude de son mouvement dépend, comme on sait, de l'intégration des équa-

tions

$$\frac{d^2x}{dt^2} + Nx = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + Ny = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + Nz = g, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

d'où l'on tire d'abord

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 2g(z + c), \quad y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = l,$$

puis

$$(x - iy)\left(\frac{dx}{dt} - i\frac{dy}{dt}\right) = -z\frac{dz}{dt} + il,$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2g(z + c)(1 - z^2) - l^2.$$

L'avant-dernière équation, divisée membre à membre avec l'équation

$$x^2 + y^2 = 1 - z^2,$$

conduit à la formule

$$x - iy = e^{-\int \frac{z\,dz - il\,dt}{1 - z^2}},$$

qui permet d'obtenir les expressions explicites de x et y données par M. Tissot (*Journal de M. Liouville*, t. XVII, p. 88). M. Hermite procède d'une manière différente : la formule $N = g(3z + 2c)$ conduit en effet, pour la détermination de $x + iy$, à l'équation

$$\frac{d^2(x + iy)}{dt^2} = -g(3z + 2c)(x + iy),$$

qui n'est autre qu'une équation de Lamé dans le cas de $n = 2$.

En posant en effet

$$2g(z + c)(1 - z^2) - l^2 = -2g(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma),$$

$$1 > \alpha > \gamma, \quad \alpha > 0, \quad -1 < \beta, \quad -1 < \gamma < 0,$$

$$k^2 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \gamma}, \quad n = \sqrt{\frac{g(\alpha - \gamma)}{2}},$$

$$u = n(t - t_0),$$

$$z = \alpha - (\alpha - \beta)\,\mathrm{sn}^2(u, k),$$

cette équation devient

$$D_u^2(x + iy) = \left(6k^2\,\mathrm{sn}^2 u - 2\frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha - \gamma}\right)(x + iy),$$

et la formule

$$x - iy = e^{-\int \frac{z\,dz - il\,dt}{1 - z^2}},$$

rapprochée de la solution générale de l'équation de Lamé, montre qu'on doit prendre

$$x + iy = A D_u \frac{H(\omega)\,H(u + \omega)}{\Theta(\omega)\,\Theta(u)}\,e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]u}$$

il reste à déterminer les constantes A, λ, ω; c'est ce que fait M. Hermite dans une Communication postérieure (26 décembre); on a d'abord les formules

$$\mathrm{sn}^2\omega = -\frac{\alpha^2(\beta+\gamma)}{\alpha-\beta},$$

$$\mathrm{cn}^2\omega = \frac{\beta^2(\alpha+\gamma)}{\alpha-\beta},$$

$$\mathrm{dn}^2\omega = \frac{\gamma^2(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta},$$

$$\lambda^2 = -\frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha-\gamma}.$$

On voit que $\mathrm{sn}^2\omega$, $\mathrm{dn}^2\omega$ sont positifs et que $\mathrm{cn}^2\omega$ est négatif; on est donc amené à faire

$$\omega = \pm K + iv;$$

une analyse plus approfondie montre qu'il est permis de prendre

$$\omega = +K + iv,$$

v étant compris entre $-K'$ et $+K'$ et déterminé par les expressions

$$\mathrm{sn}^2(v, k') = \frac{\beta^2(\gamma^2-\alpha^2)}{\alpha^2(\gamma^2-\beta^2)},$$

$$\mathrm{cn}^2(v, k') = \frac{\gamma^2(\beta^2-\alpha^2)}{\alpha^2(\beta^2-\gamma^2)},$$

$$\mathrm{dn}^2(v, k') = \frac{\beta-\alpha}{\alpha^2(\beta+\gamma)}.$$

On trouve ensuite

$$\lambda^2 = -\frac{l^2}{4n^2}.$$

Les quantités λ, v sont déterminées par ces formules au signe près; l'auteur établit qu'on doit prendre

$$\lambda = -\frac{il}{2n},$$

et que v aura le signe de l ou un signe contraire, suivant que la racine moyenne β sera positive ou négative. Quant à A, on devra prendre

$$A = (\alpha-\gamma)e^{i\varphi},$$

φ désignant un angle arbitraire.

Brioschi. — Sur la théorie des équations différentielles linéaires du second ordre. (941).

M. Kummer a démontré (*Journal de Crelle,* t. 15) que, étant données deux équations différentielles linéaires du second ordre,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + P\frac{dz}{dt} + Qz = 0.$$

en posant

$$y = \omega z$$

et en supposant t fonction de x, on a

$$(t)_x = \mathrm{T}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 - \mathrm{X},$$

où

$$(t)_x = \frac{t'''}{t'} - \frac{3}{2}\left(\frac{t''}{t'}\right)^2,$$

$$\mathrm{T} = \frac{d\mathrm{P}}{dt} + \frac{1}{2}\mathrm{P}^2 - 2\mathrm{Q}, \quad \mathrm{X} = \frac{dp}{dx} + \frac{1}{2}p^2 - 2q.$$

Si P et Q peuvent s'exprimer en t comme p, q en x, et que $y = \mathrm{F}(x)$ soit une intégrale de la première équation, $z = \mathrm{F}(t)$ sera pareillement une intégrale de la seconde équation, et l'on aura

$$\mathrm{F}(x) = \omega \mathrm{F}(t).$$

La théorie des fonctions hypergéométriques et elliptiques donnent des exemples de cette propriété des fonctions P, Q, p, q, dont le plus important est dû à Legendre : les recherches de MM. Schwarz, Klein, Cayley, Fuchs, Brioschi ont pour point de départ le système d'équations ci-dessus.

Tacchini. — Observations des taches et facules solaires, faites à l'Observatoire du Collège Romain pendant le troisième trimestre de 1881. (948).

Tacchini. — Sur le spectre de la comète d'Encke. (949).

Tacchini. — Sur la comète Wendell, *g* 1881. (949).

Duponchel. — Rectification et addition à une Note précédente concernant la courbe des taches solaires. (950).

Poincaré. — Sur les courbes définies par les équations différentielles. (951).

Dans un Mémoire inséré dans le *Journal de Mathématiques* (1881), et qui a été analysé dans le *Bulletin*, l'auteur a étudié les courbes définies par une équation différentielle

$$\frac{dx}{\mathrm{X}} = \frac{dy}{\mathrm{Y}}.$$

Il étend les résultats précédemment obtenus aux équations de la forme

$$\mathrm{F}\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

F étant un polynôme entier.

En posant

$$x = \varphi(\xi, \eta, \zeta), \quad y = \psi(\xi, \eta, \zeta), \quad \frac{dy}{dx} = \chi(\xi, \eta, \zeta),$$

où les φ sont des fonctions rationnelles, il en résultera, à cause de l'équation différentielle,

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Cette équation définit une surface, et l'équation différentielle définit certaines caractéristiques tracées sur cette surface. Si l'on suppose que cette surface se compose d'un certain nombre de nappes fermées, on aura pour une de ces nappes la relation

$$N + F - C = 2 - 2p,$$

où N, F, C sont les nombres de nœuds, de foyers et de cols (*voir* le Mémoire cité), et où p est le genre de la nappe, c'est-à-dire le nombre des cycles séparés que l'on peut tracer de cette nappe sans la séparer en deux régions distinctes.

Deprez. — Distribution de l'énergie par l'électricité. (952).

N° 24; 12 décembre.

Stephanos. — Sur les faisceaux de formes binaires ayant une même jacobienne. (994).

L'auteur présente à l'Académie un Mémoire, dans lequel il étudie les faisceaux de formes binaires ayant une même jacobienne par les seules ressources de l'Algèbre binaire.

Dans la première Partie, après une Introduction concernant les systèmes linéaires de formes binaires et les invariants et covariants de ces systèmes (*combinants* des formes binaires), il examine les relations qui ont lieu entre les formes d'un faisceau et sa jacobienne, ainsi que les relations qui existent entre deux faisceaux ayant une même jacobienne.

Dans la deuxième Partie, il étudie d'une manière détaillée le problème de la détermination des faisceaux de formes biquadratiques, ayant une jacobienne donnée, problème qui acquiert un intérêt particulier, par ce fait qu'on peut y ramener la recherche des substitutions linéaires qui font disparaître le second et l'avant-dernier terme d'une équation du dixième degré.

Laguerre. — Sur les équations de la forme

$$\sum \int_a^b e^{-zx} F(z)\, dz = 0.$$

(1000).

Une telle équation peut toujours se mettre sous la forme

$$\int_{b_0}^{b_0} e^{-zx} F_0(z)\, dz + \ldots + \int_{a_n}^{b_n} e^{-zx} F_n(z)\, dz = 0,$$

où les quantités $a_0, b_0, \ldots, a_n, b_n$ sont rangées par ordre de grandeur, ou sous la forme

$$\int_a^b e^{-zx} F(z)\, dz,$$

$F(z)$ étant une fonction discontinue qui s'annule dans des intervalles convenables.

Le nombre de ses racines positives est au plus égal au nombre des racines de l'équation

$$\int_{a_0}^{x} F(x)\,dx = 0,$$

qui sont comprises entre a_0 et a_n.

En supposant que les quantités F_0, F_1 se réduisent à des constantes, on a le théorème suivant :

Étant donnée l'équation

$$a_0 x^{\alpha_0} + a_1 x^{\alpha_1} + \ldots + a_n x^{\alpha_n} = 0,$$

où les nombres $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ vont en croissant, si l'on forme les quantites

$$p_0 = a_0, \quad p_1 = a_0 + a_1, \quad \ldots, \quad p_n = a_0 + \ldots + a_n,$$

le nombre des variations des termes de la suite

$$\begin{array}{l}
p_0(\alpha_1 - \alpha_0), \\
p_0(\alpha_1 - \alpha_0) + p_1(\alpha_2 - \alpha_1), \\
p_0(\alpha_1 - \alpha_0) + p_1(\alpha_2 - \alpha_1) + p_2(\alpha_3 - \alpha_2), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p_0(\alpha_1 - \alpha_0) + p_1(\alpha_2 - \alpha_1) + \ldots + p_{n-1}(\alpha_n - \alpha_{n-1}), \\
p_n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

est au plus égal au nombre des racines de l'équation proposée, qui sont supérieures à l'unité.

L'équation

$$A x^{\alpha} + B x^{\beta} + C x^{\gamma} + \ldots = 0,$$

où les exposants sont positifs, a, au plus, autant de racines positives que l'équation

$$\frac{A}{\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} + \frac{B}{\Gamma(\beta+1)} x^{\beta} + \frac{C}{\Gamma(\gamma+1)} x^{\gamma} + \ldots = 0.$$

L'équation

$$A + B x + C x^2 + D x^3 + \ldots = 0$$

a, au plus, autant de racines positives que l'équation

$$A + \frac{B}{1+\omega} x + \frac{C}{(1+\omega)(2+\omega)} x^2 + \ldots = 0,$$

ω étant une quantité positive quelconque.

On peut toujours déterminer une valeur de z telle que, pour cette valeur et les valeurs plus grandes, le nombre de variations que présente le développement de $f(x)e^{zx}$ suivant les puissances ascendantes de x soit exactement égal au nombre des racines positives de l'équation $f(x) = 0$, chacune de ces racines étant comptée avec son degré de multiplicité.

Halphen. — Sur une série d'Abel (1883).

Il s'agit de la série

$$f(x) = f(0) + xf'(\beta) + \frac{x(x-2\beta)}{2} f''(2\beta) + \dots$$
$$+ \frac{x(x-n\beta)^{n-1}}{2.3\dots n} f^{(n)}(n\beta) + \dots,$$

indiquée par Abel (t. II, p. 82).

Voici les conditions dans lesquelles cette formule est légitime :

Pour qu'il existe des quantités β rendant exacte cette formule, il faut et il suffit qu'il existe aussi des quantités α laissant fini le produit $\alpha^n f^{(n)}(x)$ quand n est infini.

Soit a le plus grand module des quantités α, et soit u la racine positive de $ue^{1+u} = 1$ ($u = 0{,}27\dots$); la formule est exacte pour les valeurs de β dont le module est moindre que le produit ua.

Soit p tout nombre compris entre 0 et n. Les produits $z^n e^p f^{(n)}(pz)$ restent finis, pour n infini, tant que le module de z reste inférieur à ua. Mais si z conserve un même argument ω et que son module croisse d'une manière continue au delà de ua, ces produits restent encore finis jusqu'à une autre limite $\varphi(\omega)$, dont la forme dépend de $f(x)$.

La condition nécessaire et suffisante à l'existence de la formule d'Abel consiste en ce que le point β soit à l'intérieur de la courbe $\rho = \varphi(\omega)$.

M. Halphen considère comme exemples les fonctions e^x, $e^{\lambda x}$. Un exemple curieux du cas où la série converge sans représenter la fonction est fourni par Abel lui-même à son insu. L'illustre géomètre l'applique en effet à la fonction $\log(1+x)$, et alors la série définit une transcendante nouvelle, tout autre que le logarithme, dont M. Halphen indique quelques propriétés intéressantes.

Appell et *Janaud*. — Remarques sur l'introduction de fonctions continues, n'ayant pas de dérivée, dans les éléments de la Mécanique. (1005).

Considérant, par exemple, une force discontinue dans tout intervalle, agissant sur un point mobile suivant une droite Ox et toujours dirigée suivant cette droite, les auteurs admettent que l'accroissement de vitesse pendant un intervalle de temps est au plus égal à celui qui se serait produit si la force avait constamment conservé sa plus grande valeur et au moins égal à celui qui se serait produit si la force avait constamment sa plus petite valeur : on en déduit la continuité de la vitesse; si la fonction $\varphi(t)$, qui représente la forme, est susceptible d'intégration, l'expression $\int_{t_0}^{t} \varphi(t)\,dt$ représente les variations de vitesse pendant l'intervalle de temps $t_0 = t$.

Réciproquement, si l'on se donne la vitesse $v = f(t)$, et si la fonction $f(t)$ admet une dérivée $\varphi(t)$ susceptible d'intégration, la force $F = \varphi(t)$ produira le mouvement considéré; mais on ne changera pas le mouvement en modifiant cette force pour un nombre limité et même pour une infinité de valeur de t.

Elliot. — Sur une classe de fonctions analogues aux fonctions Θ. (1008).

Soient $u^1, u^2, \dots, u^p$ les p intégrales normales de première espèce relatives à une équation $F(x, y) = 0$, w^k une intégrale normale de deuxième espèce.

$v^{(k)}$ une intégrale normale de troisième espèce. L'auteur apprend à former une fonction $\Theta\binom{q}{(r)}$ qui ne dépend de la variable x que par l'intermédiaire de p intégrales $u^{(i)}$, des q intégrales $v^{(k)}$, des r intégrales $w^{(h)}$ et qui est une fonction holomorphe de ces $p+q+r$ quantités considérées comme variables indépendantes, et il indique quelques propriétés de ces fonctions.

N° 25; 19 décembre.

Le Cordier (P.). — Recherches sur les lois fondamentales de l'électrodynamique. (1055).

Laguerre. — Sur l'introduction des logarithmes dans les critériums qui déterminent une limite supérieure du nombre des racines d'une équation qui sont comprises entre deux nombres donnés. (1061).

Considérons l'équation

$$A_0 F(a_0 x) + A_1 F(a_1 x) + \ldots + A_n F(a_n x) = 0,$$

où $F(x)$ désigne une fonction quelconque de x telle que, dans son développement, tous les coefficients soient positifs, et où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des quantités positives rangées par ordre de grandeur; si l'on pose

$$p_0 = A_0, \quad p_1 = A_0 + A_1, \quad p_2 = A_0 + A_1 + A_2, \ldots, \quad p_n = A_0 + A_1 + \ldots + A_n;$$

le nombre m des racines positives de cette équation est au plus égal au nombre de variations de la suite

$$p_0, \; p_1, \; p_2, \ldots, \; p_n,$$

ou de la suite

$$p_0 \log \frac{a_0}{a_1},$$

$$p_0 \log \frac{a_0}{a_1} + p_1 \log \frac{a_1}{a_2},$$

$$p_0 \log \frac{a_0}{a_1} + p_1 \log \frac{a_2}{a_1} + p_2 \log \frac{a_3}{a_2},$$

....

$$p_0 \log \frac{a_0}{a_1} + p_1 \log \frac{a_2}{a_1} + \ldots + p_{n-1} \log \frac{a_n}{a_{n-1}},$$

p_n. ....

Fuchs (L.). — Sur une équation différentielle de la forme

$$f\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0.$$

(1063).

La recherche du cas où les équations

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^m = F(u) = (u - a_1)^{\alpha_1}(u - a_2)^{\alpha_2} \ldots$$

s'intègrent par des fonctions uniformes et doublement périodiques a été complètement effectuée par MM. Briot et Bouquet. L'auteur montre comment la méthode exposée par M. Hermite, dans son *Cours d'Analyse*, pour intégrer les équations de la forme $f\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$, conduit aux résultats obtenus par MM. Briot et Bouquet.

Pellet. — Sur les fonctions irréductibles suivant un module premier. (1065).

Weill (M.). — Théorème d'Arithmétique. (1066).

N° 26; 26 décembre.

Hermite. — Sur quelques applications de la théorie des fonctions elliptiques. (1099).

Voir plus haut.

Bigourdan. — Éléments et éphémérides de la comète g 1881 (Swift). (1122).

Darboux. — Sur les différentielles successives des fonctions de plusieurs variables indépendantes. (1123).

Picard (É.). — Sur quelques exemples de réduction d'intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques. (1126).

Si l'on considère la courbe du second genre

$$y^2 = x(x-1)(x-a)^2,$$

l'intégrale de première espèce

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(1-m\lambda)(x-a)-(1-m\lambda^2)y}{y^2}\,dx,$$

où

$$\lambda = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3},$$

et où m est un nombre réel et commensurable, n'a que deux périodes.

Il en est de même de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} \frac{b^{\frac{1}{4}}(m+i) + (m-i)x^2}{\sqrt{x^8+ax^4+b}},$$

relative à la courbe du troisième genre

$$y^2 = x^8 + ax^4 + b,$$

en supposant m commensurable.

THE QUARTERLY JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS (¹).

Tome XVI; 1879.

Cayley. — Sur la cinématique du plan. (1-8).

Un plan variable se meut sur un plan fixe. Chaque point du plan variable décrit une courbe sur le plan fixe; chaque courbe de ce plan a une enveloppe sur le plan fixe. Réciproquement chaque point du plan fixe trace sur le plan variable une courbe et chaque courbe de ce plan fixe donne lieu à une enveloppe sur le plan variable. Enfin, le mouvement relatif peut être produit par le roulement d'une courbe du plan variable sur une courbe du plan fixe. M. Cayley reprend la théorie analytique de cette question et en fait l'application au cas le plus simple.

Muir (*Th.*). — Sur le développement de l'expression

$$(x+y)^n + (-x)^n + (-y)^n.$$

(9-14).

Cet article se relie à celui de M. Glaisher sur le théorème, dû à Cauchy, que $(x+y)^n - x^n - y^n$ est divisible par $x^2 + xy + y^2$ si n est de la forme $6m \pm 1$ et par $(x^2+xy+y^2)^2$ si n est de la forme $6m+1$.

L'auteur se propose de généraliser cette proposition et il obtient en particulier le théorème suivant :

Posons

$$\beta = x^2 + xy + y^2,$$
$$\gamma = xy^2 + x^2y.$$

L'expression $(x+y)^n + (-x)^n + (-y)^n$ *n'est divisible ni par* β *ni par* γ *si* $n = 6p$; *elle est divisible par* $\beta^2\gamma$ *si* $n = 6p+1$, *par* β *si* $n = 6p+2$, *par* γ *si* $n = 6p+3$, *par* β^2 *si* $n = 6p+4$, *par* $\beta\gamma$ *si* $n = 6p+5$.

Considérant de même le polynôme

$$(x+y+z)^{2m+1} - x^{2m+1} - y^{2m+1} - z^{2m+1},$$

M. Muir montre qu'il est toujours divisible par

$$\frac{1}{3}\left[(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3\right].$$

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur un déterminant de forme spéciale sur certaines fonctions de n variables analogues au sinus et au cosinus. (15-33).

Ce Mémoire peut être considéré comme la suite d'un travail précédent : « Sur les facteurs d'une forme spéciale de déterminant » inséré au t. XV, p. 347-356

(¹) Voir *Bulletin*, II_2, 137.

du *Quarterly Journal*. L'auteur y considère les n fonctions

$$\Phi_0(x) = 1 + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$$

$$\Phi_1(x) = x + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Phi_{n-1}(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots,$$

et il en montre l'analogie avec le sinus et le cosinus hyperboliques, les formules d'addition, les relations différentielles, la généralisation de la formule de Moivre, etc.

Mais il faut remarquer qu'elles ne donnent pas la véritable généralisation du sinus et du cosinus. Il faudrait avoir n fonctions de $n-1$ variables liées par une seule relation. M. Glaisher rappelle que ces n fonctions ont été en effet obtenues par M. Appell dans un intéressant Mémoire publié en 1877 dans les *Comptes rendus* et il reprend, en les développant, les résultats de ce travail.

Tanner (H.-W.-Lloyd). — Sur certaines fonctions analogues au Pfaffian. (34-45).

Considérons n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de n variables $x_1, \ldots, x_n$. Si l'on forme le déterminant

$$\begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

et que l'on suppose que, dans chaque terme, les différentiations portent sur la partie qui les suit, alors, si le déterminant se termine par une ligne

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \quad \ldots \quad \frac{\partial}{\partial x_n},$$

il indique une opération que l'auteur désigne par le symbole $\{1, 2, \ldots, n\}$; si, au contraire, le déterminant se termine par une ligne

$$y_1, y_2, \ldots, y_n,$$

il acquiert un sens quantitatif; mais on peut le transformer en un opérateur si on multiplie la dernière ligne par une fonction u. On désigne cette opération par le symbole $[1, 2, \ldots, n]$. L'auteur développe différentes propriétés relatives à ces deux symboles, dont nous venons de faire connaître la définition.

Tanner (H.-W.-Lloyd). — Sur la transformation d'une expression différentielle linéaire. (45-64).

Dans ce Mémoire, l'auteur considère l'expression différentielle

$$y_1\,dx_1 + \ldots + y_n\,dx_n,$$

où $y_1, \ldots, y_n$ sont des fonctions de $x_1, \ldots, x_n$, et il donne les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle puisse être ramenée à l'une des formes canoniques

$$du_1 + v_2\,du_2 + \ldots + v_r\,du_r,$$
$$v_1\,du_1 + \ldots + v_r\,du_r.$$

La méthode suivie par l'auteur repose sur la considération de certains déterminants symboliques dont l'étude fait l'objet du présent Mémoire.

Jeffery (*H.-M.*). — Sur les courbes planes de troisième classe à trois foyers singuliers. (65-81).

Continuation des études de l'auteur publiées dans le Volume précédent. Dans les articles antérieurs, l'auteur avait classé les cubiques de troisième classe qui ont un triple ou un double foyer. Il traite maintenant le cas de trois foyers simples et effectue la classification d'après la position de ces trois foyers relativement à la droite de l'infini. Pour chaque position des trois foyers, M. Jeffery donne l'équation de la courbe en coordonnées tangentielles. Il discute en détail les différents cas et examine en particulier ce qui concerne les tangentes doubles.

Coates (*C.-V.*). — Sur le mouvement tourbillonnaire à l'intérieur et à l'extérieur d'un cylindre elliptique. Seconde Partie. (81-88).

L'auteur étend les résultats connus relativement à un cylindre circulaire au cas d'un cylindre elliptique. Il emploie pour cela les coordonnées elliptiques qu'il substitue aux coordonnées polaires employées dans le cas du cylindre circulaire. La difficulté de la question consiste dans la discontinuité qui se présente pour le cas du mouvement à l'intérieur. L'auteur surmonte cette difficulté en employant des fonctions et il montre que, même aux foyers, les vitesses demeurent finies et continues.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur le théorème de Cauchy relatif aux facteurs de $(x+y)^n - x^n - y^n$. (89-98).

Extension des résultats déjà donnés par l'auteur et par M. Muir. L'auteur démontre différentes identités et en fait des applications.

Jeffery (*H.-M.*). — Sur la classification des courbes planes du troisième ordre. (98-109).

Ces courbes ont déjà été classées par Plücker d'après la nature de leurs asymptotes et par M. Cayley [*On the classification of cubic curves* (*Cambridge Phil. Trans.*, 1866)].

L'auteur se propose de compléter ces recherches en cherchant l'enveloppe de la droite satellite (droite passant par les points de rencontre des asymptotes et de la courbe), quand les cubiques sont assujetties à des conditions déterminées. En particulier, l'enveloppe de cette droite est déterminée quand, les asymptotes restant fixes, la cubique est assujettie à avoir un rebroussement.

Cayley (*A.*). — Note sur la théorie des surfaces apsidales. (109-112).

L'illustre géomètre donne un système de formules analytiques qui permet d'établir d'une manière réellement simple que les surfaces apsidales de deux surfaces polaires réciproques sont elles-mêmes polaires réciproques.

Hicks (*W.-M.*). — Sur le mouvement de deux cylindres dans un fluide. (113-140 et 193-219).

L'auteur suppose que les axes des deux cylindres sont indéfinis et demeurent toujours parallèles, que le mouvement est le même dans tous les plans perpendiculaires à ces axes; en sorte que le problème dépend de deux dimensions seulement et, au lieu des cylindres, on peut prendre les cercles qui leur servent de base. Il s'agit d'abord de déterminer le potentiel des vitesses du fluide incompressible dans lequel se meuvent les deux cercles. Cette détermination s'effectue sans difficulté, si l'on prend des coordonnées curvilignes correspondantes au système formé de cercles orthogonaux; on est alors ramené à un problème antérieurement traité par l'auteur. L'auteur discute d'abord le cas où les deux cercles se touchent; puis il examine et développe en détail tout ce qui concerne le cas général.

Townsend (*R.*). — Sur l'équation de M. Jellett dans la théorie du potentiel et sur son application à la détermination de l'attraction d'un disque circulaire, quand l'attraction est en raison inverse d'une puissance quelconque de la distance. (140-151).

La proposition de M. Jellett, dont l'auteur fait usage, est la suivante :

Soit, pour k variables $x, y, z, \ldots,$

$$\Delta\varphi = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \ldots,$$

et soit

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + \ldots;$$

alors

$$V_n = \Sigma\mu\,\frac{r^{n+1}}{n+1}$$

peut être appelé le potentiel des points (a, b, c) de masses μ dans un espace à k dimensions, quand l'attraction est proportionnelle à la $n^{\text{ième}}$ puissance de r.

L'équation de M. Jellet est

$$\Delta V_n = (n+1)(n+k-1)V_{n-2}.$$

Ce théorème élégant conduit l'auteur à une solution simple de la question proposée.

Lewis (*T.-C.*). — Application de la Géométrie à quatre dimensions à la détermination, sans aucune intégration, des moments d'inertie des solides. (152-159).

L'auteur considère successivement le tétraèdre, le parallélépipède et l'ellipsoïde.

Roberts (*S.*). — Sur l'impossibilité d'une extension générale du théorème d'Euler sur le produit de deux sommes de quatre carrés au produit de deux sommes de 2^n carrés, où n est plus grand que 3. (159-170).

Il s'agit ici d'une question très intéressante et sur laquelle ont été émises les opinions les plus contradictoires. On sait, depuis Euler, que le produit d'une somme de quatre carrés par une somme de quatre carrés est encore une somme de quatre carrés. Ce théorème a été généralisé par Lagrange, qui a substitué à la forme $x^2+y^2+z^2+t^2$ la suivante : $x^2+ay^2+bz^2+abt^2$. On a reconnu également que le produit d'une somme de huit carrés par une somme de huit carrés est encore une somme de huit carrés, ce qui a porté quelques personnes à penser que le théorème d'Euler peut s'étendre aux sommes composées de 2^m carrés, m étant quelconque. L'induction était séduisante, le théorème étant démontré pour toutes les valeurs de m inférieures à 4. Cependant elle est inexacte et M. Roberts montre qu'il est impossible de généraliser le procédé qui réussit dans les cas que nous venons d'indiquer.

L'étude de cette question est d'autant plus importante qu'elle joue un rôle essentiel dans toutes les équations relatives à la généralisation de la méthode des quaternions.

Coates (*C.-V.*). — Sur le vortex annulaire. (170-178).

L'auteur considère un filet tourbillonnaire de petite section. On a à développer une intégrale elliptique complète de première et de seconde espèce dont le module est très voisin de 1. L'auteur effectue ce développement en conservant seulement les termes qui sont proportionnels au carré du module complémentaire, et il compare les résultats ainsi obtenus avec ceux que l'on connaît relativement au mouvement d'un filet tourbillonnaire rectiligne.

Cayley (*A.*). — Application de la méthode de Newton-Fourier aux racines imaginaires d'une équation. (179-186).

M. Cayley considère l'équation du second degré

$$x^2=n^2,$$

et il cherche quelle est la condition pour que, en partant d'une valeur approchée x_0 et en appliquant la méthode de Newton, on s'approche indéfiniment de l'une des racines. La solution de cette question est fournie par la relation

$$\frac{x_p-n}{x_p+n}=\left(\frac{x_{p-1}-n}{x_{p-1}+n}\right)^2,$$

qui existe entre deux valeurs approchées consécutives.

Sharp (*H.-C.-J.*). — Sur les courbes du troisième ordre. (186-192).

Démonstrations élémentaires de quelques propriétés fondamentales des cu

biques par l'emploi de l'équation réduite

$$ax^3 + 3c_1xz^2 + cz^3 + 3b_3y^2z = 0.$$

Warren (*J.-W.*). — Sur une forme particulière de la formule de Gauss, donnant la mesure de la courbure. (219-224).

La courbure k peut être mise sous la forme

$$Bk = \frac{d^2\omega}{dp\,dq} + \frac{dP}{dq} + \frac{dQ}{dp},$$

où ω est l'angle sous lequel se coupent les courbes $p = c$, $q = c'$.

Cayley (*A.*). — Sur une formule covariante. (224-226).

M. Cayley remarque que, si l'on considère la formule de Newton

$$x_1 = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

on a

$$x_1 - a = \frac{(x - a)f'(x) - f(x)}{f'(x)}.$$

Le numérateur de cette expression admet la racine double $x = a$ et par conséquent le discriminant de l'expression

$$(x - x_1)f'(x) - f(x)$$

contiendra $f(x_1)$ en facteur. Cela le conduit à considérer le covariant

$$(\xi y - \eta x)\left(\alpha\frac{d}{d\xi} + \beta\frac{d}{d\eta}\right)f(\xi, \eta) - (\alpha y - \beta x)f(\xi, \eta),$$

dont le discriminant par rapport à ξ, η est une fonction d'ordre $2n - 2$, soit en x, y, soit en α, β. Ce discriminant contiendra $f(x, y)$ en facteur, et il restera un polynôme du degré $n - 2$ en x, y, $2n - 2$ en α, β, et $2n - 3$ par rapport aux coefficients de $f(\xi, \eta)$. M. Cayley vérifie ces résultats dans les cas les plus simples, où f est du second et du troisième degré.

Greenhill (*A.-G.*). — Mouvement d'un fluide compris entre des cylindres elliptiques confocaux et entre des ellipsoïdes homofocaux. (227-256).

Un fluide est compris entre deux cylindres elliptiques indéfinis confocaux. L'un des deux cylindres commence à se déplacer soit parallèlement à l'un des axes de la section droite, soit à tourner autour de l'axe commun, pendant que l'autre reste fixe. L'auteur détermine le potentiel des vitesses relatif au mouvement initial du fluide. La solution a exactement la même forme que dans le problème connu du mouvement d'un seul cylindre dans un fluide indéfini. L'auteur examine ensuite le même problème dans le cas du mouvement simultané des deux cylindres. Il résout des questions analogues relativement à deux ellipsoïdes confocaux. En terminant, il discute très en détail, par le moyen des fonctions elliptiques, le mouvement d'un ellipsoïde de révolution allongé ou aplati dans un fluide indéfini.

Glaisher (J.-W.-L.). — Sur certains théorèmes symboliques du professeur Crofton. (227-256).

Ces théorèmes concernent certains opérateurs exponentiels.

Rappelons les notations $D = \frac{d}{dx}$, $\exp. u = e^u$, on aura

$$\exp.\left(\frac{1}{2}a^2D^2\right)f(x) = \exp.\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}\right)F(a^2D).\exp.\left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}\right),$$

$$\exp.\left(\frac{1}{2}x^2\right)\exp.\left(\frac{1}{2}D^2\right)\exp.\left(\frac{1}{2}x^2\right)F(x)$$

$$= \exp.\left(\frac{1}{2}D^2\right)\exp.\left(\frac{1}{2}x^2\right)\exp.\left(\frac{1}{2}D^2\right)F(x),$$

$$\exp.\left(-\frac{1}{2}x^2\right)f(D)\exp.\left(\frac{1}{2}x^2\right)F(x) = \exp.\left(\frac{1}{2}D^2\right)f(x)\exp.\left(-\frac{1}{2}D^2\right)F(x),$$

$$\exp.\left(\frac{1}{2}a^2D^2\right)\exp.\left(\frac{1}{2}b^2x^2\right)F(x)$$

$$= \frac{1}{(1-a^2b^2)^{\frac{1}{2}}}\exp.\left(\frac{\frac{1}{2}b^2x^2}{1-a^2b^2}\right)\exp.\left[\frac{1}{2}a^2(1-a^2b^2)D^2\right]F\left(\frac{x}{1-a^2b^2}\right)$$

$$= \frac{1}{(1-a^2b^2)^{\frac{1}{2}}}\exp.\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}\right)F(a^2D)\exp.\left[\frac{\frac{1}{2}x^2}{a^2(1-a^2b^2)}\right],$$

$$\varphi\left(\frac{d}{dD}\right)f(D)F(x) = \varphi(x-x')f(D)F(x).$$

Dans le développement de cette dernière formule x' désigne x précédant l'opérateur $f(D)$ et x désigne cette variable suivant l'opérateur.

Glaisher (J.-W.-L.). — Sur certains théorèmes symboliques dérivés de la série de Lagrange. (263-268).

Cet article contient différentes formules symboliques dont quelques-unes avaient été déjà données par M. Cayley.

Cayley (A.). — Note sur une série hypergéométrique. (268-270).

Vérification de ce résultat de M. Schwarz : l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\frac{2}{3} - \frac{7}{6}x}{x(1-x)}\frac{dy}{dx} + \frac{\frac{1}{48}}{x(1-x)}y = 0,$$

admet l'intégrale algébrique

$$y^{[illegible]} = \sqrt{\alpha - \alpha^{[illegible]}x}^{\,[illegible]} + \sqrt{\alpha^{[illegible]} - \alpha x}^{\,[illegible]},$$

α étant une racine de l'équation $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$.

Stearn (H.-T.). — Sur les couches tourbillonnaires. (271-278).

Un fluide a ses particules animées d'un mouvement de rotation à l'intérieur d'un cylindre infiniment mince de rayon a, de telle manière qu'un mouvement tourbillonnaire est dirigé suivant l'axe de ce cylindre, pendant que le cylindre est entouré extérieurement de fluide en repos. Le fluide en repos et le fluide en mouvement sont séparés par une cloison infiniment mince. L'auteur recherche quel effet l'éloignement brusque de cette enveloppe a sur le mouvement du fluide en repos.

Pour que ce fluide demeure encore en repos, il faut remplacer la cloison solide par une couche infiniment mince de filets tourbillonnaires. Si $2r$ est l'épaisseur de cette couche, la surface cylindrique doit tourner avec une vitesse déterminée $\frac{K}{2a^2}$ autour de l'axe, pendant que ses génératrices tournent sur elles-mêmes avec la vitesse $-\frac{K}{2ar}$, a désignant le rayon du cylindre. Une telle couche de filets tourbillonnaires a donc pour effet de supprimer, comme la cloison, tout effet de tourbillon central sur le liquide qui l'environne. L'auteur termine en généralisant ces résultats.

Townsend (*R.*). — Sur le moment d'inertie d'un anneau circulaire solide engendré par la révolution d'une courbe à centre fermée. (279-280).

L'auteur fait connaître une proposition générale sur ces moments.

Cayley (*A.*). — Sur la fonction octaédrique. (280-281).

Il s'agit de la fonction U du sixième ordre considérée par M. Klein et qui est caractérisée par cette propriété que le covariant $(UU)^4$ est identiquement nul.

Supposant que, par une substitution linéaire, U ait été débarrassé de ses termes extrêmes, M. Cayley montre comment cette condition fera connaître U.

Cayley (*A.*). — Sur certaines identités algébriques. (281-282).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur un lieu géométrique relatif à l'ellipsoïde. (283-294).

Le lieu des milieux des cordes de longueur constante dans l'ellipse est une courbe du quatrième ordre. Pour l'ellipsoïde, ce lieu se compose d'une portion de l'espace comprise entre les nappes d'une surface du sixième ordre. C'est l'étude de cette surface qui est l'objet principal du Mémoire de M. Glaisher. L'auteur en trouve différentes équations, il en étudie la forme, les sections par les plans principaux, etc.

Greenhill (*A.-G.*). — Sur l'équation de Riccati et l'équation de Bessel. (294-298).

L'équation de Riccati

$$\frac{du}{dx} + bu^2 = cx^m,$$

qui, comme on sait, se transforme par la substitution

$$u = \frac{1}{bv}\frac{dv}{dx},$$

dans l'équation linéaire

$$\frac{d^2w}{dx^2} = bcx^m w,$$

se transforme encore, si l'on pose

$$\frac{4bc}{(m+2)^2} = -k^2, \quad \frac{1}{m+2} = n, \quad w = y\sqrt{x}, \quad x^{m+2} = r^2,$$

dans l'équation

$$r^2\frac{d^2y}{dr^2} + r\frac{dy}{dr} + (k^2r^2 - n^2)y = 0,$$

à laquelle satisfait la fonction de Bessel $j_n(kr)$. La condition que la série qui détermine j_n soit limitée équivaut, en ce qui concerne l'équation de Riccati, à la condition bien connue $m = -\frac{4i}{2i+1}$, où i désigne un nombre entier quelconque.

De la même manière, l'équation plus générale

$$x^2w'' + axw' + (bx^m + c)w = 0$$

peut se ramener à l'équation de Bessel, et la condition pour qu'elle soit intégrable en termes finis se traduit par la condition

$$m = \pm\frac{2}{2i \pm 1}\sqrt{(a-1)^2 - 4c}.$$

Sharp (W.-J.-C.). — Sur les cubiques planes. (298-305).

Suite du Mémoire signalé plus haut; étude des invariants et des covariants; analogie de cette théorie et de celle des quartiques binaires, etc.

Hill (J.-M.). — Du mouvement permanent de l'électricité dans un courant laminaire sphérique. (306-323).

L'écoulement de l'électricité dans les surfaces d'épaisseur très petite et partout la même a déjà été traité par divers auteurs. M. Hill forme d'abord l'équation fondamentale du potentiel pour le cas d'une couche sphérique mince; si l'on détermine un point par sa longitude φ et sa latitude χ, l'équation du potentiel sera, dans le cas d'un courant constant,

$$\frac{d^2V}{d\varphi^2} + \cos\chi\frac{d}{d\chi}\left(\cos\chi\frac{dV}{d\chi}\right) = 0,$$

ou, en posant $\psi = \log\frac{1+\sin\chi}{\cos\chi}$,

$$\frac{d^2V}{d\varphi^2} + \frac{d^2V}{d\psi^2} = 0.$$

Cette équation sert de base aux recherches ultérieures de l'auteur.

Crofton. — Théorèmes relatifs au calcul des opérations. (323-329).

L'auteur part des équations données par Boole

$$f[D + \varphi'(x)]V = \exp.[-\varphi(x)]f(D)\exp.\varphi(x)V,$$
$$f[x - \varphi'(D)]V = \exp.[\varphi(D)]f(x)\exp.[-\varphi(D)]V,$$

et en déduit seize autres formules semblables, dont quelques-unes ont été aussi données par Boole et M. Glaisher.

Glaisher (J.-W.-L.). — Addition au Mémoire « Un Théorème de Trigonométrie. » (329-337).

Le théorème auquel se reporte l'auteur est le suivant : si l'on a

$$\left(1 + \frac{ix}{a}\right)\left(1 + \frac{ix}{b}\right)\cdots = A + iB,$$

on a aussi

$$\text{arc tang}\,\frac{x}{a} + \text{arc tang}\,\frac{x}{b} + \ldots = \text{arc tang}\,\frac{B}{A}.$$

M. Glaisher indique de nouvelles applications de cette proposition. Nous citerons par exemple les suivantes :

$$\text{arc tang}\,\frac{2q\cos 2x}{1-q^2} + \text{arc tang}\,\frac{2q^3\cos 2x}{1-q^6} + \text{arc tang}\,\frac{2q^5\cos 2x}{1-q^{10}}$$
$$= \text{arc tang}\,\frac{2q\cos 2x + 2q^9\cos 6x + \ldots}{1 + 2q^4\cos 4x + 2q^{16}\cos 8x + \ldots}$$
$$= \frac{1}{2}\,\text{arc tang}\,\frac{\dfrac{4q\cos 2x}{1-q^2} - \dfrac{4q^3\cos 6x}{1-q^6} + \ldots}{1 - \dfrac{4q^2\cos 4x}{1-q^4} + \ldots}.$$

Lewis (T.-C.). — Sur les images des tourbillons par rapport à une sphère. (338-347).

On donne un filet tourbillonnaire circulaire et une sphère dont le centre se trouve sur l'axe du filet. On doit déterminer un second filet circulaire de même axe par la condition que sous l'action des deux filets la vitesse du liquide à la surface de la sphère soit tangente à la sphère. On trouve que le second filet doit être l'image du premier, par rapport à la sphère. L'auteur traite ensuite la même question en supposant l'existence de plusieurs filets circulaires, et il montre que la solution n'est possible que si ces filets sont sur une même sphère concentrique à la sphère donnée. M. Lewis est ainsi conduit à étudier le mouvement d'un filet circulaire à l'intérieur d'une sphère fixe. Il termine en donnant quelques résultats approchés, obtenus par le développement en série des formules connues.

Jeffery (H.-M.). — Sur les cubiques planes de la troisième classe à trois foyers singuliers. (348-374).

Dans le Mémoire antérieur, l'auteur avait considéré les cas où un ou plusieurs foyers sont à l'infini, ceux où un ou plusieurs foyers se confondent en un foyer multiple; il examine maintenant l'hypothèse dans laquelle ils sont distincts et

forment soit un triangle équilatéral, soit un triangle isoscèle, soit un triangle scalène. A la considération des foyers, l'auteur joint celle du point satellite ou point de concours des trois tangentes menées des trois foyers à la courbe.

Pearson (*K.*). — Sur la déformation d'une sphère solide élastique. (375-381).

On doit rechercher la forme que prend une sphère élastique sous l'action de forces agissant normalement sur la surface et variant d'un point à un autre. L'auteur montre que le problème inverse peut aussi être résolu, et il fait deux applications intéressantes de ses formules.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur une formule de la théorie des fonctions elliptiques. (382-383).

L'auteur donne des expressions de

$$\mathrm{cn}^2(u+v)\,\mathrm{cn}^2(u-v), \quad \mathrm{dn}^2(u+v)\,\mathrm{dn}^2(u-v).$$

ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA, diretti dal prof. FRANCESCO BRIOSCHI [1].

2e Série. — Tome IX; 1878-1879.

Pepin. — Sur les équations différentielles linéaires du second ordre. (1-10).

Rectifications de quelques résultats contenus à la fin du Mémoire de l'auteur, inséré dans les *Annali di Matematica* (t. V, p. 185).

Brioschi. — Sur une classe d'équations différentielles linéaires du second ordre. (11-20).

Les recherches que nous résumons ci-après peuvent être regardées comme la suite de celles qui sont contenues dans la lettre à M. Klein, publiée dans les *Mathematische Annalen* (t. XI, p. 401) sous ce titre : *La théorie des formes dans l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre.*

Partant de l'équation différentielle du second ordre

$$(1) \qquad y'' + py' + qy = 0,$$

désignant par $f(y_1, y_2)$ une forme binaire d'ordre m, et regardant dans cette forme y_1 et y_2 comme des solutions particulières de l'équation (1), on pourra poser

$$f(y_1, y_2) = F(x);$$

---

[1] Voir *Bulletin*, II$_2$, 9.

un calcul facile, fondé sur l'identité bien connue

$$y_2 y'_1 - y_1 y'_2 = Ce^{-\int p\,dx},$$

conduit à la relation

$$(2)\quad h(y_1, y_2) = \frac{e^{\int p\,dx}}{m^2(m-1)C^2}[m\mathrm{FF}'' - (m-1)\mathrm{F}'^2 + mp\mathrm{FF}' + m^2 q\mathrm{F}^2],$$

où

$$h(y_1, y_2) = f_{11}f_{22} - f_{12}^2$$

est la hessienne de la forme f. En désignant ensuite par $\mathrm{P}(x)$ le second membre de l'équation (2) et par $\theta(y_1, y_2)$ le covariant d'ordre $3(m-2)$

$$\theta(y_1, y_2) = 2(f_1 h_2 - f_2 h_1),$$

on parvient à la relation

$$(3)\quad \theta(y_1, y_2) = \frac{e^{\int p\,dx}}{m(m-2)C}[2(m-2)\mathrm{F}'(x)\mathrm{P}(x) - m\mathrm{P}'(x)\mathrm{F}(x)].$$

Si l'on pose

$$z = y_1 y_2,$$

et que l'on prenne $f = z^r$, puis que l'on suppose

$$p = \frac{1}{2}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \quad q = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

où $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sont des polynômes entiers en x de degrés $s, s-2$, la relation (3) donnera

$$(4)\quad \begin{cases} 2\varphi[3r(r-1)\mathrm{FF}'\mathrm{F}'' - (r-1)(2r-1)\mathrm{F}'^2 - r^2\mathrm{F}^2\mathrm{F}'''] \\ \quad + 3r\mathrm{F}\varphi'[(r-1)\mathrm{F}'^2 - r\mathrm{FF}''] - r^2(\varphi'' + 8\psi)\mathrm{F}^2\mathrm{F}' - 4r^3\psi'\mathrm{F}^3 = 0, \end{cases}$$

équation qui, pour $r = 1$, se réduit à

$$(5)\qquad 2\varphi\mathrm{F}''' + 3\varphi'\mathrm{F}'' + (\varphi'' + 8\psi)\mathrm{F}' + 4\psi'\mathrm{F} = 0.$$

Or une première remarque essentielle relative à cette équation consiste en ce qu'elle peut être vérifiée, si l'on choisit convenablement le polynôme $\psi(x)$, en remplaçant $\mathrm{F}(x)$ par un polynôme en x du degré n; ce qui se voit immédiatement en comptant les équations qui résultent de l'hypothèse que le polynôme $\mathrm{F}(x)$ vérifie l'équation et le nombre des coefficients arbitraires dont on dispose : s'il en est ainsi, on aura, sous forme d'un polynôme, le produit $\mathrm{F}(x)$ de deux solutions y_1, y_2 de l'équation (1), et l'équation

$$y_1 y'_2 - y_2 y'_1 = Ce^{-\int p\,dx}$$

permettra d'effectuer l'intégration.

En prenant

$$\varphi(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3, \quad \psi(x) = \alpha x + \beta,$$

et posant ensuite

$$x - e_1 = (e_2 - e_1)\,\mathrm{sn}^2 u,$$
$$x - e_2 = (e_1 - e_2)\,\mathrm{cn}^2 u,$$
$$x - e_3 = (e_1 - e_3)\,\mathrm{dn}^2 u,$$

où

$$k^2 = \frac{e_2 - e_1}{e_3 - e_1},$$

et où e_1, e_2, e_3 sont les racines du polynôme $\varphi(x)$, M. Brioschi montre que l'équation (1) revient à l'équation de Lamé

$$\frac{d^2y}{du^2} = [\,n(n+1)k^2\,\mathrm{sn}^2 u + h\,].$$

Un examen analogue de l'équation (4) conduit maintenant à ce résultat : En prenant pour $\varphi(x)$ le même polynôme, et pour $\psi(x)$ une expression de la forme $\alpha x + \beta$, où α, β sont des coefficients convenables, on peut faire en sorte que le produit

$$y_1^2 y_2^2 = \mathrm{F}(x)$$

soit un polynôme qui vérifie l'équation (4), et ce polynôme est de la forme

$$\mathrm{F}(x) = (x - \xi)\,\mathrm{P}^2,$$

où ξ est une racine de $\varphi(x)$ et P un polynôme en x à coefficients convenables.

On parvient ainsi, pour l'équation (1), à la forme

$$\frac{d^2y}{du^2} = \left[\frac{n(n+2)}{4}k^2\,\mathrm{sn}^2 u + h\right]y,$$

et cela par le même changement de variables que précédemment. Cette équation se réduit à celle de Lamé pour n pair, et pour n impair il suit de ce qui précède que le produit $y_1 y_2$ peut se mettre sous la forme

$$y_1 y_2 = \mathrm{P}(\mathrm{sn}^2 u)\,\mathrm{sn}\,u\,;$$

M. Brioschi montre que les intégrales exprimées en x sont algébriques.

Le cas de $n = 1$ est particulièrement intéressant : l'équation différentielle prend alors la forme

$$y'' + \frac{1}{2}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}y' - \frac{3}{4}\frac{x}{\varphi(x)}y = 0\,;$$

les intégrales y_1, y_2 rendent alors égale à la constante $4C^2$ la forme biquadratique

$$f(y_1, y_2) = \tau_{12}y_1^4 - 6\xi y_1^2 y_2^2 + \tau_{11}y_2^4,$$

où

$$\tau_{11} = 3\xi - \sqrt{\varphi'(\xi)}, \quad \tau_{12} = 3\xi + \sqrt{\varphi'(\xi)},$$

et dont les invariants sont g_2 et g_3.

Puis l'équation (2) donne

$$h(y_1 y_2) = 4C^2 x.$$

L'équation étudiée contient comme cas particulier (pour $g_2 = 0$) l'équation hypergéométrique du tétraèdre

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{6}\frac{4 - 7z}{z(1 - z)}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{144}\frac{1}{z(1 - z)}y = 0,$$

rencontrée par M. Schwarz dans son Mémoire sur la série hypergéométrique.

Enfin considérons l'équation

$$y'' + \frac{1}{2}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}y' + \frac{\alpha t(x) + \beta}{\varphi(x)}y = 0,$$

où la fonction $\varphi(x)$ et les constantes α, β ont la même signification que précédemment, et où $t(x)$ vérifie l'équation

$$\frac{dt}{\sqrt{\Phi(t)}} = \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}},$$

en posant

$$\Phi(t) = 4t^3 - G_2 t - G_3.$$

M. Brioschi montre que l'équation différentielle se transforme dans l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}\frac{dy}{dt} + \frac{\alpha t + \beta}{\Phi(t)}y = 0,$$

qui appartient à la classe considérée.

Hermite. — Sur l'équation de Lamé. (21-24).

M. Hermite était parvenu, de son côté, à l'équation différentielle du troisième ordre, que vérifie le produit de deux solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre.

Partant de l'équation du second ordre

$$(1) \qquad 2Ay'' + A'y' = By,$$

on parvient à l'équation du troisième ordre

$$(2) \qquad 2Az''' + 3A'z'' + A''z' = 4Bz' + 2B'z,$$

et, en faisant dans l'équation de Lamé

$$t = \operatorname{sn}^2 x,$$

on aura pour transformée l'équation (1), où

$$A = t(1-t)(1-k^2t),$$
$$2B = n(n+1)k^2t + h.$$

L'équation (2) admet comme solution un polynôme $F(t)$ de degré n; cette remarque et l'égalité

$$y_2\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dy_2}{dt} = \frac{C}{\sqrt{A}}$$

conduisent à l'intégrale générale

$$(3) \qquad y = Ge^{\frac{1}{2}\int\left[\frac{F'(t)}{F(t)} + \frac{C}{\sqrt{A}F(t)}\right]dt} + G'e^{\frac{1}{2}\int\left[\frac{F'(t)}{F(t)} - \frac{C}{\sqrt{A}F(t)}\right]dt},$$

où G, G′ sont des constantes arbitraires.

Maintenant, l'équation (2) conduit aisément à l'équation

$$(4) \qquad A(2zz'' - z'^2) + A'zz' - 2Bz^2 = N,$$

où N est une constante, et l'on trouve que cette constante est liée à C par la

relation

$$C = \sqrt{N};$$

lorsque N est différent de zéro, le polynôme $F(t)$ n'a que des racines simples en désignant par τ l'une de ses racines et faisant

$$\frac{1}{F(t)} = \sum \frac{1}{F'(\tau)(t-\tau)},$$

$$T = X(\tau),$$

l'équation (4) donne

$$TF'^2(\tau) = N,$$

d'où

$$\frac{\sqrt{N}}{F(t)} = \sum \frac{\sqrt{T}}{t-\tau};$$

si maintenant l'on fait $t = \operatorname{sn}^2 x$, $\tau = \operatorname{sn}^2 \omega$, en prenant

$$\sqrt{T} = \operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega,$$

on effectuera sans difficulté les quadratures qui figurent dans l'équation (3), et l'on trouvera pour les deux parties de l'intégrale générale

$$\frac{H(x-\omega_1)H(x-\omega_2)\ldots H(x-\omega)}{\Theta^n(x)} e^{x\sum \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}},$$

$$\frac{H(x-\omega_1)H(x-\omega_2)\ldots H(x-\omega)}{\Theta^n(x)} e^{-x\sum \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}},$$

où $\omega_1, \ldots, \omega_n$ sont les diverses valeurs de ω.

Fuchs. — Sur une classe d'équations différentielles qui s'intègrent au moyen des fonctions abéliennes ou elliptiques. (25-34).

M. Fuchs a donné, dans un Mémoire inséré dans le t. LXXXI du *Journal de Borchardt,* les résultats suivants :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$\frac{d^2y}{dz^2} = Py$$

admette une intégrale de la forme

$$y = \varphi(z)^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{\frac{-\lambda}{4}}\int \frac{dz}{\varphi(z)}},$$

où $\varphi(z)^2$ est une fonction rationnelle de z et λ une constante, consiste en ce que P ait la forme

$$P = \frac{1}{4}\left(\frac{d\log\varphi}{dz}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{d^2\log\varphi}{dz^2} - \frac{\lambda}{4\varphi^2}.$$

Si λ est différent de zéro, l'équation admet deux intégrales de cette forme qui ne diffèrent que par le signe du radical qui figure en exposant : ces deux intégrales forment un système fondamental y_1, y_2; si $\lambda = 0$, un tel système est donné par les formules

$$y_1 = \varphi(z)^{\frac{1}{2}}, \quad y_2 = \varphi(z)^{\frac{1}{2}} \int \frac{dz}{\varphi(z)}.$$

P est infini en même temps que $\varphi(z)$; pour une racine b de $\varphi(z)$, P n'est infini que si l'on a

$$\varphi'(b)^2 = -\lambda.$$

Considérons maintenant l'équation

$$(1) \qquad R(z)\frac{d^2u}{dz^2} - \frac{1}{2}R'(z)\frac{du}{dz} + H(z)u = 0,$$

où $R(z)$, $H(z)$ sont des polynômes entiers en z de degrés m et $m-2$, et où $R(z)$ n'a que des racines simples; on la ramènera au type considéré par la substitution

$$u = R(z)^{\frac{1}{4}}y,$$

et on posera

$$\varphi = GR^{\frac{1}{2}};$$

en ayant égard à ce que, pour les différents points singuliers de l'équation différentielle (1), l'équation déterminante admet les racines o, $\frac{1}{2}$, on voit que cette équation (1) admettra une intégrale de la forme

$$u = G^{\frac{1}{2}}e^{\sqrt{-\frac{\lambda}{4}}\int\frac{dz}{G\sqrt{R}}},$$

dans le cas (et seulement dans le cas) où G est un polynôme entier en z tel que, pour chacun de ces zéros b, on ait

$$G'(b)^2R(b) = -\lambda,$$

et où

$$H(z) = \left[-\frac{1}{4}\left(\frac{d\log G}{dz}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{d^2\log G}{dz^2} - \frac{1}{4}\frac{d\log G}{dz}\frac{d\log R}{dz} + \frac{\lambda}{4G^2R}\right]R.$$

Si λ est différent de zéro, $G(z)$ n'a pas de racines doubles, ni de racines communes à $R(z)$; si $\lambda = 0$, le zéro b est double ou simple selon que $R(b)$ est différent de zéro ou nul; dans le premier cas, on a

$$\frac{G'''(b)}{G''(b)} = -\frac{3}{2}\frac{R'(b)}{R(b)};$$

enfin, si $\lambda = 0$, $\sqrt{G}$ satisfait à l'équation (1), sous les conditions précédentes, $G(z)$ vérifie l'équation

$$(2) \qquad R\frac{d^3w}{dz^3} + \frac{3}{2}R'\frac{d^2w}{dz^2} + \left(\frac{1}{2}R'' + 4H\right)\frac{dw}{dz} + 2H'w = 0.$$

L'auteur déduit de là le moyen de déterminer les coefficients de H, qui s'expriment tous en fonction de l'un d'eux; dans le cas où $\sqrt{G}$ doit satisfaire à l'équation (1), aux équations qui déterminent les coefficients de H s'adjoint une équation exprimant que G est divisible par un facteur carré : on obtient ainsi, pour ce cas, une équation algébrique que doit vérifier le coefficient restant.

Si G n'a pas de racines doubles ni de racines communes à R, λ est différent de zéro, et l'on a le système fondamental d'intégrales de l'équation (1)

$$u_1 = G^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\int\frac{dz}{G\sqrt{R}}}, \quad u_2 = G^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\int\frac{dz}{G\sqrt{R}}};$$

$\int \frac{dz}{G\sqrt{R}}$ est une intégrale abélienne de troisième espèce; en introduisant les fonctions abéliennes, x_1 et x_2 s'expriment au moyen de fonctions θ à ρ arguments, en supposant $m = 2\rho + 1$, ou $2\rho + 2$.

Laissant de côté le cas de $\lambda = 0$, M. Fuchs passe à l'examen de l'équation de Lamé

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]y;$$

la substitution

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{R(z)}, \quad R(z) = (1 - z^2)(1 - k^2z^2)$$

permet de lui donner la forme

$$(3) \qquad R(z)\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{2}R'(z)\frac{du}{dz} - [n(n+1)k^2z^2 + h]u = 0;$$

c'est un cas particulier de l'équation (1); pour toute valeur de h, il existe alors une fonction $G(z)$ entière en z^2, du degré $2n$ en z, qui vérifie l'équation (2); l'application de la méthode précédemment décrite fournit ensuite l'expression de l'intégrale générale sous une forme équivalente à celle qu'a donnée M. Hermite.

Dans le cas exceptionnel qui a été signalé plus haut, en général, l'équation (3) doit admettre une intégrale de l'une des formes

$$F_{00}, \quad F_{10}\sqrt{1 - z^2}, \quad F_{01}\sqrt{1 - k^2z^2}, \quad F_{11}\sqrt{R(z)},$$

où $F_{\alpha\beta}$ est un polynôme en z du degré $n - \alpha - \beta$; l'auteur apprend alors à former l'équation algébrique

$$\varphi(h) = 0,$$

que doit vérifier h; c'est, au fond, l'équation donnée par Lamé et Heine, pour l'existence de solutions entières; l'examen des différents cas conduit encore l'auteur, de la façon la plus simple, aux résultats de M. Hermite.

Geiser. — Sur la théorie des courbes planes du quatrième ordre. (35-40).

Ce postulatum de la théorie des courbes algébriques, « la hessienne de la courbe générale du $n^{\text{ième}}$ ordre n'admet ni point double ni point de rebroussement », n'a été démontré que pour les courbes du troisième degré (Clebsch, *Vorles. üb. Geom.*, p. 361); M. Geiser établit qu'il est vrai pour la courbe du quatrième degré; sa démonstration se relie à la recherche des conditions sous lesquelles l'équation homogène d'une courbe du quatrième degré peut être, par une substitution linéaire, ramenée à la forme

$$x_1^4 + ux_1^2 + v = 0,$$

u et v étant des formes du deuxième et du quatrième degré en x_2, x_3, x_4; si cette réduction est possible, la hessienne admet un point double non situé sur la courbe, et réciproquement.

Casorati. — Recherches sur les équations algébrico-différentielles. (41-53).

Considérant une équation de la forme

$$f(\Omega) = a\Omega^m + b\Omega^{m-1} + c\Omega^{m-2} + \ldots + s\Omega + t = 0,$$

où $a, b, c, \ldots, s, t$ sont des fonctions entières de degré n des deux variables u et v, en éliminant Ω entre cette équation et l'équation différentielle

$$da\,\Omega^m + db\,\Omega^{m-1} + \ldots + dt = 0,$$

on est conduit à une équation de la forme

$$\mathrm{F} = \mathrm{A}\,du^m + \mathrm{B}\,du^{m-1}dv + \ldots + \mathrm{T}\,dv^m = 0.$$

A, B, ..., T sont des fonctions entières de u et v, dont le degré est en général $m(2n-1)$. Mais cette équation différentielle, tout en restant du degré m par rapport aux différentielles, relativement aux variables u, v, peut s'abaisser à un moindre degré; une telle réduction peut provenir de la suppression de facteurs communs à tous les coefficients A, B, ..., T; elle peut aussi provenir de ce que, dans ces mêmes coefficients, les termes de plus haut degré en u, v disparaissent; M. Casorati donne les conditions pour que cette circonstance se présente.

Henneberg. — Détermination de la classe minimum des surfaces minima algébriques. (54-57; all.).

Voir *Bulletin*, IV_1, 385.

Henneberg. — Sur les oscillations infiniment petites d'un fil dont une extrémité est fixe, dont l'autre extrémité porte un poids, sous l'influence de la pesanteur et d'une percussion initiale. (58-67; all.).

L'auteur examine successivement le cas où la masse du fil est quelconque et celle où elle est très petite; il montre que, dans ce dernier cas, la masse du fil tend à augmenter la durée des oscillations.

Halphen. — Sur les lignes singulières des surfaces algébriques. (68-105; fr.).

Voici le résumé que l'auteur donne lui-même au début de son Mémoire :

« Aux environs d'un point singulier, une courbe algébrique peut être envisagée comme la superposition de plusieurs courbes élémentaires distinctes, dont l'ordonnée de chacune est représentée par un développement en série. Ces courbes élémentaires, nommées par M. Cayley *branches superlinéaires*, je les appelle, pour abréger, des *cycles*.... Dans beaucoup de problèmes, chaque cycle est suffisamment caractérisé par deux nombres entiers n, ν, que l'on peut appeler l'*ordre* et la *classe* de ce cycle. Le premier est l'ordre de multiplicité du point simgulier sur le cycle; quant au second, il est ainsi défini : le quotient $\frac{\nu}{n}$ est l'ordre commun de contact de chaque branche du cycle avec sa tangente au point singulier. Les nombres n, ν suffisent notamment à déterminer leurs analogues pour une figure corrélative : ce sont les mêmes nombres en ordre inverse.

» On ne manquera pas de remarquer qu'un point simple d'une courbe est un cas particulier d'un point singulier ainsi envisagé.

» Sur une surface S, considérons à la fois une ligne (a), une section plane arbitraire (S) et un point de rencontre a de ces deux lignes.

» La surface S, aux environs du point a, est caractérisée dans une certaine mesure par l'ordre et la classe de chacun des cycles en lesquels (S) se décompose au point a. Quels éléments faut-il connaître en outre pour pouvoir trouver les nombres analogues et relatifs à une surface corrélative de S? Telle est la question qui s'offre tout d'abord. Les résultats suivants fournissent la réponse.

» 1. Aux environs d'une courbe algébrique (a) tracée sur une surface algébrique S, cette surface est la superposition de surfaces élémentaires dont chacune jouit de la propriété suivante : au point de rencontre avec (a), une section plane faite arbitrairement dans une surface élémentaire se compose d'un seul cycle. Je donne aux surfaces élémentaires le nom de *cycles de nappes*. L'ordre n et la classe ν du cycle unique que possède, en un point de rencontre avec (a), une section plane de cette surface élémentaire, je les appelle l'*ordre* et la *classe du cycle des nappes*. J'appelle (a) la *ligne origine* du cycle.

» 2. En chaque point de la ligne-origine, toutes les nappes d'un même cycle ont un même plan tangent, qui contient la tangente de la ligne-origine.

» 3. Ce plan tangent peut être constant le long de la ligne-origine, ou bien variable. Dans le premier cas, la ligne est plane, et il y correspond, dans une figure corrélative, un point singulier. Dans le second cas, il y correspond une ligne. C'est à ce dernier cas que se rapporte tout ce qui suit.

» 4. La classe ν d'un cycle de nappes (dont le plan tangent est variable) est égale ou inférieure à l'ordre n de ce cycle.

» 5. Quand la classe est égale à l'ordre, la théorie de l'indicatrice est applicable.

» 6. Tout cycle de nappes a pour corrélatif un cycle de nappes. Les classes de deux cycles corrélatifs sont égales.

» 7. Tout cycle de nappes dont l'ordre égale la classe, et dont l'indicatrice n'est pas parabolique en chaque point de la ligne-origine, a pour corrélatif un cycle du même ordre que le proposé.

» Pour les autres cas, il est nécessaire de distinguer trois groupes principaux et des sous-groupes.

» 8. *Groupe* A. Le plan tangent en chaque point de la ligne-origine n'est pas osculateur de cette ligne.

» *Sous-groupe* $A_1(\nu, \nu)$. Cette notation indique que l'ordre et la classe sont égaux à ν, mais avec cette particularité que l'indicatrice est parabolique en chaque point de la ligne-origine. En chaque point de cette ligne, une droite unique a, avec chaque nappe, un contact d'ordre supérieur au premier; soit $1 + \lambda$ cet ordre.

» *Sous-groupe* $A'_1(n, \nu)$, $n > \nu$.

» Un cycle A_1, défini par les nombres ν, λ a pour corrélatif un cycle A'_1, défini par les nombres $n = (1 + \lambda)\nu$ et ν.

» Réciproquement un cycle $A'_1(n, \nu)$ a pour corrélatif un cycle $A_1(\nu_1, \nu)$ pour lequel $\lambda = \frac{n - \nu}{2}$.

» 9. *Groupe* B. Le plan tangent en chaque point de la ligne-origine est osculateur de cette ligne.

» *Sous-groupe* $B_1(n, \nu)$, $\nu < \frac{n}{2}$.

» *Sous-groupe* $B'_1(2\nu, \nu)$, avec cette particularité que la tangente de la ligne-origine a, avec chaque nappe, un contact d'ordre supérieur à 2; soit $2 + \theta$ l'ordre de ce contact.

» *Sous-groupe* $B_2(2\nu, \nu)$, avec cette circonstance que l'ordre de ce dernier contact est égal à 2.

» *Sous-groupe* $B_3(n, \nu)$, $\nu > \frac{n}{2}$.

» Un cycle $B_1(n, \nu)$ a pour corrélatif un cycle $B'_1(2\nu, \nu)$, avec $\theta = \frac{n - 2\nu}{2\nu}$. Réciproquement, un cycle $B'_1(2\nu, \nu)$ défini, en outre, par le nombre θ a pour corrélatif un cycle $B_1(n, \nu)$, avec $n = 2(1 + \theta)\nu$.

» Un cycle $B_2(2\nu, \nu)$ a pour corrélatif un cycle $B_2(2\nu, \nu)$.

» Un cycle $B_3(n, \nu)$ a pour corrélatif un cycle $B_3(n, \nu)$.

» 10. *Groupe* C. La ligne-origine est droite.

» Un pareil cycle (n, ν) a pour corrélatif un cycle de même définition (n, ν).

» La question indiquée plus haut se trouve résolue par l'ensemble des résultats dont je viens de donner le tableau synoptique. Je consacre une seconde Partie de ce Mémoire à montrer qu'entre les éléments précédemment définis et relatifs aux diverses lignes singulières d'une même surface les éléments analogues et relatifs aux lignes le long desquelles le plan tangent est constant, et entre le degré et le rang de la surface, il existe une relation. Cette relation, je la forme dans toute sa généralité. C'est celle qui fournit le degré du lieu des points à indicatrice parabolique sur une surface à singularités quelconques.

» Enfin je termine ce Mémoire par quelques applications aux surfaces de révolution et aux surfaces gauches.

» Les éléments si simples et si peu nombreux, que j'ai été conduit à envisager ici suffisent à caractériser les lignes singulières dans une catégorie importante de questions. Par exemple, ils suffisent pour traiter, dans toute sa généralité, le problème de *trouver le degré du lieu des points qui, sur une surface algébrique, satisfont à une équation algébrique aux dérivées partielles du second ordre*. Cette nouvelle question fera l'objet d'un autre Mémoire.

» En terminant ce préambule, je dois signaler à l'attention du lecteur les recherches antérieures de M. Zeuthen sur le même sujet, principalement celles dont les résultats sont contenus dans son Mémoire : *Sur une classe de points singuliers de surfaces* (*Mathematische Annalen*, t. IX). »

Casorati. — Recherches sur les équations algébrico-différentielles (suite et fin). (106-118).

Kiepert. — Sur la résolution de l'équation du cinquième degré. (119-123; all.).

Si 2ω, $2\omega'$ constituent un couple de périodes de la fonction pu (Weierstrass

définie par l'équation

$$p'^2 u = 4p^3 u - g_2 pu - g_3,$$

et si l'on pose

$$f = \frac{1}{p\left(\frac{2\omega}{5}\right) - p\left(\frac{4\omega}{5}\right)},$$

$$f_r = \frac{1}{p\left(\frac{2\omega' - 16r\omega}{5}\right) - p\left(\frac{4\omega' + 32r\omega}{5}\right)},$$

les quantités f et f_r ($r = 0, 1, 2, 3, 4$) sont racines de l'équation du 12ᵉ degré

$$f^{12} + \frac{10}{\Delta} f^6 - \frac{12 g_2}{\Delta^2} + \frac{5}{\Delta^2} = 0,$$

où

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2.$$

Ces quantités f, f_r peuvent aussi se calculer par les formules

$$f = h^{\frac{1}{3}} \Delta^{-\frac{1}{6}} \sqrt{5} \prod_{\nu} \left(\frac{1 - h^{10\nu}}{1 - h^{2\nu}} \right),$$

$$f_r = - \varepsilon^{2r} h^{-\frac{1}{15}} \Delta^{-\frac{1}{6}} \prod_{\nu} \left(\frac{1 - h^{\frac{2\nu}{5}} \varepsilon^{8r\nu}}{1 - h^{2\nu}} \right),$$

où $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ et où $h = e^{\frac{\omega' \pi i}{\omega}}$ est connue quand on connaît l'invariant $\frac{g_2^3}{\Delta}$,

En posant

$$y_r = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} [(f^2 - f_r^2)(f_{r+2}^2 - f_{r+3}^2)(f_{r+4}^2 - f_{r+1}^2)]^{\frac{1}{2}}.$$

les y sont les racines de l'équation du cinquième degré

$$\Delta^3 y^5 + 10 \Delta^2 y^3 + 45 \Delta y - 216 g_3 = 0.$$

Or cette équation se ramène à l'équation générale du cinquième degré

$$x^5 + A x^4 + B x^3 + C x^2 + D x + E = 0$$

par la substitution

$$x^2 - ux + v = -\frac{\alpha + \beta y}{3 + \Delta y^2};$$

les quantités u, v, α, β^2, $\frac{g_2^3}{\Delta}$ se trouvent déterminées par la résolution de deux équations du second degré.

Brioschi. — Note sur le Mémoire précédent. (124-125).

L'auteur montre le lien des résultats obtenus par M. Kiepert et de ses propres recherches sur les équations modulaires.

Weber. — Sur la théorie de la transformation des fonctions $\mathfrak{S}$, en particulier dans le cas de trois variables. (126-166; all.).

I. Transformation des fonctions $2p$ fois périodiques.
II. Connexion entre deux transformations.
III. La multiplication complexe.
IV. La transformation des fonctions $\mathfrak{S}$.
V. Les transformations linéaires.
VI. La transformation du $n^{\text{ième}}$ degré.
VII. La transformation du deuxième degré.

Brioschi. — Sur une classe d'équations modulaires. (167-172).

Tonelli. — Sur un théorème de la théorie des fonctions. (173-192).

Il s'agit de ce théorème :

Une fonction quelconque monodrome S *des points d'une surface* $2p+1$ *fois connexe* T *qui représente la ramification d'une fonction s de z définie par l'équation algébrique*

$$F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0$$

s'exprime rationnellement au moyen de s et de z, et, si elle devient m' fois infinie du premier ordre, contient

$$m' - p - 1$$

constantes arbitraires.

Ce théorème a été énoncé et établi pour la première fois par Riemann dans le § 9 de son Mémoire sur les fonctions abéliennes, mais en supposant la position des points pour lesquels la fonction S devient infinie, soumise à certaines restrictions : ainsi sont exclus les points pour lesquels s ou z deviennent infinis. M. Prym en a donné récemment (*Journal de Borchardt,* t. 83) une démonstration élégante et générale, mais sans se préoccuper du nombre de constantes arbitraires. M. Tonelli reprend la question au point de vue de Riemann, mais dans toute sa généralité : il établit que le nombre de constantes arbitraires ne coïncide avec celui qu'a donné Riemann que dans des cas particuliers.

Henneberg. — Sur les oscillations élastiques d'une sphère isotrope qui n'est soumise à l'action d'aucune force extérieure. (193-209; all.).

Schering. — Discours prononcé à la séance publique de la Société royale des Sciences de Göttingue le 30 avril 1877, à l'occasion du centenaire de la nativité de Charles-Frédéric Gauss. (210-239).

Traduction italienne de ce discours par M. Beltrami, suivie d'intéressantes additions et de curieuses lettres adressées à Gauss ou écrites par Gauss lui-même.

Christoffel. — Sur la forme canonique des intégrales de première espèce de Riemann. (240-301; all.).

Pour qu'une équation irréductible

$$F(\overset{n}{S}, \overset{m}{Z}) = 0$$

soit d'espèce p, il faut que les coefficients soient déterminés de façon que S, considéré comme fonction de Z, admette précisément $r = (m-1)(n-1) - p$ points doubles : alors, à cette équation appartiennent p intégrales de première espèce linéairement indépendantes, contenues dans l'expression

$$w = \int \Phi(\overset{n-2}{S}, \overset{m-2}{Z}) \frac{dZ}{F'},$$

où $F' = \frac{\partial F}{\partial S}$ et où la fonction entière Φ s'annule aux points doubles.

Déterminer le polynôme F de façon que la variable S, regardée comme fonction de Z, admette le nombre présent de points doubles et déterminer ces points doubles au moins dans la mesure nécessaire pour la détermination de Φ, tel est le problème que M. Christoffel désigne sous le nom de *problème des points doubles*.

L'expression précédente de dw ne peut être réalisée qu'autant que le problème des points doubles est résolu : sans doute cette solution n'est pas nécessaire pour prouver l'existence de la fonction w et des p fonctions linéairement indépendantes de cette nature; mais elle est nécessaire pour parvenir à l'expression finale de dw.

La difficulté du problème reste tout entière quand on substitue aux variables Z et S un autre couple z, s de fonctions de Z ramifiées comme S, telles qu'on puisse passer d'un système à l'autre par des substitutions rationnelles; si μ et ν sont les ordres de ces fonctions (l'ordre d'une fonction algébrique de Z ramifiée comme S est le nombre qui exprime en combien de points S, Z, séparés ou confondus, la fonction devient infinie du premier ordre), il existe entre les variables Z, S une équation irréductible

$$f(\overset{\mu}{S}, \overset{\nu}{Z}) = 0,$$

et l'expression de w prend la forme

$$w = \int \varphi(\overset{\mu-2}{S}, \overset{\nu-2}{Z}) \frac{dz}{f'},$$

où $f' = \frac{df}{ds}$; et la détermination des polynômes f et φ est le même problème que la détermination des polynômes F et Φ; on a simplement substitué les nombres μ et ν aux nombres m et n; on ne peut, d'après l'auteur, avancer dans cette voie tant qu'on s'attache à représenter dw comme une fonction rationnelle de deux variables réciproquement irrationnelles, et l'on n'évitera les difficultés qui viennent d'être signalées qu'en regardant dw comme fonction d'une seule variable Z : c'est-à-dire que, au lieu d'adjoindre à z une irrationnelle s pareillement ramifiée, mais qui n'est pas autrement déterminée, et d'exprimer ration-

nellement dw au moyen de ces deux variables, il faut introduire la fonction

$$\frac{dw}{dz} = s$$

comme l'irrationnelle inconnue.

Parmi les diverses hypothèses que l'on peut faire sur les fonctions z, de même ramification, la plus importante consiste à supposer que l'ordre μ est, dans un certain sens, un minimum : dans ce cas on obtient, pour $s = \frac{dw}{dz}$, une forme remarquable que l'auteur appelle *canonique*, à savoir

$$(1) \qquad s = y_1 \sigma_1 + y_2 \sigma_2 + \ldots + y_{\mu-1} \sigma_{\mu-1};$$

$y_1, y_2, \ldots, y_{\mu-1}$ sont des fonctions entières de z avec des coefficients arbitraires $x_1, x_2, \ldots, x_p$, et leurs degrés $a_1, a_2, \ldots, a_{\mu-1}$ sont tels que le nombre de tous les termes de s, à savoir $a_1 + a_2 + \ldots + a_{\mu-1} + \mu - 1$, soit égal à p; $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\mu-1}$ sont les *intégrandes* de première espèce, qui pour les valeurs infinies de z s'annulent avec les ordres $a_1 + 2, a_2 + 2, \ldots, a_{\mu-1} + 2$. L'établissement de cette forme et diverses lemmes préliminaires remplissent les sections I et II du Mémoire de M. Christoffel.

La Section III est consacrée à l'étude de l'équation dont s est racine; cette équation a la forme

$$(2) \qquad A s^{\mu} + A_2 s^{\mu-2} + A_3 s^{\mu-3} + \ldots + A_{\mu} = 0;$$

le second terme manquera toujours; A_i est une fonction entière homogène du $i^{\text{ième}}$ degré de $y_1, y_2, \ldots, y_{\mu-1}$, fonction dont les coefficients sont des fonctions entières de Z; la théorie de cette équation est faite dans le cas où s, comme fonction de z, n'a que des singularités simples et séparées. En désignant par $s_1, s_2, \ldots, s_{\mu}$ les branches de z et en faisant

$$\Delta = A^{\frac{2\mu-3}{2}} \Pi(s_1 s_2 \ldots s_{\mu}),$$

on trouve que Δ est une fonction entière de z, et, en désignant cette fonction par $\mathcal{A}$ et par D le discriminant de l'équation (2), on a

$$\Delta = \mathcal{A},$$
$$D = \mu^h A \mathcal{A}^2;$$

aux points d'embranchement, on a $A = 0$; aux points doubles de s, on a $\mathcal{A} = 0$, h est une constante.

Dans la quatrième Section, l'auteur étudie les fonctions $A_2, A_3, \ldots, A_{\mu}$, regardées comme des formes homogènes à $\mu - 1$ variables $y_1, y_2, \ldots, y_{\mu-1}$; ces quantités sont des fonctions symétriques de $s_1, s_2, \ldots, s_{\mu}$, et, à cause de l'équation

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_{\mu} = 0,$$

on peut les regarder comme des formes homogènes et symétriques $A'_2, A'_3, \ldots, A'_{\mu}$ des $\mu - 1$ variables $s_1, s_2, \ldots, s_{\mu-1}$; en appliquant l'équation (1) à chaque

branche de s, on parvient à $\mu - 1$ équations telles que

$$\begin{aligned} s_1 &= y_1 \sigma_{11} + y_2 \sigma_{21} + \ldots + y_{\mu-1} \sigma_{\mu-1,1}, \\ s_2 &= y_1 \sigma_{12} + y_2 \sigma_{22} + \ldots + y_{\mu-1} \sigma_{\mu-1,2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{\mu-1} &= y_1 \sigma_{1,\mu-1} + y_2 \sigma_{2,\mu-1} + \ldots + y_{\mu-1} \sigma_{\mu-1,\mu-1}. \end{aligned}$$

En substituant ces quantités dans les formes *canoniques* $A'_2, A'_3, \ldots, A'_\mu$, on obtient les formes $A_1, A_2, \ldots, A_\mu$; l'étude de la substitution précédente montre que son déterminant

$$\frac{\partial(s_1 s_2 \ldots s_{\mu-1})}{\partial(y_1 y_2 \ldots y_{\mu-1})}$$

est égal à $\frac{1}{\sqrt{A}}$. Au moyen de ce théorème, on obtient une forme canonique pour chaque invariant ou covariant du système de formes $A_2, A_3, \ldots, A_\mu$; en particulier, on obtient l'expression de la fonction rationnelle $\Delta = \mathcal{A}$, qui s'annule aux points doubles de s, savoir

$$\mathcal{A} = \frac{\partial(A_2 A_3 \ldots A_{\mu-1})}{\partial(y_1 y_2 \ldots y_{\mu-1})}.$$

Dans la Section V, l'auteur montre inversement que l'équation (2) suffit à toutes les conditions du problème et détermine en effet s comme *intégrande* de première espèce, sous la forme canonique (1), si, pour le degré prescrit de ses coefficients, son discriminant D est égal à $\mu h A \mathcal{A}^2$.

Dans la Section VI, relativement à la classification des fonctions algébriques, à même ramification, d'une seule variable, on prouve que chaque genre (p) se décompose en familles (μ); cette classification ne souffre pas d'exception : les fonctions hyperelliptiques forment avec les fonctions elliptiques le système $\mu = 2$; comme exemple de la théorie générale, l'auteur étudie le système $\mu = 3$.

Enfin, dans la Section VII, M. Christoffel fait la théorie de la fonction A_2; dans la substitution qui change A_2 en son adjointe, les coefficients s'expriment d'une façon remarquable au moyen de quantités irrationnelles.

La forme de cette substitution conduit à diverses propriétés tant de la forme A_2 elle-même que des formes suivantes.

Harnack. — Sur les différentielles algébriques : extrait d'une Lettre à M. Cremona. (302-305; all.).

L'auteur complète sur quelques points la méthode donnée par M. Cremona dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Bologne* (1869, t. X de la 2ᵉ sér.) (*Sugli integrali a differenziale algebrico*). Il montre comment on peut, en employant des coordonnées homogènes, étudier la nature de l'intégrale d'une différentielle algébrique dans le voisinage d'un point double et donne quelques indications sur la démonstration du théorème d'Abel et sur l'intégration des fonctions rationnelles.

Malet. — Sur un problème d'Algèbre. (306-313; angl.).

Étant donnés deux équations algébriques, déterminer l'équation dont les ra

cines sont de la forme $\alpha\beta$, α étant une racine de l'une des équations données et β une racine de l'autre. — L'équation cherchée est mise sous forme de déterminant.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES [1].

Tome XCIV; 1882, 1er trimestre.

N° 1; 2 janvier.

Faye. — Sur la correction des boussoles et sur le récent *Traité de la régulation et de la compensation des compas* de M. Collet. (18).

Le Paige (C.). — Sur les formes algébriques de plusieurs séries de variables (31).

L'auteur indique plusieurs covariants des formes quadrilinéaires; il énonce en outre le théorème suivant :

Soient les deux formes à trois séries de variables

$$f = a_x^n b_y^m c_z^p, \quad \varphi = \alpha_x^\nu \beta_y^\lambda \gamma_z^\varpi;$$

si l'on désigne par $(f, u)_x$, $(f, f')_{xy}$, ... les covariants

$$(a\alpha)\, a_x^{n-1} \alpha_x^{\nu-1} b_y^m \beta_y^\lambda c_z^p \gamma_z^\varpi,$$

$$(aa')\, a_x^{n-1} a'^{\,n-1}_x (bb')\, b_y^{m-1} b'^{\,m-1}_y c_z^p c'^{\,p}_z,$$

on a

$$(f, u)_x (f, u)_y = -\frac{1}{2}\left[f^2(\varphi, \varphi')_{xy} - 2f\varphi(f, \varphi)_{xy} + \varphi^2(f, f')_{xy}\right].$$

C'est la généralisation d'un théorème bien connu de Clebsch.

Gasparis (de). — Sur la théorie du mouvement des planètes. (32).

Note relative à certaines séries exprimant les quantités variables des ellipses des planètes en fonction de l'anomalie moyenne exprimée en parties du rayon, et de l'excentricité. Pour que ces séries convergent rapidement, il convient de compter les anomalies à partir de l'aphélie.

Exemple. — Soient μ et ε l'anomalie moyenne et excentrique, comptée de l'aphélie; on aura pour le rayon vecteur

$$\frac{r}{a} = 1 + e - \frac{\mu^2}{2!}\frac{e}{(1-e)^2} + \frac{\mu^4}{4!}\frac{3e^2+e}{(1-e)^5}$$

$$- \frac{\mu^6}{6!}\frac{45e^3+24e^2+e}{(1-e)^8} + \frac{\mu^8}{8!}\frac{1575e^4+1107e^3+117e^2+e}{(1-e)^{11}}.$$

---

[1] Voir *Bulletin*, VI_2, 28.

Boussinesq. — Intégrations de certaines équations aux dérivées partielles par le moyen d'intégrales définies contenant sous le signe $\int$ le produit de deux fonctions arbitraires. (33).

La dérivée seconde par rapport à t de l'intégrale

$$\varphi = \int_0^\infty f\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)\Psi\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha,$$

est

$$\int_0^\infty f'\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)\Psi''\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha.$$

Ceci posé, si l'on fait

$$\varphi = \int_0^\infty f\left(x - \frac{t^2}{2\alpha^2}\right)\Psi\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha,$$

ou

$$\varphi = \int_0^\infty f\left(x \mp \frac{\alpha^2}{2}\right)\Psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)d\alpha,$$

on pourra particulariser Ψ en vue de faire vérifier à φ l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{d^{2n}\varphi}{dt^{2n}} + A\frac{d^n\varphi}{dx^n} = 0,$$

qui devient par la substitution

$$\int_0^\infty f^{(n)}\left(x \mp \frac{t^2}{2\alpha^2}\right)\left[(\mp 1)^n\Psi^{(n)}\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) + A\Psi\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\right]d\alpha = 0;$$

il suffira de prendre pour Ψ une des n intégrales distinctes de l'équation différentielle linéaire $(\mp 1)^n\Psi^{(n)} + A\Psi = 0$, et de choisir en outre la fonction f de manière à faire acquérir pour $t = 0$, entre les limites $x = \mp\infty$, telles valeurs qu'on voudra à φ ou à sa dérivée en t d'un ordre pair donné $2p$ s'il s'agit de la première forme, et au contraire à sa dérivée en t d'ordre impair $2p + 1$ s'il s'agit de la seconde; or ces dérivées, exprimées par

$$(\mp 1)^p\int_0^\infty f^{(p)}\left(x \mp \frac{t^2}{2\alpha^2}\right)\Psi^{(q)}\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha,$$

où q désigne soit p, soit $p - 1$, se réduisent pour $t = 0$ à la fonction arbitraire $f^{(p)}(x)$, abstraction faite d'un facteur constant. On conçoit que dans le cas où il y aura n couples possibles de pareilles intégrales, leur superposition constitue l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles avec ses $2n$ fonctions arbitraires.

L'auteur applique cette méthode aux problèmes de l'échauffement et du mouvement transversal d'une barre, qui s'étend depuis l'origine des abscisses positives jusqu'à l'infini et qui d'abord à zéro ou en repos viendrait à être soit chauffée, soit agitée à son extrémité $x = 0$.

N° 2; 9 janvier.

Sylvester (J.-J.). — **Sur les puissances et les racines de substitutions linéaires. (55).**

Un déterminant de *substitution* ne diffère pas par sa forme extérieure d'un déterminant ordinaire ou *absolu*; mais les lois de composition sont un peu différentes.

Si l'on appelle *transversal* d'un déterminant ce qu'il devient quand, en prenant la diagonale qui joint le premier au dernier terme comme axe, on lui fait décrire une demi-révolution autour de cet axe, l'inverse d'un déterminant de substitution est le transversal de l'inverse du déterminant absolu. Pour obtenir le produit du déterminant de substitution A par le déterminant de substitution B, il faut multiplier ensemble le transversal de A par B selon la règle ordinaire, ce qui donnera un déterminant C'; le transversal de C' sera le produit de la substitution A par la substitution B.

Si dans un déterminant quelconque donné on ajoute le terme $-\lambda$ à chaque terme diagonal, on obtient ainsi une fonction de λ, dont les racines sont nommées par M. Sylvester racines *lambdaïques* du déterminant donné.

Les racines lambdaïques de l'inverse d'un déterminant sont les réciproques des racines lambdaïques du déterminant lui-même.

i étant un nombre entier et positif quelconque, les $i^{\text{ièmes}}$ puissances des racines lambdaïques d'un déterminant de substitution sont identiques avec les racines lambdaïques de la puissance $i^{\text{ème}}$ du déterminant.

i étant une quantité commensurable quelconque, les $i^{\text{ièmes}}$ puissances des racines lambdaïques d'un déterminant de substitution sont identiques avec les racines lambdaïques de la $i^{\text{ème}}$ puissance du déterminant.

Ces propositions permettent à l'auteur de résoudre ce beau problème :

Trouver la puissance $i^{\text{ème}}$ d'une substitution donnée, i étant un nombre commensurable quelconque.

Voici la solution :

Soit n l'ordre du déterminant de substitution donné. Soient K un terme quelconque dans ce déterminant, K_θ le terme qui occupe, dans la puissance $\theta^{\text{ième}}$ du déterminant, la même position que K dans le déterminant lui-même. De plus, soient $K_0 = 1$ quand K est un terme dans la diagonale et $K_0 = 0$ dans tout autre cas. Alors, pour une valeur commensurable quelconque de i, positive ou négative, en nommant la somme des quantités $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$, S_1, leur produit S_{n-1}, et en général la somme de leurs combinaisons binaires, ternaires, etc., S_2, S_3, on aura

$$K = \sum \frac{K_{n-1} - S_1 K_{n-2} - S_2 K_{n-3} - \ldots - S_{n-1} K_0}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)\ldots(\lambda_1 - \lambda_n)} \lambda_1^i,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les racines lambdaïques du déterminant donné.

Cette proposition doit être modifiée quand les racines lambdaïques ne sont pas inégales. Enfin, l'auteur insiste sur un cas très singulier où le nombre de solutions devient infini pour une valeur finie de i.

Poincaré. — Sur une extension de la notion arithmétique de genre. (67).

Deux formes algébriquement équivalentes appartiennent au même ordre quand le plus grand commun diviseur de leurs coefficients est le même, quand il en est ainsi du plus grand commun diviseur de ces mêmes coefficients affectés des coefficients binomiaux (ou polynomiaux) et du grand commun diviseur des coefficients de leurs covariants, contravariants, mixed concomitants, etc., affectés ou non des coefficients binomiaux.

Deux formes $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sont équivalentes suivant le module m quand on peut trouver n^2 nombres entiers a_{ik} dont le déterminant soit $\equiv 1 \pmod{m}$, et qui soient tels qu'en posant

$$y_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n$$

on ait identiquement

$$\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \pmod{m}.$$

Deux formes algébriquement équivalentes appartiennent au même genre quand elles sont équivalentes suivant un module quelconque.

Ces définitions s'appliquent à des formes quelconques.

Deux formes équivalentes suivant deux modules m et m' premiers entre eux sont équivalentes suivant le module mm'.

Deux formes équivalentes, suivant tous les modules qui sont des puissances d'un nombre premier appartiennent au même genre.

Deux formes qui appartiennent à la même classe appartiennent au même genre.

Deux formes qui appartiennent au même genre appartiennent au même ordre.

L'auteur applique ces définitions aux formes quadratiques d'un nombre quelconque de variables; il considère ensuite la forme cubique binaire et son hessien.

Le Paige (*C.*). — Sur les formes algébriques à plusieurs séries de variables. (69).

Sur la réduction d'une forme quadrilinéaire à sa forme canonique et sur le rôle que jouent dans cette réduction les covariants signalés par l'auteur.

Boussinesq. — Équations différentielles du mouvement des ondes produites à la surface d'un liquide par l'émersion d'un solide. (71).

N° 3; 16 janvier.

Darboux (*G.*). — Sur la représentation sphérique des surfaces. (120-158).

La représentation sphérique, due à M. Bonnet, consiste, comme on sait, à faire correspondre à chaque point d'une surface un point d'une sphère par la condition que les deux plans tangents soient parallèles. Aux lignes de courbure de la surface correspondent des lignes orthogonales sur la sphère. M. Darboux a résolu (*Comptes rendus*, t. LXVII et LXVIII) la question suivante :

Trouver toutes les surfaces dont les lignes de courbure ont pour représentation sphérique un système d'ellipses et d'hyperboles homofocales.

Dans les communications dont nous rendons compte, il complète ce résultat et montre qu'on peut obtenir toutes les surfaces ayant pour représentation sphérique, soit un système d'ellipses et d'hyperboles homofocales, soit le système orthogonal que l'on déduit du précédent par l'inversion la plus générale.

Si dans le plan dont l'équation est

$$ux + vy + wz + p = 0$$

u, v, w, p sont des fonctions des deux variables ρ et ρ_1, ce plan enveloppera une surface non développable, les lignes $\rho = C$, $\rho_1 = C_1$ seront conjuguées toutes les fois qu'il existera une équation

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho \, \partial \rho_1} + A \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + B \frac{\partial \theta}{\partial \rho_1} + C\theta = 0,$$

dont u, v, w, p seront des solutions; réciproquement, si u, v, w, p, p' sont des solutions de cette équation, les surfaces Σ, Σ', enveloppes des plans

$$ux + vy + wz + p = 0,$$
$$ux + vy + wz + p' = 0,$$

seront telles que pour les points correspondant aux mêmes valeurs de ρ, ρ_1 les plans tangents seront parallèles. Si l'une des surfaces est une sphère (S), les lignes $\rho = C$, $\rho_1 = C_1$ seront, sur la sphère, des lignes orthogonales, représentant les lignes de courbure de l'autre surface; donc :

Étant donnée une équation aux dérivées partielles telles que (1), si l'on peut trouver quatre solutions de cette équation liées par la relation

$$(2) \qquad u^2 + v^2 + w^2 = p^2,$$

les équations

$$x = \frac{u}{p}, \quad y = \frac{v}{p}, \quad z = \frac{w}{p}$$

définiront un système de lignes sphériques orthogonales, et la surface la plus générale dont les lignes de courbure ont ce système pour image sphérique sera l'enveloppe du plan

$$ux + vy + wz + P = 0,$$

où P est l'intégrale générale de l'équation (1).

Par exemple, l'équation

$$2(\rho - \rho_1) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho \, \partial \rho_1} + \frac{\partial \theta}{\partial \rho} - \frac{\partial \theta}{\partial \rho_1} = 0$$

admet des solutions de la forme

$$u = \sum_1^4 A_i \sqrt{(\rho + a_i)(\rho_1 + a_i)},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$p = \sum_1^4 D_i \sqrt{(\rho + a_i)(\rho_1 + a_i)}.$$

liées par la relation (1). Le système sphérique orthogonal correspondant sera celui qui a été indiqué au début.

Considérons maintenant une surface (Σ) et supposons que ses lignes de courbure aient pour image sphérique deux systèmes de lignes orthogonales, tracées sur une sphère (S). Soumettons ces lignes sphériques à une inversion dont le pôle sera un point quelconque O et dont le module sera choisi de telle manière que la sphère (S) se corresponde à elle-même. Soit (P) le plan polaire de O par rapport à (S).

Considérons un plan tangent quelconque (ϖ) de la surface (Σ) et abaissons du centre C de la sphère (S) la perpendiculaire sur ce plan, perpendiculaire qui rencontrera la sphère en un point M; soit M′ l'inverse du point M. Le plan (ϖ'), perpendiculaire à CM′ et passant par l'intersection du plan (ϖ) avec le plan fixe (P), enveloppera une surface (Σ') dont la représentation sphérique sera fournie par les lignes orthogonales inverses de celles qui servent de représentation à (Σ).

Cette méthode, qui réalise géométriquement la *transformation par directions réciproques* de M. Laguerre, permettra, toutes les fois que le problème de la représentation sphérique sera résolu pour un système de lignes, d'en donner la solution pour tous les systèmes orthogonaux que l'on peut en déduire par une inversion. M. Darboux indique plusieurs applications; il généralise en outre la méthode ordinaire de représentation sphérique, en s'appuyant sur le théorème suivant :

Considérons une sphère variable (U) *assujettie à toucher à la fois une surface* (Σ) *et une sphère* (S). *Quand le point de contact de* (U) *et de* (Σ) *décrit une ligne de courbure, le point de contact de* (U) *et de* (S) *décrit une ligne sphérique qui correspond à la ligne de courbure.*

Cela posé, les lignes sphériques qui correspondent aux deux systèmes de lignes de courbure se coupent mutuellement à angle droit. Ce mode de représentation subsiste quand on effectue toutes les transformations qui conservent les lignes de courbure, et l'on peut démontrer que toute transformation effectuée sur une surface (Σ) et conservant les lignes de courbure entraîne un changement dans la représentation sphérique de cette surface, qui équivaut à une ou à plusieurs inversions.

Pepin. — Nouveaux théorèmes sur l'équation indéterminée $ax^4 + by^4 = z^2$. (122).

Cas généraux où l'équation n'a pas de solutions rationnelles, l'équation quadratique correspondante en admettant, au contraire, une infinité.

Poincaré. — Sur une extension de la notion arithmétique de genre. (124).

Conditions pour que deux formes quadratiques $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, appartenant au même ordre et ayant même déterminant Δ, soient équivalentes suivant une puissance quelconque d'un facteur premier impair p de Δ, pour qu'elles soient équivalentes suivant une puissance quelconque de 2.

Répartition en genres, par rapport aux modules 2, 3, 5, des formes cubiques binaires.

Boussinesq. — Sur les ondes que fait naître, dans l'eau en repos

d'un canal, l'immersion d'un cylindre solide, plongé en travers dans ce canal. (127).

N° 4; 25 janvier.

Darboux. — Sur la représentation sphérique des surfaces. (158).

Laguerre. — Sur quelques équations transcendantes. (160).

Une transcendante entière est du *premier genre* si ses facteurs primaires sont de la forme

$$e^{\frac{x}{\alpha}}\left(1-\frac{x}{\alpha}\right).$$

Si une transcendante entière $F(x)$ est du premier genre et a toutes ses racines réelles, ses dérivées sont également du premier genre et ont toutes leurs racines réelles. L'auteur indique en outre diverses propriétés qui rapprochent singulièrement les transcendantes des fonctions rationnelles entières ayant toutes leurs racines réelles.

Poincaré. — Sur les fonctions fuchsiennes. (163).

Méthode nouvelle pour exprimer une fonction fuchsienne donnée à l'aide de séries thêtafuchsiennes.

N° 5; 30 janvier.

Bertrand (J.). — Sur la théorie des épreuves répétées. (185).

Démonstration du théorème de Bernoulli sur les épreuves répétées.

Soient p et q les probabilités de deux événements contraires A et B; on a

$$p+q=1,$$

et les termes du développement

$$(p+q)^{\mu}=p^{\mu}+\mu p^{\mu-1}q+\ldots+A_h p^h q^{\mu-h}+\ldots+q^{\mu}$$

représentent les probabilités des diverses combinaisons que le hasard peut amener sur une succession de μ épreuves. Supposons qu'on s'engage à payer, après les μ épreuves accomplies, une somme égale à

$$\left(\frac{n}{\mu}-p\right)^2,$$

n désignant le nombre de fois que l'événement A s'est présenté; l'espérance mathématique E de celui à qui l'on fait une telle promesse s'obtient en multipliant la valeur de chacune des sommes à espérer par la probabilité qu'on a de l'obtenir :

$$E=\Sigma\left(\frac{k}{\mu}-p\right)^2 r A_k p^k q^{n-k}$$

$$=\frac{1}{\mu^2}\Sigma k^2 A_k p^k q^{n-k}-\frac{2p}{\mu}\Sigma k A_k p^k q^{n-k}+p^2\Sigma A_k p^k q^{n-k}=\frac{pq}{\mu}.$$

E tend vers zéro quand μ augmente, ce qui exige évidemment qu'il en soit de même de la probabilité pour que la différence $\frac{n}{\mu} - p$ surpasse une limite donnée, si petite qu'elle soit.

Hermite (*C.*). — Sur quelques applications de la théorie des fonctions elliptiques. (186, 372, 477, 594).

La solution de l'équation

$$D^2 y = [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]\,y$$

n'a encore été obtenue que pour $n = 1$ et $n = 2$. Les méthodes de M. Fuchs montrent que l'intégrale générale est une fonction uniforme de la variable; en utilisant l'importante proposition de M. Picard que cette intégrale est une fonction doublement périodique de seconde espèce, la solution de l'équation de Lamé est donnée directement par l'application de principes généraux s'appliquant aux équations linéaires d'un ordre quelconque. M. Hermite expose une méthode indépendante de ces principes et traite la question difficile de la détermination sous forme entièrement explicite des éléments de la solution.

Le point de départ est le développement en série que l'on tire de l'équation quand on y remplace x par $iK' + \varepsilon$.

On trouve alors que l'équation est vérifiée par deux développements en série de la forme

$$y = \frac{1}{\varepsilon^n} + \frac{h_1}{\varepsilon^{n-2}} + \ldots + \frac{h_i}{\varepsilon^{n-2i}} + \ldots,$$

$$y = \varepsilon^{n+1}(1 + h'_1 \varepsilon^2 + h'_2 \varepsilon^4 + \ldots).$$

En outre, si l'on met dans l'expression

$$D^2_\varepsilon y - \left[\frac{n(n+1)}{\operatorname{sn}^2 \varepsilon} + h\right] y,$$

$$\frac{1}{\varepsilon^n} + \frac{h_1}{\varepsilon^{n-2}} + \ldots + \frac{h_i}{\varepsilon^{n-2i}}$$

à la place de y, tous les termes en $\frac{1}{\varepsilon^{n+2}}, \frac{1}{\varepsilon^n}, \ldots, \frac{1}{\varepsilon^{n-2i+2}}$ disparaissent, en sorte que, en supposant $n = 2\nu$, ou $n = 2\nu - 1$, on n'aura aucun terme en $\frac{1}{\varepsilon}$, si l'on prend dans le premier cas

$$y = \frac{1}{\varepsilon^{2\nu}} + \frac{h_1}{\varepsilon^{2\nu-2}} + \ldots + \frac{h_{\nu-1}}{\varepsilon^2} + h_\nu,$$

et dans le second

$$y = \frac{1}{\varepsilon^{2\nu-1}} + \frac{h_1}{\varepsilon^{2\nu-3}} + \ldots + \frac{h_{\nu-1}}{\varepsilon} + h_\nu \varepsilon.$$

Ceci posé, en faisant

$$f(x) = e^{\lambda(x - iK')}\varphi(x),$$

où

$$f(x) = \frac{H'(0)\,H(x+\omega)}{\Theta(\omega)\,\Theta(x)}\, e^{-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\left[x - iK' + \frac{i\pi\omega}{2K}\right]},$$

les expressions

$$F(x) = -\frac{D_x^{2\nu-1} f(x)}{\Gamma(2\nu)} - h_1 \frac{D_x^{2\nu-3} f(x)}{\Gamma(2\nu-2)} - \dots - h_{\nu-1} D_x f(x),$$

$$F(x) = -\frac{D_x^{2\nu-2} f(x)}{\Gamma(2\nu-1)} - h_1 \frac{D_x^{2\nu-4} f(x)}{\Gamma(2\nu-3)} - \dots - h_{\nu-1} f(x)$$

satisferont, suivant les cas de $n = 2\nu$ et $n = 2\nu - 1$, à l'équation différentielle, pourvu qu'on détermine convenablement les constantes ω et λ.

En effet, on voit immédiatement que, en prenant $x = ik' + \varepsilon$, les parties principales du développement suivant les puissances ascendantes de ε coïncident respectivement avec les parties principales des développements correspondants de y, donnés plus haut; de plus, on peut s'arranger, dans le premier cas, pour que le terme constant et le coefficient de ε soient h_ν et zéro, et, dans le second cas, pour que ces coefficients soient zéro et h_ν.

Alors les deux fonctions doublement périodiques de seconde espèce

$$D_x^2 F(x) - [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h] F(x),$$

étant finies pour $x = ik'$, sont nécessairement nulles; en sorte que l'expression

$$y = CF(x) + C'F(-x)$$

fournit l'intégrale générale.

Mais les deux équations de condition auxquelles on est conduit par cette voie, équations algébriques en $\operatorname{sn}\omega$ et λ, sont compliquées et difficiles à traiter : relativement à λ, par exemple, l'une est du degré n, l'autre du degré $n+1$. Il paraît difficile de mettre en évidence qu'elles ne donnent pour λ^2 et $\operatorname{sn}^2\omega$ qu'une seule détermination.

Dans le cas de $n = 3$, M. Hermite parvient à la résolution complète, en sorte que, dans ce cas, la solution de l'équation de Lamé est obtenue sans ambiguïté; il met, en outre, en évidence les valeurs de la constante h qui fournissent les solutions doublement périodiques ou les fonctions particulières de seconde espèce de M. Mittag-Leffler et, chemin faisant, rencontre un exemple simple de réduction d'une intégrale hyperelliptique de seconde classe à l'intégrale elliptique de première espèce.

Le cas de n quelconque est ensuite l'objet d'une analyse profonde, où l'expression du produit des deux solutions $F(x)$, $F(-x)$ et d'autres produits analogues qui s'obtiennent tous en fonctions linéaires de $k^2\operatorname{sn}^2 x$ et de ses dérivées successives joue un rôle essentiel. En désignant par $\sqrt{N}$ la valeur constante du déterminant fonctionnel formé avec les solutions $F(x)$, $F(-x)$, l'auteur prouve que N est un polynôme entier en h_1, et par conséquent en h, du degré $2n+1$. La condition $N = 0$ détermine les valeurs de cette constante pour lesquelles l'équation de Lamé est vérifiée par des fonctions doublement périodiques, la solution générale subissant alors un changement de forme analytique.

Dans le cas où N est différent de zéro, M. Hermite établit que $\operatorname{sn}^2\omega$ est une fonction rationnelle de h et que λ ne contient pas d'autre irrationnalité que $\sqrt{N}$.

Enfin, dans le cas où N est nul, le quotient $\dfrac{F(x)}{F(-x)}$ se réduit à une constante et les multiplicateurs de la fonction de seconde espèce $F(x)$ deviennent égaux

à $+1$; à cause des quatre combinaisons de signes, on voit qu'il peut exister des solutions de quatre espèces, ayant respectivement les périodicités de $\mathrm{sn}\,x$, $\mathrm{cn}\,x$, $\mathrm{dn}\,x$, $\mathrm{sn}^2 x$. Pour les trois premières on a $\lambda = 0$ avec $\omega = 0$, ou $\omega = \mathrm{K}$, ou $\omega = \mathrm{K} + i\mathrm{K}'$; les valeurs de h qui correspondent à ces diverses espèces de solutions sont respectivement données par des équations de degré ν; les valeurs de h qui donnent les solutions de la quatrième espèce sont fournies par une équation de degré $\nu + 1$ ou $\nu - 1$ selon que $n = 2\nu$ ou $2\nu - 1$; dans ce cas les valeurs de λ et de $\mathrm{sn}\,\omega$ sont infinies. C'est en montrant comment on peut déduire ces solutions de la solution générale que M. Hermite termine son analyse.

Appell. — Sur une classe d'équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. (202).

Étant donnée une équation de la forme

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - \psi(x,y)z = 0,$$

où $\psi(x,y)$ est une fonction rationnelle des variables y et x liées entre elles par une équation algébrique $\mathrm{F}(x,y) = 0$ de degré m et de genre p, M. Appell est parvenu à reconnaître les cas où elle admet une intégrale de la forme

$$z = e^{\int \varphi(x,y)dx},$$

où $\varphi(x,y)$ est une fonction rationnelle de x, et à obtenir les intégrales de cette forme. Il examine en particulier le cas où $p = 0$ et celui où $p = 1$ et termine par la remarque générale que voici :

Étant donnée l'équation

$$\frac{d^n z}{dx^n} + \varphi_1(x,y)\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + \varphi_{n-1}(x,y)z = 0,$$

où les φ sont des fonctions rationnelles de x, y liées par l'équation $\mathrm{F}(x,y) = 0$ de genre p, si l'on a $p > 1$, on peut ramener l'intégration de cette équation différentielle à celle d'un système de p équations différentielles linéaires simultanées aux dérivées partielles dont les coefficients sont des fonctions uniformes de p variables indépendantes à $2p$ groupes de périodes conjuguées.

Spoerer. — Sur le caractère oscillatoire de la cause qui détermine la distribution variable des taches à la surface du Soleil. (205).

Boussinesq. — Sur les intégrales asymptotes des équations différentielles. (208).

Vaneček. — Sur la génération des surfaces et des courbes à double courbure de tous les degrés. (210).

N° 6; 6 février.

Séance publique annuelle.

N° 7; 13 février.

Bertrand (J.). — Sur la loi de déviation du pendule de Foucault. (371).

Soit M la position de l'observateur sur la surface de la Terre. Après un temps dt il sera transporté en M' sur le parallèle passant par le point M; si le plan d'oscillation du pendule n'avait pas de mouvement apparent, il tournerait avec la Terre et ses positions successives envelopperaient un parallèle; soit I le point de contact dans la position primitive, transporté en I' lorsque M est lui-même venu se placer en M'; parmi les grands cercles passant par M', celui qui fait le plus petit angle avec MI est M'K qui va couper MI à une distance MK du point M égale à un quadrant. Le cercle M'I' ne laisserait paraître aucune déviation; la rotation apparente θ du plan est donc I'M'K; M. Bertrand en donne l'expression suivante :

$$\theta = \cos \mathrm{MP} \frac{\mathrm{II}'}{\rho}.$$

cos MP est le sinus de la latitude, ρ le rayon du parallèle. Ce résultat démontre le principe sur lequel s'est appuyé Foucault.

Hermite (G.). — Sur quelques applications de la théorie des fonctions elliptiques. (372).

Sylvester (J.-J.). — Sur les racines des matrices unitaires. (396).

M. Sylvester désigne sous ce nom une matrice dont tous les termes sont des zéros, sauf ceux de la diagonale qui sont des unités. Il donne la forme générale des matrices dont la $i^{\text{ème}}$ puissance donne une matrice unitaire en admettant pour loi de multiplication la loi qui résulte de la combinaison des substitutions linéaires.

Bigourdan. — Observations des planètes (221) Pallas et (222) Palisa, faites à l'Observatoire de Paris. (409).

André (C.). — Sur le compagnon de l'étoile γ d'Archimède et sur un nouveau mode de réglage d'un équatorial. (410).

Laguerre. — Sur la distribution dans le plan des racines d'une équation algébrique dont le premier membre satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre. (412).

Mittag-Leffler (G.). — Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. (414).

Nous résumons à la fois les diverses communications de l'auteur des 13 et 20 février, du 13 mars et du 3 avril.

M. Mittag-Leffler apprend à construire la fonction analytique la plus générale $F(x)$ jouissant des propriétés suivantes : Ses points singuliers (pôles et

points essentiels) forment la suite infinie $a_1, a_2, a_3, \ldots$ dont tous les termes sont distincts et tels que $\lim a_n = \infty$, pour n infini; aux environs de ces points, elle se comporte comme les fonctions

$$G_1\left(\frac{1}{x-a_1}\right), \quad G_2\left(\frac{1}{x-a_2}\right), \quad \ldots,$$

en désignant en général par

$$G_i(y) = c_1^{(i)} y + c_2^{(i)} y^2 + \ldots$$

une fonction entière, rationnelle ou transcendante, s'annulant pour $y = 0$; en sorte que, aux environs du point a_n par exemple, on puisse poser

$$F(x) = G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right) + P_n(x-a_n),$$

où $P_n(x-a_n)$ désigne une série procédant suivant les puissances entières et positives de $(x-a_n)$. Le procédé de formation repose sur ce que, sous la condition

$$|x| < |a_n|,$$

on peut développer $G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)$ en une série de la forme $\sum_{r=0}^{r=\infty} A_r^{(n)} x^r$ et sur ce que l'on peut, pour chaque point a_n, déterminer un nombre positif entier m_n tel que la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} F_n(x),$$

où l'on fait

$$F_n(x) = G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right) - \sum_{r=0}^{r=m_n} A_r^{(n)} x^r,$$

soit absolument convergente, sauf pour les points a.

Cette série

$$\sum F_n(x)$$

jouit évidemment des propriétés demandées. Le mode de démonstration est tout à fait semblable à celui que M. Weierstrass a employé, dans un Mémoire inséré dans le *Berliner Monatsbericht* du mois d'août 1880 et dont la traduction a paru dans le *Bulletin* pour établir la proposition moins générale, mais analogue, à laquelle le nom de M. Mittag-Leffler reste attaché. Au reste, ce dernier avait lui-même employé le même procédé de démonstration dans ses leçons à l'Université d'Helsingfors de l'année 1879.

Enfin la fonction la plus générale satisfaisant aux conditions imposées sera

$$\sum_1^{\infty} [F_n(x) + g_n(x)],$$

où $\sum_1^{\infty} g_n(x)$ représente une fonction entière arbitraire de x.

Il est bien clair que l'expression obtenue ne répond pas à tous les modes de discontinuité que l'on peut imposer à une fonction uniforme. A l'ensemble (P) des valeurs singulières distinctes peut correspondre un ensemble fini ou infini (P′) de valeurs limites, c'est-à-dire telles que dans le voisinage d'une quelconque d'entre elles il y ait une infinité de valeurs (P); l'existence de telles valeurs limites a été, comme l'on sait, établie par M. Weierstrass; de même l'ensemble de valeurs (P′) supposé infini fournit un ensemble de valeurs limites (P″), etc.; en continuant ainsi, il peut se faire qu'on arrive ou qu'on n'arrive pas, à un nombre fini de valeurs limites : on aperçoit ainsi la possibilité d'une classification des valeurs singulières; au surplus cette classification, pour un nombre infini de valeurs réelles comprises entre des limites finies, a été faite par M. Cantor et les beaux résultats de ce dernier s'étendent sans difficulté au cas qui nous occupe. A ces différents genres de discontinuités répondent des théorèmes généraux sur lesquels M. Mittag donne quelques indications et qu'il a développés dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Stockholm* (février 1882). Nous revenons maintenant au premier cas, celui où l'ensemble (P) des valeurs singulières a_1, a_2, a_3, ... n'a pas d'autre valeur limite que le point ∞.

Quand la fonction $F(x)$ est donnée, la première question à résoudre consiste à trouver les éléments $F_n(x)$ de la série

$$\Sigma F_n(x) + G(x)$$

qui la représente, ou, si l'on veut, les entiers M_n qui correspondent à chaque point singulier a_n ainsi que la fonction entière $G(x)$; l'auteur y parvient, dans un cas très général, par le procédé suivant :

Soit S un contour simplement connexe qui embrasse le point $z = 0$, ainsi que les seuls points singuliers $z = a_1, a_2, \ldots, a_n$ et soit x une valeur différente de zéro.

On aura

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{F(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^m = \mathcal{E}_x\left[\frac{F(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^m\right] + \mathcal{E}_0\left[\frac{F(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^m\right] + \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\mathcal{E}_{a_\nu}\left[\frac{F(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^m\right].$$

Si $z = 0$ appartient aux points $a_1, a_2, \ldots, a_n$, il ne sera pas compris sous le signe de sommation. En supposant d'abord que x n'ait aucune des valeurs a_1, $a_2, \ldots, a_n$, on aura

$$\mathcal{E}_x = F(x);$$

puis

$$-\mathcal{E}_0 = G_1(x) = F(0) + \frac{x}{1}F'(0) + \ldots + \frac{x^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}F^{(m-1)}(0)$$

si zéro n'est pas un point singulier,

$$\mathcal{E}_0 = G_\nu\left(\frac{1}{z}\right) + G_2(x)$$

si zéro est un point singulier, en supposant que, aux environs de ce point, on ait

$$F(z) = G_\nu\left(\frac{1}{z}\right) + C_0' + C_1' z + C_2' z^2 + \ldots$$

et en faisant

$$G_\nu(x) = C_0^{(\nu)} + C_1^{(\nu)} x + \ldots + C_{m-1}^{(\nu)} x^{m-1},$$

enfin on aura

$$\mathcal{E}_{a_\nu} = G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right) - \sum_{\mu=0}^{m-1} A_\mu^{(\nu)} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu;$$

si l'on représente cette quantité par $F_\nu(x)$ on aura donc une formule telle que

$$F(x) = G(x) + \sum_{\nu=0}^{\nu=n} F_\nu(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{F(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^m dz.$$

Si les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont tous des pôles, cette formule coïncide avec celle que l'auteur a donnée antérieurement dans une lettre à M. Hermite, publiée par le *Bulletin*. M. Mittag-Leffler en établit d'ailleurs une autre analogue, mais plus générale en prenant pour point de départ, au lieu de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{F(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^m dz = \int_S F(z)\left\{\frac{1}{z-x} - \frac{1}{z}\left[1 + \frac{x}{z} + \ldots + \left(\frac{x}{z}\right)^{m-1}\right]dz\right\},$$

la suivante :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S F(z)\left\{\frac{1}{z-x} - \frac{1}{z}\left[B_0 + B_1\left(\frac{x}{z}\right) + \ldots + B_{m-1}\left(\frac{x}{z}\right)^{m-1}\right]dz\right\}.$$

Si l'on fait maintenant croître les dimensions de la courbe S, de façon que chaque ligne embrasse la précédente et qu'il corresponde à chacun des points a une ligne S qui embrasse le point et si le module de l'intégrale précédente ou de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{F(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^m dz$$

peut être rendu pour une ligne S et les suivantes plus petit qu'une quantité arbitrairement petite δ, on parviendra au développement cherché

$$F(x) = G(x) + \Sigma F_\nu(x),$$

la série qui figure dans le second membre étant uniformément convergente partout ailleurs qu'aux points singuliers.

M. Mittag-Leffler applique cette méthode aux fonctions $F(x)$ de la forme

$$F(x) = R(y)\, r(x),$$

où

$$y = e^{x}$$

et où $R(y)$ et $r(x)$ sont des fonctions rationnelles en y et x, la première ayant une valeur finie pour $y = 0$ et $x = \infty$; il retrouve ainsi deux développements remarquables pour la fonction $\pi \cot \pi x$ déjà obtenus par M. Gyldén.

En prenant

$$F(x) = f(x)\, r(x),$$

où $f(x)$ est une fonction uniforme et monogène, n'ayant dans un domaine fini

qu'un nombre fini de points singuliers et qui est soumise aux conditions

$$f(x+2\omega) = \mu f(x),$$
$$f(x+2\omega') = \mu' f(x),$$

les modules de μ et μ' étant inférieurs à 1, et le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ étant imaginaire, on est conduit à des formules intéressantes dans la théorie des fonctions elliptiques.

Poincaré. — Sur les points singuliers des équations différentielles. (416).

L'auteur donne pour les points singuliers des équations différentielles de la forme

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

une classification analogue à celle qu'il avait déjà établie pour les équations différentielles à deux variables x, y.

Picard (*E.*). — Sur les formes des intégrales de certaines équations différentielles linéaires. (418).

Cette étude se rapporte à des équations différentielles linéaires dont toutes les intégrales ne sont pas régulières.

Appell. — Sur un cas de réduction des fonctions Θ de deux variables à des fonctions θ d'une variable. (421).

Si l'on considère la fonction

$$\Theta(x, y) = \sum_{n,\, m = -\infty}^{n,\, m = +\infty} e^{mx+ny+m^2\alpha+2mn\gamma+n^2\beta},$$

les périodes normales des fonctions abéliennes correspondantes sont

$$\text{Pour } x \ldots\ldots \quad 2\pi i, \quad 0, \quad 2\alpha, \quad 2\gamma,$$
$$\text{Pour } y \ldots\ldots \quad 0, \quad 2\pi i, \quad 2\gamma, \quad 2\beta;$$

si l'on suppose qu'entre les périodes relatives à y il y ait une relation de la forme

$$2k\gamma = 2k'\beta + 2k''\pi i,$$

ces k étant des nombres entiers, la fonction $\Theta(x, y)$ pourra s'exprimer au moyen de fonctions θ.

Le Paige (*C.*). — Sur les formes quadratiques à deux séries de variables. (424).

L'auteur établit que ces formes peuvent être ramenées à la forme réduite suivante :

$$x_1^2(a_0 y_1^2 + a_2 y_2^2) + 2x_1 x_2 b_{11} y_1 y_2 + x_2^2(c_0 y_1^2 + c_2 y_2^2).$$

André (D.). — Sur la divisibilité d'un certain quotient par les puissances d'une certaine factorielle. (426).

Si x et n sont des nombres entiers, l'expression

$$Q = \frac{(nx)!}{(x!)^n}$$

est toujours un nombre entier. M. Weill a démontré que Q était divisible par $n!$. M. André établit que, s'il est impossible d'exprimer x par une somme de moins de k puissances d'un même nombre premier, le quotient Q est divisible par la puissance $k^{\text{ième}}$ de la factorielle $n!$.

N° 8; 20 février.

Mouchez. — Observations méridiennes des petites planètes, faites à l'Observatoire de Paris pendant le quatrième trimestre de l'année 1881. (474).

Bigourdan. — Observations de la comète $b = \text{III}$ 1881, faites à l'Observatoire de Paris. (502).

Tacchini. — Sur la distribution des protubérances, des facules et des taches solaires observées à Rome pendant les deuxième et troisième trimestres de 1881. (505).

Tacchini. — Observations spectroscopiques solaires faites à l'Observatoire royal du Collège romain pendant le deuxième et le troisième trimestre de 1881. (506).

Laguerre. — Sur la distribution dans le plan des racines d'une équation algébrique dont le premier membre satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre. (508).

Cette étude est faite pour le polynôme hypergéométrique

$$F(-n, \alpha, \beta - n - 1, x).$$

Mittag-Leffler. — Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. (511).

Boussinesq. — Sur l'intégration de l'équation

$$\frac{d^n\varphi}{dt^n} - \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \dots\right)^n \varphi = 0.$$

(514).

Lévy (M.). — Sur la solution pratique du problème du transport de la force à de grandes distances. (517).

Michelson. — Sur le mouvement relatif de la Terre et de l'éther. (520).

N° 9; 27 février.

Darboux. — Sur les différentielles successives des fonctions de plusieurs variables et sur une propriété des fonctions algébriques. (575).

Poincaré. — Sur l'intégration des équations différentielles par les séries. (577).

Soient les équations

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_p}{X_p},$$

où les X sont des polynômes réels entiers, par rapport aux variables réelles x, en adjoignant aux rapports précédents le rapport supposé égal

$$\frac{ds}{1 + X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2},$$

l'auteur démontre qu'on peut toujours trouver un nombre α, tel que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ puissent s'exprimer par des séries ordonnées suivant les puissances de

$$\frac{e^{\alpha s} - 1}{e^{\alpha s} + 1}$$

et convergentes pour toutes les valeurs réelles de s. Les coefficients sont des fonctions rationnelles de α, des coefficients des polynômes X et des valeurs initiales des variables.

Picard (E.). — Sur certaines fonctions uniformes de deux variables indépendantes et sur un groupe de substitutions linéaires. (579).

Sur la recherche de fonctions de deux variables qui puissent être considérées comme les analogues des fonctions elliptiques modulaires, c'est-à-dire qui se reproduisent pour un groupe d'une infinité de substitutions linéaires faites sur les variables.

N° 10; 6 mars.

Hermite. — Sur quelques applications de la théorie des fonctions elliptiques. (594).

Laguerre. — Sur la détermination du genre d'une fonction transcendante entière. (635).

Si les facteurs primaires d'une fonction entière sont de la forme

$$e^{P(x)}\left(1-\frac{x}{a}\right),$$

où $P(x)=\frac{x}{a}+\frac{x^2}{2a^2}+\ldots+\frac{x^n}{na^n}$, n est le genre de la fonction.

Les fonctions de genre zéro et 1 ont des propriétés analogues aux fonctions rationnelles entières; ainsi entre deux racines réelles consécutives il y a une et une seule racine réelle de la dérivée. On en conclut que, si toutes les racines sont réelles, la dérivée qui a aussi toutes ses racines réelles est encore du premier genre.

Si le rapport $\frac{f'(z)}{z^n f(z)}$, où n désigne un nombre entier, tend vers zéro quand z croît indéfiniment, la fonction $f(z)$ est du genre n.

N° 11; 15 mars.

Brioschi. — Sur une application du théorème d'Abel. (686).

Dans une Communication insérée dans les *Comptes rendus* (14 février 1881), M. Brioschi a montré comment le théorème d'Abel se prêtait à l'étude de l'équation de Lamé; il montre comment, en suivant la voie qu'il a ouverte, on parvient aisément, pour $n = 3$, aux résultats de M. Hermite.

Mittag-Leffler. — Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. (713).

Goursat. — Sur les fonctions uniformes présentant des lacunes. (715).

Soient

(1) $$a_0, a_1, a_2, \ldots$$

une suite indéfinie de quantités imaginaires, et

(2) $$c_0, c_1, c_2, \ldots,$$

une seconde suite, telle que la série

$$\sum_0^\infty |c_n|$$

soit convergente.

Soit A une région du plan à contour simple ne contenant aucun des nombres a, dans cette région la série

(3) $$\sum_0^\infty \frac{c_n}{1-\frac{x}{a_n}}$$

est absolument convergente. Si maintenant l'on considère une aire T ne renfermant aucun point de la série (1) limitée par une ou plusieurs courbes ayant une tangente en chacun de leurs points, et telle que, sur un arc fini de l'une

d'elles, il y ait toujours une infinité de points de la série (1), on ne pourra continuer la fonction définie par la série (3) au delà de l'aire T.

N° 12; 20 mars.

Hermite. — Sur quelques applications de la théorie des fonctions elliptiques. (753).

Faye. — Lettre de M. Fuss sur les grands objectifs, trouvée par M. Truchot dans les papiers du conventionnel Romme. (768).

Bigourdan. — Observations des planètes (222) et (223) faites à l'Observatoire de Paris. (777).

Laguerre. — Sur les hypercycles. (778).

On sait que M. Laguerre appelle *semi-droite, cycle*, une droite, un cercle parcourus dans un sens déterminé.

Certaines courbes algébriques (*courbes de direction*) constituent un être géométrique quand on les regarde comme enveloppe d'une semi-droite, quand on attribue à leurs tangentes un sens déterminé; pour de telles courbes, l'enveloppe d'un cercle de rayon contenu, dont le centre les décrit, se décompose en deux courbes distinctes.

Les *hypercycles* rentrent dans cette classe de courbes; ils comprennent l'hypocycloïde à quatre rebroussements et toutes les anticaustiques de la parabole, les rayons incidents étant parallèles.

Étant donnée une tangente quelconque A à un hypercycle, il lui correspond une autre tangente A' telle que $A_1 A'$, et deux semi-droites fixes P et P' (que l'on peut appeler les *semi-droites fondamentales* de la courbe) forment un *système harmonique*. M. Laguerre entend par là que les deux semi-droites (A, A') et les deux semi-droites (P, P') touchent un même cycle, les points de contacts divisant harmoniquement le cycle.

A est alors dite conjuguée harmonique de A' par rapport à (P, P'). Deux tangentes telles que A, A' constituent un couple de tangentes conjuguées.

Cela posé, l'hypercycle est défini par la propriété suivante : les conjuguées harmoniques d'une semi-droite du plan D, par rapport aux couples de tangentes conjuguées de la courbe, enveloppent un cycle K.

M. Laguerre donne diverses propriétés curieuses de ces courbes.

Mittag-Leffler. — Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. (781).

Abdank-Abakanowicz. — Sur l'intégrateur mécanique. (783).

N° 13; 27 mars.

Coggia. — Comète découverte en Amérique, le 19 mars 1881; observations faites à l'Observatoire de Marseille. (829).

Bigourdan. — Observations de la nouvelle comète *a* 1882, faites à l'Observatoire de Paris. (829).

Tacchini. — Observations des protubérances, des facules et des taches solaires, faites à l'Observatoire du Collège Romain, pendant le quatrième trimestre de 1881.

Laguerre. — Sur les hypercycles. (832).

Darboux. — Sur le problème de Pfaff. (835).

M. Darboux montre comment la méthode de Pfaff, pour intégrer une équation aux dérivées partielles, convenablement appliquée, devient aussi simple que toutes les autres.

Considérons une forme

$$(1)\qquad \theta_d = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \ldots + X_n\,dx_n,$$

où $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des fonctions connues de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, à un nombre pair de variables.

Soit

$$(2)\qquad a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

le premier système à intégrer, d'après Pfaff, en

$$(3)\qquad \begin{cases} a_{11}\,dx_1 + \ldots + a_{1n}\,dx_n = X_1\,dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\,dx_1 + \ldots + a_{nn}\,dx_n = X_n\,dt, \end{cases}$$

où t est une variable introduite pour la symétrie. Ce système admet $n-1$ intégrales indépendantes de t. Si l'on désigne ces $n-1$ intégrales par $y_1, \ldots, y_{n-1}$, on démontre que l'expression θ_d est réductible à la forme suivante :

$$(4)\qquad \theta_d = K(Y_1\,dy_1 + \ldots + Y_{n-1}\,dy_{n-1}),$$

où les quantités Y sont des fonctions des seules variables y.

Puisque le système (3) a $n-1$ intégrales seulement, une au moins des variables $x, \ldots, x_n$, par exemple, ne sera pas une intégrale. Parmi les différents systèmes d'intégrales indépendantes, nous choisirons celles qui se réduisent à $x_1, \ldots, x_{n-1}$, pour $x_n = x_n^0$, en sorte que pour cette valeur y_i se réduise à x_i. Supposons que, pour cette même valeur, K se réduise à $\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$. On peut, sans changer la forme de l'équation (4), diviser K par $\psi(y_1, \ldots, y_{n-1})$, à condition de multiplier par la même fonction toutes les quantités Y ; alors la nouvelle valeur de K se réduira à 1 pour $x_n = x_n^0$, et l'on aura l'identité

$$X_1\,dx_1 + \ldots + X_n\,dx_n = K(Y_1\,dy_1 + \ldots + Y_{n-1}\,dy_{n-1}),$$

où les valeurs de K, y_i, se réduiront, pour $x_n = x_n^0$, à 1 et à x_i.

On aura donc, pour $x_n = x_n^0$,

$$X_1^0\,dx_1 + \ldots + X_{n-1}^0\,dx_{n-1} = Y_1^0\,dx_1 + \ldots + Y_{n-1}^0\,dx_{n-1}.$$

où Y'_i désigne le résultat de la substitution de $x_1, \ldots, x_{n-1}$ à $y_1, \ldots, y_n$, dans Y_i : donc

$$Y''_i = Y^0_i.$$

Ainsi, pour obtenir la forme qui multiplie K dans l'équation (4), il suffit de faire $x_n = x^0_n$ dans l'équation (1), puis de remplacer $x_1, \ldots, x_{n-1}$ par $y_1, \ldots, y_{n-1}$. Une proposition analogue a lieu pour n impair.

Soit maintenant à intégrer une équation aux dérivées partielles

$$(5) \qquad p_1 = f(z, x_1, \ldots, x_n, p_2, \ldots, p_n),$$

et soit

$$dz - f\,dx_1 - p_2\,dx_2 - \ldots - p_n\,dx_n$$

la forme de Pfaff correspondante à cette équation, forme qui contient les $2n$ variables $x_1, \ldots, x_n, z, p_2, \ldots, p_n$. Le premier système de Pfaff relatif à cette forme sera

$$dx_1 = -\frac{dx_2}{\frac{\partial f}{\partial p_2}} = \ldots = -\frac{dx_n}{\frac{\partial f}{\partial p_n}} = \frac{dp_2}{\frac{\partial f}{\partial x_2} + p_2\frac{\partial f}{\partial z}} = \ldots = \frac{dp_n}{\frac{\partial f}{\partial x_n} + p_n\frac{\partial f}{\partial z}}$$

et l'on voit que x_1 n'en sera jamais une intégrale. Si donc nous appliquons le théorème précédent et que nous désignions par (z), (x_i), (p_k) les $2n-1$ intégrales qui se réduisent respectivement à z, x_i, p_i, quand on fait $x_1 = x^0_1$, nous aurons

$$(6) \quad dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n = \text{K}\,[\,d(z) - (p_2)\,d(x_2) - \ldots - (p_n)\,d(x_n)\,],$$

c'est-à-dire que nous obtiendrons du premier coup la forme réduite qui devait être le terme de tous les calculs.

Picard (*É.*). — Sur un groupe de substitutions linéaires. (837).

Étude arithmétique des substitutions linéaires introduites par l'auteur dans sa communication du 27 février et par lesquelles se reproduisent des fonctions uniformes de deux variables indépendantes.

Poincaré. — Sur les groupes discontinus. (840).

M. Picard a donné un exemple de groupes discontinus contenus dans le groupe linéaires à deux variables

$$\left(x,\ y,\ \frac{ax + by + c}{a''x + b''y + c''},\ \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''}\right).$$

M. Poincaré indique diverses méthodes pour former de tels groupes discontinus. Le procédé suivant fournit, par exemple, des groupes de substitutions de cette forme, discontinus pour les valeurs réelles de x et de y, ce qui entraîne la discontinuité pour les valeurs imaginaires de ces variables, au moins dans une certaine étendue.

Soit une forme quadratique $\text{F}(x, y, z)$ à coefficients entiers, elle admettra une infinité de substitutions semblables à coefficients entiers

$$(x,\ y,\ z,\ ax + by + cz,\ a'x + b'y + c'z,\ a''x + b''y + c''z);$$

les substitutions correspondantes

$$\left(x,\ y,\ \frac{ax+by+cz}{a''x+b''y+c''z},\ \frac{a'x+b'y+c'z}{a''x+b''y+c''z}\right)$$

formeront un groupe discontinu.

M. Poincaré montre encore comment de chaque groupe fuchsien on peut déduire un groupe formé de substitutions de la forme (1), à coefficients réels, et qui est discontinu pour les valeurs réelles et, par conséquent, aussi pour les valeurs imaginaires de x et de y.

Léauté. — Sur l'application de la résistance des matériaux aux pièces des machines. (843).

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, fondé par J. LIOUVILLE et continué par H. RESAL. — 3e série.

Tome VII. — Année 1881.

West. — Exposé des méthodes générales en Mathématiques; résolution et intégration des équations; applications diverses, d'après Hoené Wronski. (5-31).

Resal. — Sur quelques théorèmes de Mécanique. (32-48).

I. — Applications de ce théorème, dû à M. Habich : L'accélération d'un point libre, lorsque sa direction est constante, est proportionnelle au rapport du cube de la vitesse du mobile au rayon de courbure de sa trajectoire.

II. — L'accélération d'un point dirigé vers un centre fixe est proportionnelle au cube de la vitesse, au rayon vecteur et à la courbure de la trajectoire.

III. — Du problème inverse du mouvement d'un point matériel sur une surface de révolution.

Recherche des conditions auxquelles doivent satisfaire les composantes, suivant la méridienne et la tangente au parallèle d'une force capable de faire décrire au mobile une courbe donnée.

Genty. — Applications mécaniques du Calcul des quaternions. (49-70).

Exposition, au moyen de la méthode des quaternions, des principaux résultats obtenus par Minding et M. Darboux dans la théorie de l'équilibre astatique.

Pepin (le P.). — Sur les surfaces osculatrices. (71-108).

La théorie de ces surfaces conduit (HERMITE, *Cours d'Analyse*, t. I, p. 144) à la

recherche des solutions entières de l'équation

$$m^3 + 6m^2 + 11m = 3(n+1)(n+2);$$

l'auteur parvient à la conclusion suivante :

Si, outre les surfaces du premier, du cinquième et du vingtième degré, il en existe d'autres que l'on puisse rendre osculatrices en des points arbitraires d'une surface donnée, leur degré m est supérieur à 675 et l'ordre n de leur contact est supérieur à 13000.

Resal. — Sur les propriétés d'une courbe qui roule sur une droite. (109).

West. — Digressions sur les séries. (111-128).

Resal. — Recherches sur l'Électrodynamique. (129-146).

Démonstration de la loi d'Ampère. — Action d'un courant fermé sur un élément de courant. — Action sur un élément de courant d'un courant circulaire dont le rayon est très petit par rapport à la distance du centre à l'élément considéré. — Action d'un solénoïde sur un élément de courant. — Action d'un courant fermé sur l'un des pôles du solénoïde. — Action d'un solénoïde sur l'un des pôles d'un autre solénoïde.

Boussinesq. — Coup d'œil sur la théorie des séries trigonométriques les plus usuelles et sur une raison naturelle de leur convergence, applicable aux autres développements de fonctions arbitraires employés en Physique mathématique. (147-160).

Sire (G.). — Le dévioscope : appareil donnant directement le rapport qui existe entre la vitesse angulaire de la Terre et celle d'un horizon quelconque autour de la verticale du lieu. (161-166).

André (D.). — Sur les permutations alternées. (167-184).

Considérons n éléments distincts $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et formons-en toutes les permutations. Si, dans l'une quelconque d'entre elles, on retranche chaque indice du suivant, on obtiendra une suite de $n-1$ différences, dont aucune n'est égale à zéro, et qui, dans toutes les permutations, sauf deux, sont les unes positives, les autres négatives. Lorsque, tout le long de cette suite, ces différences sont alternativement positives et négatives, la permutation correspondante est dite *alternée*.

Le nombre des permutations alternées de n éléments distincts est toujours pair; M. André le désigne par $2A_n$ et établit la relation

$$2A_{n+1} = C_n^0 A_0 A_n + C_n^1 A_1 A_{n-1} + C_n^2 A_2 A_{n-2} + \ldots + C_n^n A_n A_0.$$

Cette égalité, vraie encore pour $n = 1$, n'est plus vraie pour $n = 0$

$$(A_0 = A_1 = A_2 = 1).$$

On a

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=A_0+A_1\frac{x}{1!}+\ldots+A_n\frac{x^n}{n!},$$

$$\operatorname{séc} x = A_0 + A_2\frac{x^2}{2!}+A_4\frac{x^4}{4!}+\ldots,$$

$$\operatorname{tang} x = A_1\frac{x}{1}+A_3\frac{x^3}{3}+A_5\frac{x_5}{5}+\ldots.$$

M. André donne en outre diverses relations du second et du premier degré entre les coefficients A_n et les coefficients d'indice moindre.

Léauté. — Développement d'une fonction à une seule variable, dans un intervalle donné, suivant les valeurs moyennes de cette fonction et de ses dérivées successives dans cet intervalle. (185).

L'auteur se propose de déterminer un polynôme en x de degré n tel que sa valeur moyenne et celles de ses premières dérivées successives, dans un intervalle donné, soient égales à $n+1$ quantités données. Si l'on suppose que l'intervalle s'étend de $-h$ à $+h$, on est ramené, en désignant les quantités données par $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$, à déterminer le polynôme y par les équations

$$\frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} y\,dx = Y_0,$$

$$\frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h}\frac{dy}{dx}\,dx = Y_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h}\frac{d^n y}{dx^n}\,dx = Y_n.$$

On trouve aisément que l'on peut poser

$$y = P_0Y_0 + P_1Y_1 + \ldots + P_nY_n,$$

les symboles $P_0, \ldots, P_n$ désignant des polynômes en x de degré égal à leur indice et indépendants des quantités Y et satisfaisant à l'équation générale

$$P_{n-1} = \frac{dP_n}{dx}.$$

En posant ensuite

$$P_n = B_n\frac{x^n}{n!} + B_{n-1}\frac{x^{n-1}h}{(n-1)!} + \ldots + B_0h^n,$$

on reconnaît que les coefficients numériques $B_0, B_1, \ldots, B_n$ forment une suite indépendante de l'indice du polynôme P que l'on considère : M. Léauté donne pour déterminer ces coefficients la formule

$$2n!\,B_{2n} = \left(\frac{d^{2n}\dfrac{2x}{e^x - e^{-x}}}{dx^{2n}}\right)_{x=0},$$

$$B_{2n+1} = 0.$$

où

$$\nabla\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta^2}.$$

En se servant de l'identité (1) et en posant

$$\int_s g\psi\,d\xi = X,\quad \int_s g\psi\,d\eta = Y,\quad \int_s g\psi\,d\zeta = Z,$$

on obtient finalement

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \int [\alpha\Delta_2 g + \Delta_1(g,\alpha)]\psi\,d\sigma + \int \Delta_1(g,\xi)\frac{\partial\psi}{\partial n}\,d\sigma$$
$$-\int g\nabla\psi\,d\sigma + \int \alpha\frac{\partial g}{\partial\nu}\psi\,ds + \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}.$$

Pour le potentiel newtonien, le terme où figure $\nabla\psi$ disparaît; si le contour est nul, les trois derniers termes disparaissent en outre et l'on retombe encore sur une des formules de M. Neumann.

Si maintenant on admet la continuité (quand on traverse la surface) de la fonction

$$V = \int \frac{h\,d\sigma}{r},$$

et la discontinuité de la fonction

$$W = \int g\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma,$$

discontinuité définie par la formule

$$W_{n} - W_{n} = 4\pi g,$$

les formules précédentes permettent d'obtenir les formules relatives au passage de la surface pour les dérivées première et seconde : pour les dérivées premières on a

$$\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n'} = -4\pi h.$$
$$\frac{\partial W}{\partial n} + \frac{\partial W}{\partial n'} = 0.$$

Pour les dérivées secondes, on a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial n'^2} = 4\pi h\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$
$$\frac{\partial^2 W}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial n'^2} = -4\pi\Delta_2 g.$$

La première a été donnée par M. Neumann, elle avait été déjà démontrée avec quelques restrictions par M. Paci (*Journal de Battaglini*, t. XV); la seconde est nouvelle.

Enfin M. Beltrami rattache ces dernières formules à une proposition plus générale; en considérant un système triple de surfaces u, v, w, dont les deux premières sont orthogonales à la troisième, la surface considérée appartiendra à la troisième famille pour la valeur o du paramètre w; le carré de l'élément linéaire

de l'espace sera évidemment de la forme

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 + K^2\,dw^2;$$

on suppose que w croît dans la direction de la normale positive à la surface σ.

En continuant de désigner par Δ_1 et Δ_2 les paramètres différentiels du premier et du second ordre relatifs à l'hypothèse $dw = 0$ et en désignant par ∇_1, ∇_2 les quantités analogues relatives à l'espace à trois dimensions, l'auteur établit la formule

$$\nabla_2\varphi = \Delta_2\varphi + \frac{\Delta_1(\varphi, K)}{K} + \frac{d^2\varphi}{ds^2} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{d\varphi}{ds},$$

où R_1, R_2 sont les rayons de courbure principaux de la surface $w = \text{const.}$ au point u, v, w et où s est l'arc de la courbe d'intersection des surfaces $u = \text{const.}$ $v = \text{const.}$, compté positivement dans le sens où w croît.

En supposant ensuite que la variable w soit le segment n de la normale à σ au point u, v, en sorte que la surface $w = \text{const.}$ soit une surface parallèle à σ, on trouve

$$\nabla_2\varphi = \Delta_2\varphi + \frac{d^2\varphi}{dn^2} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{d\varphi}{dn},$$

puis l'équation limite, dont le sens est assez clair,

$$\frac{d^2\varphi}{dn^2} - \frac{d^2\varphi}{dn'^2} + \Delta_2(\varphi_n - \varphi_{n'}) + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{d\varphi}{dn} - \frac{d\varphi}{dn'}\right) = (\nabla_2\varphi)_n - (\nabla_2\varphi)_{n'}.$$

C'est de cette équation que l'auteur déduit les deux formules dont il a été question plus haut.

Kantor (*G.*). — Combien y a-t-il de groupes cycliques dans une transformation quadratique du plan. (64-70; all.).

Si N est un nombre entier qui, décomposé en facteurs premiers, a la forme

$$N = a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_\nu^{m_\nu},$$

le nombre des groupes de points d'un plan tels que chacun d'eux, en appliquant N fois une transformation quadratique quelconque du plan, revienne sur lui-même, est égal à

$$Z_N = \frac{2^N - \sum 2^{\frac{N}{a_1}} + \sum 2^{\frac{N}{a_1 a_2}} - \dots + (-1)^\nu 2^{\frac{N}{a_1 a_2 \dots a_\nu}}}{N}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{\mu=0}^{\mu=\nu}\sum_{r} (-1)^\mu 2^{\frac{N}{a_{r_1} a_{r_2} \dots a_{r_\mu}}},$$

où on doit prendre pour $r_1, r_2, \dots, r_\mu$ chaque combinaison de μ nombres différents de la suite $1, 2, \dots, \nu$.

Ainsi, pour toute transformation quadratique, il existe un couple de points involutifs, deux groupes périodiques de trois points, trois groupes de quatre points, 6, 9, 18, ... groupes périodiques de 5, 6, 7 points.

Le fait que Z^N est nécessairement entier conduit à un intéressant théorème d'Arithmétique, qui, pour N premier, se réduit au théorème de Fermat.

Kantor (*G.*). — Réponse à la même question pour les transformations de Cremona. (71-73; all.).

Dans une transformation rationnelle du $a^{\text{ième}}$ ordre d'un plan, il y a toujours

$$H_N = \frac{a^N - \left(a^{\frac{N}{f_1}} + \ldots + a^{\frac{N}{f_\nu}}\right) + \left(a^{\frac{N}{f_1 f_2}} + \ldots + a^{\frac{N}{f_{\nu-1} f_\nu}}\right) - \ldots + (-1)^\nu a^{\frac{N}{f_1 f_2 \ldots f_\nu}}}{N}$$

groupes de N points pour lesquels la transformation est périodique, en ce sens que chaque point du groupe, après N transformations, est ramené à la position primitive : $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ sont les facteurs premiers distincts du nombre N.

Le fait que H_N est un nombre entier conduit à une nouvelle généralisation du théorème de Fermat.

Brioschi. — Sur la génération d'une classe d'équations différentielles linéaires qui s'intègrent au moyen des fonctions elliptiques. (74-78).

Développement d'un point particulier d'un Mémoire présenté par l'auteur à l'Académie des Lincei (juin 1880).

Christoffel. — Preuve algébrique du théorème concernant le nombre des intégrales de première espèce linéairement indépendantes. (81-100; all.).

Ce travail se rapporte aux fondements de la théorie des fonctions abéliennes; il concerne spécialement, d'une part, la détermination d'un nombre des *intégrandes* w' de première espèce, linéairement indépendantes, qui appartiennent à une équation donnée

$$F(s'' \mid z''') = 0,$$

et d'autre part l'établissement d'un critérium pour reconnaître l'irréductibilité de F ou le nombre des facteurs irréductibles qui entrent dans F.

Hermite. — Sur les équations différentielles linéaires du second ordre. (101-103; fr.).

L'auteur montre comment, connaissant le produit $F(x)$ de deux solutions U, V de l'équation

$$y'' + py' + qy = 0,$$

on peut former l'équation du second ordre ayant pour intégrale l'expression

$$Z = CU^\omega + C'V^\omega,$$

quelle que soit l'expression ω; cette équation est

$$Gz'' + Hz' + Kz = 0.$$

en posant

$$G = F(x),$$
$$H = (\omega - 1)F'(x) - pF(x),$$
$$K = \frac{1}{2}(\omega^3 - \omega)F'''(x) + \frac{1}{2}(\omega^2 - \omega)pF'(x) + \omega^2 F(x).$$

Le résultat appliqué à l'équation de Lamé donne un type d'équations linéaires dont les coefficients sont des fonctions doublement périodiques uniformes, l'intégrale cessant d'être uniforme quand ω n'est pas entier.

Pour $\omega = 0$, on trouverait l'équation

$$F(x)z'' + [F'(x) + pF(x)]z' = 0,$$

dont l'intégrale est

$$z = A + B \log \frac{U}{V}.$$

Brioschi. — Sur les équations différentielles du tétraèdre, de l'octaèdre et de l'icosaèdre. (104-128).

M. Brioschi part du fait suivant :

Les trois expressions

(1) $$t = 1 - az^2,$$

(2) $$t = \frac{az^6 + b}{z^2},$$

(3) $$t = \frac{az^{12} + bz^6 + c}{z^2}$$

vérifient l'équation

$$t^3 - 1 = \left(\frac{dt}{dz}\right)^2 R(z),$$

où l'on suppose, suivant les cas,

(1) $$R = \frac{1}{4a}(a^2 z^4 + 3az^2 + 3),$$

(2) $$R = \frac{1}{16}(az^6 + 4b),$$

(3) $$R = \frac{1}{4 \cdot 5^2}\left(az^{12} - \frac{11}{5}bz^6 + 5^2 c\right),$$

pourvu que l'on ait, suivant les cas,

(2) $$ab^2 = \frac{4}{27},$$

(3) $$b^2 = 20ac, \quad bc^2 = 2\frac{5^3}{12^3}.$$

On trouve d'ailleurs aisément que l'équation différentielle entraîne la suivante :

$$2(t^3 - 1)\frac{d^3 z}{dt^3} + 9t^2\frac{d^2 z}{dt^2} + (6 + \rho)t\frac{dz}{dt} + \frac{1}{2}\rho z = 0.$$

où

$$\rho = \frac{2(n-1)}{(n-2)},$$

n étant, suivant les cas, le degré 4, 6, 12 de R en z.

Or, en faisant $P = \frac{3}{2}\frac{t^2}{t^3-1}$, $Q = -\frac{1}{8}\rho\frac{t}{t^3-1}$.

Cette dernière équation du troisième ordre n'est autre que celle qui est vérifiée par une forme quadratique à coefficients constants de deux solutions v_1 et v_2 de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 v}{dt^2} - P\frac{dv}{dt} - Qv = 0.$$

Or, en supposant $z = v_1 v_2$ et en faisant

$$Z(t) = \int \frac{dt}{z\sqrt{t^3-1}} = \int \frac{dz}{z\sqrt{R(z)}},$$

les intégrales v_1, v_2 ont les valeurs (algébriques en z)

$$v_1 = \sqrt{z}\, e^{\frac{1}{2}CZ(t)}, \quad v_2 = \sqrt{z}\, e^{-\frac{1}{2}CZ(t)},$$

et l'on trouve, suivant les cas (1), (2), (3),

$$C = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, \quad C = \frac{3}{4}\sqrt{b}, \quad C = \frac{3}{5}\sqrt{c}.$$

Quant à la détermination de z au moyen de Z, M. Brioschi parvient aux résultats suivants :

(1) $$Z = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}}\log\omega,$$

où

$$\omega = \frac{1}{az^3}\left[4\sqrt{aR} - (az^2+2)\sqrt{3}\right].$$

Puis

$$v_1 = \sqrt{\varphi(z)}, \quad v_2 = \sqrt{\psi(z)},$$

où

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{ia}}\left[\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2(1-az^2)} + i\varepsilon^2\sqrt{1-\varepsilon(1-az^2)}\right],$$

$$\psi(z) = \frac{1}{\sqrt{-ia}}\left[\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2(1+az^2)} - i\varepsilon^2\sqrt{1-\varepsilon(1+az^2)}\right].$$

$i = \sqrt{-1}$, ε est une racine cubique imaginaire de l'unité.

De là résultent les égalités

$$f(v_1, v_2) = v_1^4 + 2\sqrt{3}\, v_1^2 v_2^2 - v_2^4 = -\frac{4\sqrt{3}}{a},$$

$$h(v_1, v_2)\sqrt{3} = v_1^4 - 2\sqrt{3}\, v_1^2 v_2^2 - v_2^4 = -\frac{4\sqrt{3}}{a}t.$$

(2) $$Z = \frac{2}{3\sqrt{b}}\log\omega.$$

où

$$\omega = \frac{2}{z^3\sqrt{a}}(2\sqrt{R} - \sqrt{b});$$

puis

$$v_1 = \left[\frac{\varphi(z)}{z}\right]^{\frac{1}{4}}, \quad v_2 = \left[\frac{\psi(z)}{z}\right]^{\frac{1}{4}},$$

où

$$\varphi(z) = \frac{2}{\sqrt{a}}(2\sqrt{R} - \sqrt{b}), \quad \psi(z) = \frac{2}{\sqrt{a}}(2\sqrt{R} + \sqrt{b}),$$

d'où résultent les égalités

$$f(v_1, v_2) = v_1 v_2(v_1^4 - v_2^4) = -4\sqrt{\frac{b}{a}} = -\frac{8}{\sqrt[4]{108a^2}},$$

$$6^2 h(v_1, v_2) = -(v_1^8 + 14 v_1^4 v_2^4 + v_2^8) = -\frac{16}{a}t.$$

(3) $$Z = \frac{1}{3\sqrt{c}}\log\omega,$$

où

$$\omega = \frac{5}{2bz^6}\left(4.5^2\sqrt{cR} - \frac{11}{5}bz^6 - 2.5^2 c\right);$$

puis

$$v_1 = \sqrt{z}.\omega^{\frac{1}{10}}, \quad v_2 = \sqrt{z}.\omega^{-\frac{1}{10}};$$

d'où résultent les égalités

$$f(v_1, v_2) = v_1 v_2(v_1^{10} + 11 v_1^5 v_2^5 - v_2^{10}) = -2.5^3\frac{c}{b},$$

$$\overline{12}^2 h(v_1, v_2) = -[v_1^{20} + v_2^{20} - 228 v_1^5 v_2^5(v_1^{10} - v_2^{10}) + 494 v_1^{10} v_2^{10}] = -\frac{5^5}{a}t.$$

Dans chacun des cas (1), (2), (3), $h(v_1, v_2)$ est la hessienne de la forme binaire correspondante $f(v_1, v_2)$, qui, dans chaque cas, est égale à une constante.

Voici maintenant l'objet de la seconde Partie du Mémoire de M. Brioschi.

Si dans l'équation différentielle linéaire en v et t dont il a été question plus haut, on fait $t^3 = T$, on tombe sur l'équation hypergéométrique

(4) $$\frac{d^2v}{dT^2} + \frac{1}{6}\frac{4 - 7T}{T(1 - T)}\frac{dv}{dT} + \frac{1}{72}\frac{1}{T(1 - T)}v = 0.$$

Ceci posé, si dans l'équation hypergéométrique générale, écrite sous la forme

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} + \frac{1 - \lambda - (2 - \lambda - \nu)\xi}{\xi(1 - \xi)}\frac{dy}{d\xi} + \frac{1}{4}\frac{(1 - \lambda - \nu)^2 - \mu^2}{\xi(1 - \xi)}y = 0,$$

on fait la substitution

$$\xi = \frac{c - b}{c - a}\,\frac{x - a}{x - b},$$

elle deviendra

(5) $$y'' + py' + qy = 0,$$

les coefficients p, q ayant des valeurs qu'il est aisé de calculer.

M. Brioschi détermine les valeurs des quantités λ, μ, ν, a, b, c pour lesquelles les équations différentielles (4) et (5) se transforment l'une dans l'autre, c'est-à-dire pour lesquelles d'une intégrale particulière y de la seconde on peut déduire l'intégrale particulière correspondante v de la première au moyen de la relation

$$y = wv,$$

w étant une fonction de x, avec la condition que I soit une fonction rationnelle de x.

Il établit d'abord la relation

$$(6)\qquad \frac{I'}{I^{\frac{2}{3}}\sqrt{I-1}} = \frac{D}{C}\,\frac{e^{-\int p\,dx}}{w^2} = \frac{D}{C}\,\frac{1}{r_1^2},$$

en posant

$$w = r_1 e^{-\frac{1}{2}\int p\,dx},$$

où D et C sont des constantes convenables, et déduit de là la forme de la fonction rationnelle I de x

$$(7)\qquad I = \delta\,\frac{\Psi^3(x)}{N(x)}.$$

δ est une constante, $\Psi(x)$ est un polynôme du quatrième degré qui dépend de a, b, c, λ, μ, ν et de trois nombres entiers positifs α, β, γ non supérieurs à c; $N(x)$ a la forme

$$\frac{[(x-a)(x-b)(x-c)]^6}{\Psi'(x)},$$

où

$$\Psi'(x) = (x-a)^\alpha(x-b)^\beta(x-c)^\gamma = r_1^{12}.$$

Entre les polynômes $\Psi(x)$ et $N(x)$ doit exister une certaine relation qui, regardée comme une identité, fournit précisément les conditions cherchées ; enfin, la fonction w a la forme

$$(x-a)^{\alpha_1}(x-b)^{\beta_1}(x-c)^{\gamma_1},$$

les nombres α_1, β_1, γ_1 dépendant d'une façon simple des nombres α, β, γ, λ, μ, ν. Une discussion approfondie des conditions conduit à la solution complète du problème posé.

Voici maintenant quelques conséquences :

En désignant par $f(y_1, y_2)$ ce que devient la forme $f(v_1, v_2)$ précédemment considérée, on voit que

$$f(y_1, y_2) = w^n f(v_1, v_2), \quad (n = 4, 6, 12).$$

Mais $f(v_1, v_2)$ est dans tous les cas une constante G; on a donc

$$f(y_1, y_2) = w^n G.$$

L'équation (6) donne

$$\frac{dI}{I^{\frac{2}{3}}\sqrt{I-1}} = \frac{D}{C}\,\frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta(x-c)^\gamma}},$$

et pour chacune des valeurs trouvées par l'auteur pour les nombres α, β, γ on

a les relations correspondantes entre I et x qui réduisent aux fonctions elliptiques les transcendantes du second membre.

Enfin de la valeur de w et des relations trouvées entre y et v, on déduit les intégrales des diverses équations différentielles linéaires du second ordre de forme (5), en supposant connues les intégrales particulières v_1, v_2 dont on a donné précédemment les expressions.

Ces équations différentielles sont celles que M. Brioschi désigne sous le nom d'*équations du tétraèdre, de l'octaèdre et de l'icosaèdre* à cause des relations trouvées par M. Schwarz, dans son Mémoire sur la série hypergéométrique, entre ces équations et ces corps réguliers.

Schwarz (*H.-A.*). — Généralisation d'un théorème fondamental de l'Analyse. (129-136; all.).

En admettant que le plan qui passe par trois points d'une courbe, voisins d'un point M, a pour limite le plan osculateur en M quand les trois points tendent indépendamment vers le point M, on est conduit à cette proposition, que le rapport

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi(t_1) & \psi(t_1) \\ 1 & \varphi(t_2) & \psi(t_2) \\ 1 & \varphi(t_3) & \psi(t_3) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \end{vmatrix}$$

est compris entre deux limites qui doivent se rapprocher indéfiniment lorsque les quantités t_1, t_2, t_3 tendent indépendamment vers la limite commune t_0; on suppose, bien entendu, l'existence des dérivées secondes des fonctions φ et ψ.

M. Schwarz établit en effet que ce rapport est compris entre les limites supérieure g et inférieure k du déterminant

$$\begin{vmatrix} \varphi'(t') & \psi'(t') \\ \varphi''(t'') & \psi''(t'') \end{vmatrix},$$

où t' et t'' satisfont aux conditions

$$t_1 \leqq t' \leqq t_3, \quad t' \leqq t'' \leqq t_3.$$

Voici sa démonstration : partant de l'inégalité

$$k \leqq \begin{vmatrix} \varphi'(t') & \psi'(t') \\ \varphi''(t'') & \psi''(t'') \end{vmatrix} \leqq g,$$

multipliant par dt'' et intégrant entre les limites t' et t'', on trouve

$$k \begin{vmatrix} 1 & t' \\ 1 & t'' \end{vmatrix} \leqq \begin{vmatrix} \varphi'(t') & \psi'(t') \\ \varphi'(t'') & \psi'(t'') \end{vmatrix} \leqq g \begin{vmatrix} 1 & t' \\ 1 & t'' \end{vmatrix};$$

multipliant par dt' et intégrant entre les limites t_1 et t', il vient

$$k \begin{vmatrix} t' - t_1 & \frac{1}{2}(t'^2 - t_1^2) \\ 1 & t'' \end{vmatrix} \leqq \begin{vmatrix} \varphi(t') - \varphi(t_1) & \psi(t') - \psi(t_1) \\ \varphi'(t'') & \psi'(t'') \end{vmatrix}$$
$$\leqq g \begin{vmatrix} t' - t_1 & \frac{1}{2}(t'^2 - t_1^2) \\ 1 & t'' \end{vmatrix}.$$

multipliant de nouveau par dt'' et intégrant entre les limites t_2 et t'', où $t_2 < t''$, on obtient

$$k \begin{vmatrix} t'-t_1 & \frac{1}{2}(t'^2-t_1^2) \\ t''-t_2 & \frac{1}{2}(t''^2-t_2^2) \end{vmatrix} \leqq \begin{vmatrix} \varphi(t')-\varphi(t_1) & \psi(t')-\psi(t_1) \\ \varphi(t'')-\varphi(t_2) & \psi(t'')-\psi(t_2) \end{vmatrix}$$
$$\leqq g \begin{vmatrix} t'-t_1 & \frac{1}{2}(t'^2-t_1^2) \\ t''-t_2 & \frac{1}{2}(t''^2-t_2^2) \end{vmatrix};$$

faisant enfin $t' = t_2$, $t'' = t_3$, on parvient aux deux inégalités à démontrer.

Plus généralement, soient $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$, n fonctions réelles de la variable réelle t qui, ainsi que leurs dérivées du premier, du deuxième, ..., du $n-1^{\text{ième}}$ ordre sont finies, continues, uniformes pour toutes les valeurs de t que l'on considère;

Soient $t_1, t_2, \ldots, t_n$, n valeurs distinctes de la variable t comprises dans l'intervalle $a\ldots b$, le quotient

$$\begin{vmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) & \ldots & f_n(t_1) \\ f_1(t_2) & f_2(t_2) & \ldots & f_n(t_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1(t_n) & f_2(t_n) & \ldots & f_n(t_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \ldots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \ldots & t_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \ldots & t_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

n'est pas plus grand que

$$\frac{g}{1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!}$$

ni plus petit que

$$\frac{k}{1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!},$$

où g est la limite supérieure, k la limite inférieure des valeurs du déterminant

$$\begin{vmatrix} f_1(t') & f_2(t') & \ldots & f_n(t') \\ f_1'(t'') & f_2'(t'') & \ldots & f_n'(t'') \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^{(n-1)}(t^{(n)}) & f_2^{(n-1)}(t^{(n)}) & \ldots & f_n^{(n-1)}(t^{(n)}) \end{vmatrix},$$

sous les conditions

$$a \leqq t' \leqq b, \quad t' \leqq t'' \leqq b, \quad t'' \leqq t''' \leqq b, \quad \ldots, \quad t^{(n-1)} \leqq t^{(n)} \leqq b.$$

Hermite. — Sur une représentation analytique des fonctions au moyen des transcendantes elliptiques. (135).

Cette Communication et la suivante se rapportent à un mode de représentation des fonctions donné par M. Hermite, dans son cours à la Sorbonne, vers 1874. M. Mittag-Leffler suivait alors les leçons de l'illustre géomètre; dans une conversation qu'il eut il y a environ deux ans avec M. Dini, qui commençait alors la publication de son beau livre *Serie di Fourier*, etc., il communiqua à ce dernier les résultats donnés par M. Hermite.

Celui-ci n'avait d'ailleurs établi que les formules relatives au susdit mode de développement et n'avait point traité des conditions sous le bénéfice desquelles il était réalisable. M. Dini, qui était en possession d'une méthode très générale pour traiter les questions de cette nature, réussit pleinement, comme on le

sait depuis la publication de son livre, à établir, sous des conditions précises, la possibilité de ce développement; à l'occasion de ces recherches, une correspondance s'établit entre M. Hermite et M. Dini, et ce qui suit est l'analyse de l'extrait d'une Lettre de M. Hermite.

Les formules

$$\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = \sum\left[\cot\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x+mi\mathrm{K}') + \cot\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x-mi\mathrm{K}')\right],$$

$$\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\frac{\mathrm{H}'(x)}{\mathrm{H}(x)} = \cot\frac{\pi x}{2\mathrm{K}} + \sum\left[\cot\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x+ni\mathrm{K}') + \cot\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x-ni\mathrm{K}')\right],$$

où $m = 1, 3, 5, \ldots$; $n = 2, 4, 6, \ldots$, permettent d'établir directement que l'équation

$$\Theta'(x) = 0$$

a pour seules racines réelles des multiples de K, et pour racines imaginaires

$$x = n\mathrm{K} + i\omega,$$

les quantités ω étant en nombre infini et comprises successivement entre deux multiples impairs consécutifs de K'. Si l'on fait abstraction des multiples pairs de K, on pourra écrire pour ces racines

$$a = 0, \quad a = \mathrm{K}, \quad a = i\omega.$$

De la même façon, les racines b de l'équation

$$\mathrm{H}'(x) = 0$$

seront

$$b = \mathrm{K}, \quad b = i\varpi,$$

ϖ ayant une infinité de valeurs, renfermées chacune entre deux multiples pairs consécutifs de K'. Voici la démonstration de ces résultats :

En posant

$$x = \xi + i\omega$$

dans l'expression de $\dfrac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$, afin de la mettre sous la forme $\mathrm{A} + i\mathrm{B}$, et tenant compte de la relation

$$\cot(a+ib) = \frac{\sin 2a - \sin 2ib}{2\,\mathrm{mod}^2 \sin(a+ib)},$$

on trouve

$$\mathrm{A} = \sin\frac{\pi\xi}{\mathrm{K}}\,\mathrm{S},$$

où

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2}\sum\left\{\frac{1}{\mathrm{mod}^2\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}[\xi+(\omega+m)i]} + \frac{1}{\mathrm{mod}^2\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}[\xi+(\omega-m)i]}\right\}.$$

On ne peut donc avoir $\mathrm{A} = 0$ qu'en supposant ξ multiple de K; les seules racines réelles sont donc $a = 0$, $a = \mathrm{K}$, et les racines imaginaires sont de la forme $a = i\omega$ ou $a = \mathrm{K} + i\omega$. Or, en posant $x = \mathrm{K} + i\omega$, on a

$$\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = \sin\frac{i\pi\omega}{\mathrm{K}}\sum\frac{1}{\cos\frac{i\pi}{2\mathrm{K}}(\omega+m\mathrm{K}')\cos\frac{i\pi}{2\mathrm{K}}(\omega-m\mathrm{K}')};$$

cette expression ne pouvant s'annuler pour aucune valeur de ω, il est prouvé que toutes les racines imaginaires sont de la forme $a = i\omega$.

Maintenant la relation

$$\Theta(i\omega, K') = \sqrt{\frac{K}{K'}}\, e^{\frac{\pi\omega^2}{4KK'}} H_1(\omega, k')$$

donne

$$\frac{H'_1(\omega, k')}{H_1(\omega, k')} + \frac{\pi\omega}{2KK'} = 0.$$

De là résulte immédiatement l'existence d'une infinité de racines ω, comprises chacune entre deux racines réelles consécutives de l'équation

$$H_1(\omega, k') = 0.$$

Enfin, entre ces limites, il n'y a qu'une racine. Si l'on pose, en effet,

$$\omega = 2pK' + \nu,$$

on aura

$$\frac{H'_1(\nu, k')}{H_1(\nu, k')} + \frac{\pi\nu}{2KK'} + \frac{p\pi}{K} = 0.$$

Or la dérivée par rapport à ν du premier membre est essentiellement négative.

Cette dérivée est, en effet,

$$1 - \frac{J'}{K'} - \frac{k'^2 \operatorname{sn}^2(\nu, k')}{\operatorname{cn}^2(\nu, k')},$$

et cette expression, en tenant compte de la relation

$$\frac{J}{K'} - \frac{J}{K} = \frac{\pi}{2K'K},$$

devient

$$\frac{J'}{K'} - \frac{k^2 \operatorname{sn}^2(\nu, k')}{\operatorname{cn}^2(\nu, k')}.$$

La même méthode, appliquée à l'équation

$$H'(x) = 0,$$

conduit aux résultats énoncés antérieurement; elle prouve aussi que, si l'on considère l'expression générale

$$\Pi(x) = \sum \left[\alpha_m \cot \frac{\pi}{2K}(x + miK') + \beta_m \cot \frac{\pi}{2K}(x - miK') \right],$$

où les coefficients α_m et β_m sont supposés réels et positifs, l'équation

$$\Pi(x) = 0,$$

aura toutes ses racines de l'une ou l'autre de ces deux formes

$$x = i\omega, \quad x = K + i\omega.$$

Ces principes posés, les termes des développements considérés par M. Hermite sont proportionnels aux quantités

$$\frac{H(x - a)}{\Theta(x)}, \quad \frac{\Theta(x + b)}{\Theta(x)},$$

où a, b sont les racines des équations

$$\Theta'(a) = 0, \quad H'(b) = 0;$$

pour le calcul commode des coefficients, il est amené à écrire ces développements sous la forme

$$F(x) = \sum A \frac{kk' H(x+a)}{\Theta(a)\Theta''(a)},$$

$$G(x) = \sum B \frac{kk' \Theta(x+b)}{H(b) H''(b)},$$

où, en supposant les développements possibles, les coefficients A, B sont donnés par les formules

$$A = + \frac{1}{\pi}\int_0^{2K} F(x) \frac{H(x-a)}{\Theta(x)} dx,$$

$$B = - \frac{1}{\pi}\int_0^{2K} G(x) \frac{\Theta(x-b)}{\Theta(x)} dx.$$

M. Hermite traite ensuite un cas où l'on peut obtenir ces intégrales, à savoir celui où les fonctions uniformes $F(x)$, $G(x)$ satisfont aux conditions

$$F(x+2K) = -F(x), \quad F(x+2iK') = \mu F(x),$$

$$G(x+2K) = +G(x), \quad G(x+2iK') = \mu G(x),$$

et n'admettent qu'un nombre fini de pôles dans le rectangle des périodes $2K$ et $2iK'$; μ est un facteur constant.

Les produits qui figurent sous les signes d'intégration sont alors des fonctions doublement périodiques de seconde espèce pour lesquelles le multiplicateur relatif à la période $2K$ est l'unité; pour de telles fonctions l'élément simple se réduit à l'expression $\frac{\Theta(x+\omega)}{\Theta(x)}$; d'après cela, on trouve pour l'une ou l'autre $\Phi(x)$ des quantités soumises à l'intégration, l'expression

$$\Phi(x) = \Sigma[R f(x-\alpha) + R_1 f'(x-\alpha) + \ldots + R_i f^{(i)}(x-\alpha)],$$

où

$$f(x) = \frac{H'(0)\Theta(x+\omega)}{H(\omega)\Theta(x)} e^{\frac{i\pi\omega}{2K}},$$

et où les coefficients R du premier terme sont les résidus de $\Phi(x)$ qui correspondent à tous les pôles de cette fonction, $x = \alpha + iK'$, situés à l'intérieur du rectangle des périodes.

On déduit de là

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2K} \Phi(x)\, dx = \frac{e^{\frac{i\pi\omega}{2K}}}{\sin\frac{\pi\omega}{2K}} \Sigma R.$$

Enfin la constante ω se déduit du multiplicateur μ de la façon suivante : si l'on fait

$$\mu = e^{\frac{i\pi}{K}\xi},$$

on aura dans le premier cas $\omega = \xi - a$, dans le second $\omega = \xi - b$.

Ces résultats s'appliquent au cas particulier suivant :

$$F(x) = \frac{H(x+\xi+h)}{\Theta(x+h)},$$

$$G(x) = \frac{\Theta(x+\xi+h)}{\Theta(x+h)}.$$

On trouve alors, en posant, pour abréger,

$$\chi(x, a) = \frac{kk' H(x+a)}{\Theta(x)\Theta(a)\Theta''(a)},$$

$$\varphi(x, b) = \frac{kk' \Theta(x+b)}{\Theta(x) H(b) H''(b)},$$

$$\frac{H(x+\xi+h)}{\Theta(x+h)} = \sum \frac{\Theta(a)\Theta(\xi+h) - \Theta(\xi)\Theta(a+h)}{H'(0)H(h)\sin\frac{\pi}{2K}(\xi-a)}\chi(x, a),$$

et

$$\frac{\Theta(x+\xi+h)}{\Theta(x+h)} = \sum \frac{H(\xi)H(b+h) - H(b)H(\xi+h)}{H'(0)H(h)\sin\frac{\pi}{2K}(\xi-b)}\varphi(x, b).$$

On tire de là d'autres formules en différentiant par rapport à h; la seconde, différentiée par rapport à ξ, donne, quand on y fait $\xi = 0$, le développement de l'élément simple $\frac{\Theta'(x+h)}{\Theta(x+h)}$ des fonctions doublement périodiques de première espèce.

Enfin M. Hermite termine par l'indication suivante :

« C'est un résultat dû à M. Gyldén, que l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x}\frac{dy}{dx} + \mu^2 \operatorname{dn}^2 x . y = 0$$

a pour solution

$$y = C \sin\mu \operatorname{am} x + C' \cos\mu \operatorname{am} x.$$

» La fonction, réelle et uniforme pour toute valeur réelle de la variable $u = \operatorname{am} x$, croît constamment avec x de $-\infty$ à $+\infty$, en prenant les valeurs $u = 0, \pi, 2\pi$, pour $x = 0, 2K, 4K$; d'après cela, les formules

$$\int_0^{2K} \cos p \operatorname{am} x \cos q \operatorname{am} x \,\Delta \operatorname{am} x \, dx = 0,$$

$$\int_0^{2K} \cos^2 p \operatorname{am} x \,\Delta \operatorname{am} x \, dx = \frac{\pi}{2},$$

. . . . ,

où p, q sont des entiers inégaux, paraissent conduire au mode de développement suivant, généralisation de la série de Fourier :

$$F(x) = \Sigma(A_p \cos p \operatorname{am} x + B_p \sin p \operatorname{am} x). \text{ »}$$

Dini (*U.*). — Sur les développements des fonctions d'une variable réelle en séries de fonctions de Jacobi. (145-153).

Voici maintenant, concernant ces développements de M. Hermite, la proposition à laquelle M. Dini est parvenu :

Les formules

$$-\frac{kk'}{\pi}\sum \frac{\Theta(z+a)}{\Theta(z)\,\mathrm{H}(a)\,\mathrm{H}''(a)}\int_0^{2\mathrm{K}} f(x)\,\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x)}\,dx,$$

$$\frac{kk'}{\pi}\sum \frac{\mathrm{H}(z+b)}{\Theta(z)\,\Theta(b)\,\Theta''(b)}\int_0^{2\mathrm{K}} f(x)\,\frac{\mathrm{H}(x-b)}{\Theta(x)}\,dx,$$

où les a sont la racine K et les racines purement imaginaires de l'équation $\mathrm{H}'(x)=0$, et où les b sont les racines o et K et les racines purement imaginaires de l'équation

$$\Theta'(x)=0,$$

sont applicables à une fonction quelconque $f(x)$, pourvu que, pour les valeurs de x comprises entre o et 2K, l'une au moins des conditions suivantes soit remplie :

1° Faire seulement un nombre fini d'oscillations;

2° Admettre une dérivée qui, dans cet intervalle, reste susceptible d'intégration, lors même qu'on la réduit à sa valeur absolue.

3° En décomposant cet intervalle en intervalles suffisamment petits, la somme des oscillations dans ces intervalles est inférieure à un nombre aussi petit qu'on le veut. Aux points non extrêmes de l'intervalle (o, 2K), pour lesquels $f(x)$ est continue ou a seulement une discontinuité ordinaire, ces développements ont pour somme $f(x)$ ou la valeur moyenne

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2};$$

aux points extrêmes, le premier développement a pour somme

$$\frac{f(+0)+f(2\mathrm{K}-0)}{2},$$

et le second a pour somme, au point o, la valeur

$$\frac{f(+0)+f(2\mathrm{K}-0)}{2}$$

et, au point 2K, la valeur

$$\frac{f(2\mathrm{K}-0)+f(+0)}{2}.$$

Pour la démonstration, nous devons renvoyer le lecteur au livre déjà cité de M. Dini.

Casorati (F.). — Sur un récent écrit de M. Stickelberger. (154-157).

Brioschi (F.). — Michel Chasles. (158-160).

Brioschi. — Les relations de Göpel pour les fonctions hyperelliptiques d'ordre quelconque. (161-172).

Dans son célèbre Mémoire *Theoria transcendentium Abelianarum primi*

ordinis adumbratio levis (*Journal de Crelle*, t. 35, p. 277), Göpel a démontré qu'il existait entre quatre fonctions Θ à deux variables, convenablement choisies, une relation homogène du quatrième degré formée avec les quatrièmes puissances de ces fonctions, les produits deux à deux de leurs carrés et le produit des fonctions elles-mêmes; les recherches de MM. Cayley et Borchardt ont montré l'importance de cette relation dans la théorie de la surface de Kummer.

M. Brioschi établit des relations analogues entre $2n$ fonctions Θ à n arguments, convenablement choisies.

En posant

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}(x) &= \mathrm{A}(x-a_1)\ (x-a_2)\ \ldots(x-a_{2n+1}),\\
\varphi(x) &= \quad (x-x_1)\ (x-x_2)\ \ldots(x-x_n),\\
\mathrm{P}(x) &= \quad (x-a_1)\ (x-a_2)\ \ldots(x-a_n),\\
\mathrm{Q}(x) &= \mathrm{A}(x-a_{n+1})(x-a_{n+2})\ldots(x-a_{2n+1}),
\end{aligned}$$

en indiquant par l_m une quantité égale à $\mathrm{P}(a_m)$ si m est supérieur à n et à $-\mathrm{Q}(a_m)$ si m est égal ou inférieur à n, on sait, d'après les travaux de M. Weierstrass [*Zur Theorie der Abel'schen Functionen* (*Journal de Crelle*, t. 47, p. 52)], que les $2n+1$ fonctions à indice unique

$$p_m = \sqrt{\frac{\varphi(a_m)}{l_m}},$$

et les $n(2n-1)$ fonctions à deux indices

$$p_{r,s} = p_{s,r} = p_r p_s \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sqrt{\mathrm{R}(x_i)}}{(x_i-a_r)(x_i-a_s)\varphi'(x_i)}$$

sont égales aux rapports de deux fonctions Θ à n variables; dans tous ces rapports le dénominateur est le même.

Soient $r_1, r_2, \ldots, r_n$, n quelconques des nombres 1, 2, 3, …, $2n+1$, tous différents les uns des autres; on aura entre les fonctions p les relations

$$\mathrm{A}p_\mu^2 = \frac{\mathrm{R}'(a_\mu)}{l_\mu \mathrm{S}(a_\mu)} + \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{l_r p_{r,\mu}^2}{\mathrm{S}'(a_r)},$$

$$\frac{l_\nu}{\mathrm{S}(a_\nu)} p_{\nu,\mu}^2 = \frac{\mathrm{R}'(a_\mu)}{l_\mu (a_\mu-a_\nu)\mathrm{S}(a_\mu)} + \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{l_r p_{r,\mu}^2}{(a_\nu-a_r)\mathrm{S}'(a_r)},$$

$$\mathrm{A}p_\mu p_\nu = -\sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{l_r p_{r,\mu} p_{r,\nu}}{\mathrm{S}'(a_r)},$$

dont les deux premières sont dues à M. Weierstrass (*loc. cit.*), et la dernière à M. Brioschi (*Annali*, t. I, p. 29).

C'est de ces relations que ce dernier déduit les formules analogues à celles de Göpel, mais d'un caractère plus général; le type de ces formules est le suivant :

$$\frac{(a_\mu-a_\nu)^2 l_\mu l_\nu}{\mathrm{S}(a_\mu)\mathrm{S}(a_\nu)}\mathrm{H}^2 - (a_\mu-a_\nu)\mathrm{MGH} + \mathrm{M}^2\mathrm{F} = 0.$$

où

$$M = \frac{R'(a_\nu)}{S^2(a_\nu)} + \frac{R'(a_\mu)}{S^2(a_\mu)},$$

$$H = \frac{R'(a_\nu)}{l_\nu S(a_\nu)} \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{l_r p_{r,\mu}^2}{(a_\nu - a_r) S'(a_r)} + \frac{R'(a_\mu)}{l_\mu S(a_\mu)} \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{l_r p_{r,\nu}^2}{(a_\mu - a_r) S'(a_r)},$$

$$G = \frac{l_\mu}{S(a_\mu)} \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{(a_\mu - a_r) l_r}{(a_\nu - a_r) S'(a_r)} p_{r,\mu}^2 - \frac{l_\nu}{S(a_\nu)} \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{(a_\nu - a_r) l_r}{(a_\mu - a_r) S'(a_r)} p_{r,\nu}^2,$$

$$F = \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{(a_\mu - a_r) l_r}{(a_\nu - a_r) S'(a_r)} p_{r,\mu}^2 \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{(a_\nu - a_r) l_r}{(a_\mu - a_r) S'(a_r)}$$

$$- \left[\sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{l_r p_{r,\mu} p_{r,\nu}}{S'(a_r)} \right]^2.$$

Ces relations sont évidemment homogènes et du quatrième degré; elles contiennent les quatrièmes puissances des $2n$ fonctions $p_{r,\mu}$, $p_{r,\nu}$, les produits deux à deux des carrés de ces fonctions et les produits quatre à quatre de la forme

$$p_{r_1,\mu}\, p_{r_1,\nu}\, p_{r_2,\mu}\, p_{r_2,\nu}.$$

M. Brioschi, qui applique ces formules au cas considéré par Göpel, retombe naturellement sur la relation découverte par ce dernier et la transforme de manière à la faire coïncider avec l'équation de la surface de Kummer rapportée à quatre de ses plans tangents singuliers; il donne ensuite les coordonnées d'un point quelconque au moyen des quatre fonctions hyperelliptiques du second ordre p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}. Enfin l'auteur montre comment des mêmes équations on peut déduire $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ relations entre $(n+1)^2$ fonctions p qui, par leurs formes, sont susceptibles d'applications variées; $n+1$ de ces équations sont du type

$$\sum_{r=r_1}^{r=r_n} \alpha_r^2 + \alpha_\nu^2 = 1, \quad \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \alpha_{r\mu}^2 + \alpha_{\nu\mu}^2 = 1,$$

les $\frac{n(n+1)}{2}$ autres sont du type

$$\sum_{r=r_1}^{r=r_n} \alpha_r \alpha_{r\mu} + \alpha_\nu \alpha_{\nu\mu} = 0,$$

$$\sum_{r=r_1}^{r=r_n} \alpha_{r\mu} \alpha_{r\lambda} + \alpha_{\nu\mu} \alpha_{\nu\lambda} = 0;$$

on suppose dans ces formules

$$\alpha_r = \sqrt{\frac{l_r}{(r\nu)\,S'(a_r)}}\,p_r, \quad \alpha_\nu = \sqrt{\frac{l_\nu}{S(a_\nu)}}\,p_\nu,$$

$$\alpha_{r\mu} = \sqrt{\frac{(\mu\nu)\,l_r l_\mu S(a_\mu)}{(r\nu)\,R'(\alpha_\mu)\,S'(a_r)}}\,p_{r,\mu},$$

$$\alpha_{\nu\mu} = \sqrt{(\mu\nu)\,\frac{l_\mu l_\nu S(a_\mu)}{R'(a_\mu)\,S(\alpha_\nu)}}\,p_{\nu,\mu};$$

le symbole $(r\nu)$ est mis à la place de $a_r - a_\nu$; enfin les quantités μ, ν sont des nombres de la suite 1, 2, 3, ..., $2n+1$ différents entre eux et distincts de r_1, r_2, ..., r_n.

Betti (*E.*). — Sur les mouvements qui conservent à une masse fluide hétérogène la figure ellipsoïdale. (173-187).

Cette question a été l'objet des recherches de Lejeune-Dirichlet (*Journal de Crelle*, t. 58, p. 181), puis de Dedekind, Brioschi, Riemann, Padova. On suppose que les seules forces qui agissent sont les attractions réciproques des diverses particules suivant la loi de Newton; les auteurs cités ont regardé la densité comme constante; M. Betti regarde l'ellipsoïde comme stratifié suivant des couches homothétiques, la densité pouvant d'ailleurs varier d'une couche à l'autre. On n'augmente point ainsi la difficulté des intégrations; les équations restent les mêmes, si ce n'est qu'un terme se trouve multiplié par un coefficient numérique dont la valeur dépend de la variation de la densité de couche en couche et qui est égal à l'unité quand on suppose la densité constante.

Dirichlet a montré que dans les mouvements qui conservent à la masse fluide la forme ellipsoïdale, les coordonnées d'un élément du fluide peuvent s'exprimer par des fonctions linéaires homogènes des coordonnées initiales et que, ainsi, la détermination des coefficients et par conséquent des coordonnées de l'élément fluide dépend de huit équations différentielles ordinaires du second ordre, déduites des équations de l'Hydrodynamique sous la forme due à Lagrange. Il a trouvé sept intégrales premières; il reste donc à en trouver neuf autres.

Riemann a décomposé le mouvement en deux : d'une part la rotation des axes de l'ellipsoïde autour du centre, de l'autre la déformation de la masse; il reste, après lui, à intégrer un système de sept équations différentielles du premier ordre.

M. Betti forme l'équation aux dérivées partielles du premier ordre dont l'intégrale complète, si elle était connue, fournirait, par de simples différentiations, toutes les intégrales des équations différentielles du mouvement. Pour déduire cette équation de celle qui exprime le principe de Hamilton, il faut ajouter à l'énergie cinétique augmentée du potentiel du système la dérivée prise par rapport au temps d'une fonction des variables qui doit rester constante en vertu de l'invariabilité de la masse, multipliée par un coefficient indéterminé. M. Betti trouve que la dérivée prise par rapport au temps de ce coefficient est égale à la différence entre la valeur de la pression à la surface et la valeur moyenne de la pression dans toute la masse, multipliée par un coefficient numérique dont la valeur dépend de la loi de variation de la densité.

Il trouve ainsi la valeur de la dérivée du coefficient indéterminé exprimée au

moyen des quantités qui déterminent le mouvement et la figure, et obtient en conséquence la valeur moyenne de la pression exprimée au moyen de la pression à la surface et ces mêmes quantités.

M. Betti a encore déduit des équations canoniques une équation analogue à celle que Jacobi a trouvée pour un système de points soumis à des forces ayant un potentiel homogène par rapport aux coordonnées et dont on peut déduire des conséquences analogues relativement à la stabilité du mouvement.

L'équation aux dérivées partielles du premier ordre contient neuf variables indépendantes; M. Betti a conservé les variables de Riemann. On trouve sans difficulté cinq intégrales jacobiennes. Pour obtenir la solution générale, il reste seulement à trouver une intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre à quatre variables indépendantes.

Beltrami (*E.*). — Sur les équations générales de l'élasticité. (188-211).

Des équations générales de l'élasticité établies en coordonnées cartésiennes rectangulaires, Lamé a déduit, comme l'on sait, les équations qui conviennent au même problème quand on suppose les coordonnées orthogonales, mais d'ailleurs quelconques (*Leçons sur les coordonnées curvilignes*), M. Neumann [*Zur Theorie der Elasticität* (*Journal de Crelle*, t. 57)], et M. Borchardt sont parvenus au même résultat par des analyses plus simples; le Mémoire de M. Borchardt a été reproduit dans le *Bulletin*, 1re série, t. VIII.

M. Beltrami établit les mêmes équations *directement* en prenant l'élément linéaire sous la forme

$$ds^2 = Q_1^2\,dq_1^2 + Q_2^2\,dq_2^2 + Q_3^2\,dq_3^2.$$

La marche qu'il suit met en évidence ce fait bien intéressant que les équations auxquelles il parvient, et qui coïncident d'ailleurs avec celles de Lamé, sont indépendantes de toute hypothèse sur les fonctions Q_1, Q_2, Q_3 et que, ainsi, elles ont plus de généralité que les équations cartésiennes, d'où Lamé les a tirées, puisqu'elles ne supposent pas le postulatum d'Euclide. De ces équations, M. Beltrami déduit ensuite les équations indéfinies des milieux élastiques isotropes : or celles-ci ne coïncident plus avec les équations de Lamé que sous le bénéfice de certaines conditions, et ces conditions expriment précisément que l'expression

$$ds^2 = Q_1^2\,dq_1^2 + Q_2^2\,dq_2^2 + Q_3^2\,dq_3^2$$

est une transformée de l'expression

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Ainsi les équations ordinaires de l'isotropie sont subordonnées à la vérité du postulatum d'Euclide, mais non les équations obtenues par M. Beltrami.

Cette remarque donne la raison du succès des artifices employés par M. Neumann et par Borchardt, ainsi que le montre la lumineuse analyse que fait l'auteur des méthodes suivies par ces savants.

Les équations de l'isotropie obtenues par M. Beltrami conviennent à tout espace de courbure constante; l'étude de ces équations le conduit à d'intéressants rapprochements avec les conceptions dues à Faraday, à MM. Maxwell et Helmholtz (*Treatise on Electricity and Magnetism*, t. I, p. [illegible] et [illegible]; *Monatsberichte* de l'Académie de Berlin, [illegible]) sur la constitution des milieux diélectriques.

Scherrer (F.-R.). — Sur les formes biquadratiques ternaires. (212-223; all.).

I. *Théorie des polaires des courbes algébriques planes.*

Si l'on identifie une forme ternaire K^n du $n^{\text{ième}}$ degré, où les variables sont désignées par α, β, δ, savoir

$$\sum_{q,r,s} \frac{n!}{q!\,r!\,s!} A_{qrs}\,\alpha^q \beta^r \delta^s, \quad (q+r+s=n),$$

avec l'expression

$$\sum_i m_i(\alpha x_i + \beta y_i + \delta)^n,$$

où x_i, y_i sont les coordonnées rectangulaires d'un point de masse m_i et où la sommation est relative aux diverses valeurs de i, 1, 2, 3,... $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$, on parvient aisément à une suite de propositions analogues à celles qu'a développées M. Reye dans son Mémoire intitulé *Erweiterung der Polarentheorie algebraischer Flächen* (*Journal de Borchardt*, t. 78).

Si C^h désigne une courbe du $h^{\text{ième}}$ degré et C^h_{xy} le premier membre de l'équation de cette courbe, l'auteur appelle *polaire* de la courbe C^h par rapport à la courbe K^n (courbe dont l'équation tangentielle est $K^n = 0$), une courbe de la classe $n-h$ dont l'équation tangentielle est

$$\sum_i m_i C^h_{x_i y_i}(\alpha x_i + \beta y_i + \delta)^{n-h} = 0.$$

II. *Représentation d'une forme biquadratique ternaire comme somme de six bicarrés.*

Cette représentation est possible d'une triple infinité de façons. L'auteur montre que la condition pour qu'une telle forme soit la somme des quatrièmes puissances de cinq fonctions linéaires est qu'un certain déterminant A soit nul; si les mineurs de ce déterminant sont nuls, la forme est la somme des quatrièmes puissances de quatre fonctions linéaires.

III. *Le système des coniques associées aux points du plan par rapport à* K^4.

Si la polaire d'une conique C^2 par rapport à la courbe de quatrième classe $K^4 = 0$ se décompose en un point double x', y', on dit que le point et la conique C^2 sont associés. Si la conique associée à un premier point passe par un second point, la conique associée à ce second point passe par le premier point. Tel est le système dont l'auteur développe les propriétés.

Casorati (F.). — Généralisation de quelques théorèmes sur les équations différentielles linéaires du second ordre dus à MM. Hermite, Brioschi et Mittag-Leffler. (224-232).

Soient u, v, ... un système fondamental de solutions de l'équation différentielle linéaire

$$y^{(m)} + p y^{(m-1)} + q y^{(m-2)} + \dots = 0.$$

Si l'on se donne les dérivées logarithmiques

$$\frac{u'}{u}, \quad \frac{v'}{v}, \quad \ldots,$$

on pourra, au moyen de ces quantités, exprimer les coefficients p, q, ...

Si l'on fait maintenant

$$G_\nu = \frac{u^{(\nu)}}{u} + \frac{v^{(\nu)}}{v} + \cdots,$$

on voit aisément que toutes les quantités G_ν pourront s'exprimer au moyen de $m-1$ d'entre elles; de plus, on aperçoit de suite l'existence de relations telles que les suivantes :

$$\begin{aligned}
G''_1 &= \sum \frac{u''}{u} - \sum \frac{u'^2}{u^2}, \\
G_1^2 &= \sum \frac{u'^2}{u_2} - \sum \frac{u''v'}{uv}, \\
G_2^1 &= \sum \frac{u'''}{u} - \sum \frac{u''u'}{u^2}, \\
G_1 G_2 &= \sum \frac{u''u'}{u^2} + \sum \frac{u'v'}{uv}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que l'équation différentielle linéaire soit du second ordre, on aura

$$G_2 = -pG_1 - 2q,$$

et

$$\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} = G_1, \quad \frac{u'}{u}\frac{v'}{v} = \frac{1}{2}(G_1^2 + G'_1 - G_2).$$

Si donc on se donne une expression quelconque

$$f\left(x, \frac{u'}{u}, \frac{v'}{v}\right),$$

on pourra l'exprimer au moyen de x, p, q, G_1, G', et le résultat sera rationnel par rapport à ces quantités si f désigne une opération rationnelle, symétrique par rapport à $\frac{u'}{u}$ et $\frac{v'}{v}$. En particulier, on pourra former une équation différentielle linéaire du second ordre

$$Y'' + PY' + QY = 0,$$

telle que les dérivées logarithmiques des solutions U, V soient des fonctions données de x et des rapports $\frac{u'}{u}$, $\frac{v'}{v}$, savoir :

$$\frac{U'}{U} = \Phi\left(x, \frac{u'}{u}, \frac{v'}{v}\right), \quad \frac{V'}{V} = \Psi\left(x, \frac{u'}{u}, \frac{v'}{v}\right).$$

Deux cas ont été considérés par M. Hermite; dans le premier (*Comptes rendus*, séance du 29 décembre 1879), on a

$$\frac{U'}{U} = \frac{u'}{u} + p, \quad \frac{V'}{V} = \frac{v'}{v} - p;$$

dans le second (*Annali*, t. X), on a

$$\frac{U'}{U} = \omega \frac{u'}{u}, \quad \frac{V'}{V} = \omega \frac{v'}{v};$$

le cas considéré par M. Brioschi (*Annali*, t. X) s'obtient en posant

$$\frac{U'}{U} = \frac{u'}{u} + \alpha(x), \quad \frac{V'}{V} = \frac{v'}{v} + \beta(x);$$

enfin le cas considéré par M. Mittag-Leffler (*Comptes rendus*, séance du 13 décembre 1880) s'obtient en posant

$$\frac{U'}{U} = \varphi\left(x, \frac{u'}{u}\right), \quad \frac{V'}{V} = \varphi\left(x, \frac{v'}{v}\right).$$

La même méthode permet de résoudre le problème analogue pour les équations linéaires du troisième ordre; elle ne réussit plus pour les équations du quatrième ordre.

Brioschi (*F.*). — Sur un système d'équations différentielles. (233-240).

En posant

$$f(u) = (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3),$$

les équations considérées par l'auteur (*voir* la Communication de M. Halphen, insérée dans les *Comptes rendus*, séance du 13 juin 1881) sont

$$(1) \quad \begin{cases} u'_1 = u_1^2 + \alpha_1 f'(u_1) + \varphi(x), \\ u'_2 = u_2^2 + \alpha_2 f'(u_2) + \varphi(x), \\ u'_3 = u_3^2 + \alpha_3 f'(u_3) + \varphi(x), \end{cases}$$

où α_1, α_2, α_3 sont des constantes, et où $\varphi(x)$ est une fonction qui sera particularisée plus tard; en introduisant la fonction t de x, définie par l'égalité

$$\frac{u_1 - u_3}{u_3 - u_2} = \frac{1}{1 - t},$$

et en posant

$$\alpha_1 + 1 = \rho n, \quad \alpha_2 + 1 = \rho l, \quad \alpha_3 + 1 = \rho m,$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2}(l + m + n - 1),$$

l'auteur parvient aux expressions suivantes de u_1, u_2, u_3 :

$$u_1 = \frac{1}{2}\frac{d\log t'}{dx} - \frac{1-l}{2}\frac{d\log t}{dx} - \frac{l+m}{2}\frac{d\log(1-t)}{dx},$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\frac{d\log t'}{dx} - \frac{m+n}{2}\frac{d\log t}{dx} - \frac{1-n}{2}\frac{d\log(1-t)}{dx},$$

$$u_3 = \frac{1}{2}\frac{d\log t'}{dx} - \frac{1-l}{2}\frac{d\log t}{dx} - \frac{1-n}{2}\frac{d\log(1-t)}{dx},$$

qui, substituées dans l'une quelconque des équations (1), montrent que la fonction $t(x)$ doit satisfaire à l'équation différentielle

$$(2) \quad [t]_x + \frac{Lt^2 + Mt + N}{2t^2(1-t)^2} t'^2 - 2\varphi(x) = 0.$$

où le symbole $[t]_x$ est mis à la place de

$$\frac{d^2 \log t'}{dx^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{d \log t'}{dx}\right)^2,$$

et où

$$L = 1 - m^2, \quad M = l^2 + m^2 - n^2 - 1, \quad N = 1 - l^2.$$

Si maintenant on suppose

$$2\varphi(x) = \frac{Ax^2 + Bx + C}{2x^2(1-x)^2},$$

où

$$A = 1 - \mu^2, \quad B = \lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 - 1, \quad C = 1 - \lambda^2,$$

on aura, pour déterminer $t(x)$, l'équation différentielle hypergéométrique

$$[t]_x + \frac{Lt^2 + Mt + N}{2t^2(1-t)^2} t'^2 - \frac{Ax^2 + Bx + C}{2x^2(1-x)^2} = 0.$$

On satisfait à cette équation en posant

$$l = \lambda, \quad m = \mu, \quad n = \nu, \quad t = x,$$

en sorte que, en attribuant à $\varphi(x)$ la valeur précédente, on satisfera aux équations (1) en prenant

$$u_1 = \frac{(1-\mu)x - (1-\lambda)}{2x(1-x)},$$

$$u_2 = \frac{(1-\mu)x - (\mu+\nu)}{2x(1-x)},$$

$$u_3 = \frac{(2-\lambda-\nu)x - (1-\lambda)}{2x(1-x)}.$$

En second lieu [*voir* la Note de M. Brioschi sur la *Théorie des formes dans l'intégration des équations différentielles du second ordre* (*Math. Ann.*, t. XI)], on sait que, si les constantes l, m, n ont les valeurs suivantes :

(3) $$l = \frac{1}{3}, \quad m = \frac{r}{6(r-2)}, \quad n = \frac{1}{2}, \quad (r = 4, 6, 12),$$

il existe une série de valeurs pour λ, μ, ν, telles que la fonction $t(x)$ soit rationnelle; les fonctions u_1, u_2, u_3 seront aussi rationnelles. M. Brioschi traite en particulier le cas de $r = 12$.

Soient maintenant y_1, y_2 deux intégrales fondamentales de l'équation linéaire du second ordre

$$y'' + py' + qy = 0,$$

et soit $f(y_1, y_2)$ une forme binaire d'ordre r de ces quantités, dont le covariant $(ff)_4$ soit identiquement nul, en posant

$$h = \frac{1}{2}(ff)_2, \quad \theta = 2(fh)_1,$$

on aura entre f, h, θ la relation identique

$$\theta^2 - 4h^3 - \alpha f^{\frac{1}{m}} = 0,$$

où α est une constante, où m est donné par la formule (3); enfin r ne peut

avoir qu'une des valeurs 4, 6, 12; en posant

$$4h^3 - \alpha t f^{\frac{1}{m}} = 0,$$

la fonction $t(x)$ vérifiera l'équation différentielle (2), en prenant pour l, m, n les valeurs (3) et pour $\varphi(x)$ la valeur

$$\varphi(x) = q - \frac{1}{2}\frac{dp}{dx} - \frac{1}{4}p^2;$$

on parvient alors aux valeurs suivantes de u_1, u_2, u_3 :

$$u_1 = \frac{1}{2}\frac{d\log y'}{dx} - \frac{1}{3(r-2)}\frac{d\theta}{dy}\frac{y'}{\theta},$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\frac{d\log y'}{dx} - \frac{1}{2(r-2)}\frac{d\theta}{dy}\frac{y'}{h},$$

$$u_3 = \frac{1}{2}\frac{d\log y'}{dx} - \frac{1}{r}\frac{df}{dy}\frac{y'}{f},$$

où y désigne le rapport $\frac{y_1}{y_2}$; les quantités α_1, α_2, α_3 ont dans ce cas les valeurs

$$\alpha_1 = 3r - 7, \quad \alpha_2 = 2r - 5, \quad \alpha_3 = r - 1.$$

Sous les mêmes conditions, les quantités

$$v_1 = -\frac{1}{3(r-2)}\frac{d\log\theta}{dy},$$

$$v_2 = -\frac{1}{2(r-2)}\frac{d\log\theta}{dy},$$

$$v_3 = -\frac{1}{r}\frac{d\log f}{dy}$$

satisferont aux équations

$$\frac{dv_1}{dy} = v_1^2 + \alpha_1(v_1 - v_2)(v_1 - v_3),$$

$$\frac{dv_2}{dy} = v_2^2 + \alpha_2(v_2 - v_1)(v_2 - v_3),$$

$$\frac{dv_3}{dy} = v_3^2 + \alpha_3(v_3 - v_1)(v_3 - v_2).$$

Beltrami (E.). — Sur le potentiel magnétique. (241-260).

Sir William Thomson, dans le volume intitulé : *Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism* (Londres, 1872), a introduit des définitions nouvelles pour l'*axe* et le *centre* d'un corps magnétique.

M. Beltrami reprend la question à un point de vue nouveau : il ne spécifie pas la nature de la force d'attraction, ou plutôt il ne lui impose que des conditions très larges; il arrive ainsi à cette conclusion, qu'il y a lieu de conserver la définition donnée par Sir William Thomson pour l'*axe* magnétique, mais que le nom de *centre magnétique* paraîtrait convenir à un certain point situé sur l'axe magnétique, jouissant de propriétés remarquables, indépendantes de la loi d'attrac

tion, comme celles de l'axe magnétique, et qui ne coïncide (dans le cas de la loi de Newton) avec le *centre magnétique* de Sir William Thomson que sous certaines conditions.

Voici la marche suivie par M. Beltrami.

Soient deux systèmes M, M′, auxquels appartiennent les masses m, m' de deux points situés à une distance mutuelle r; le potentiel mutuel des deux systèmes sera

$$W = \Sigma\Sigma\, mm'\varphi(r),$$

la nature de la fonction $\varphi(r)$ définissant la loi de l'attraction.

Si l'on suppose maintenant que les dimensions des systèmes M, M′ soient petites relativement à leur distance, on pourra les rapporter à deux systèmes d'axes rectangulaires T, T′ semblablement orientés et dont les origines O et O′ soient respectivement à des distances des points M ou M′ qui, relativement à la distance OO′, soient du même ordre que les dimensions des systèmes M et M′; soient a, b, c les coordonnées du point m relativement aux axes T, a', b', c' celles du point m' relativement aux axes T′; on pourra développer la distance $mm' = r$ suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{\rho}$, en désignant par ρ la distance OO′; si maintenant on suppose la fonction $\varphi(r)$ continue ainsi que ses dérivées et si, plus particulièrement, on admet que les dérivées successives $\varphi'(\rho)$, $\varphi''(\rho)$, $\varphi'''(\rho)$,... de la fonction $\varphi(\rho)$ soient de même ordre que les quantités

$$\frac{\varphi(\rho)}{\rho}, \quad \frac{\varphi(\rho)}{\rho^2}, \quad \frac{\varphi(\rho)}{\rho^3}, \quad \ldots,$$

on obtiendra, en utilisant la formule de Taylor, une valeur approchée pour $\varphi(r)$ qui, substituée dans

$$W = \Sigma\Sigma\, mm'\varphi(r),$$

fournira une valeur approchée pour le potentiel W; il y a lieu maintenant de distinguer différents cas selon que l'on suppose que les masses Σm, $\Sigma m'$ des systèmes sont différentes de zéro ou nulles; en combinant les différents cas possibles, on trouve diverses formules qui, dans les cas où $\varphi(r) = \frac{1}{r}$, coïncident avec les formules classiques de la théorie du magnétisme.

Si, en particulier, la masse Σm est nulle, on pourra déterminer les axes T de telle sorte que l'on ait

$$\Sigma ma = 0, \quad \Sigma mb = 0, \quad \Sigma m(a^2 - b^2 + c^2) = 0,$$
$$\Sigma mbc = 0, \quad \Sigma mca = 0, \quad \Sigma mab = 0.$$

Le plan des *ab* est alors le plan *central*, l'axe des *c* est l'*axe magnétique* de Sir William Thomson, et l'origine est le point auquel M. Beltrami propose de donner le nom de *centre magnétique*, à l'exclusion du point ainsi dénommé par l'illustre mathématicien écossais, point qui, pour le système d'axes précédemment défini, aurait les coordonnées

$$a_0 = 0, \quad b_0 = 0, \quad c_0 = -\frac{3}{4}\,\frac{\Sigma m(a^2 - b^2)}{\Sigma mc}.$$

M. Beltrami termine son Mémoire par une élégante exposition de la théorie des moments d'inertie pour un système de points matériels dont la masse totale est nulle.

Casorati (F.). — Addition aux récents travaux de MM. Weierstrass et Mittag-Leffler sur les fonctions d'une variable complexe. (261-278).

Presque en même temps que M. Mittag-Leffler, mais toutefois un peu plus tard, M. Casorati est arrivé à reconnaître que la démonstration donnée par M. Weierstrass dans les *Monatsberichte* de l'Académie des Sciences de Berlin (démonstration reproduite dans le *Bulletin*) et relative au mode de construction dû à M. Mittag-Leffler, d'une fonction uniforme admettant une infinité de pôles, s'étendait sans difficulté à la construction toute semblable de fonctions uniformes admettant une infinité de points singuliers essentiels dont l'ensemble a le point ∞ pour limite unique. Dans la présente Note il développe ses recherches à ce sujet. Nous signalerons la proposition suivante, qui constitue une généralisation naturelle du théorème de M. Mittag-Leffler et qui s'établit toujours par le même procédé.

« Soient données une infinité de fonctions de la variable z dont

$$f_1(z),\quad f_2(z),\quad f_3(z),\quad \ldots$$

désignent respectivement certaines branches qui, à l'intérieur de cercles ayant l'origine pour centre et dont les rayons r_1, r_2, r_3, ... sont tels que l'on ait

$$r_1 \leqq r_2 \leqq r_3 \leqq, \ldots$$

peuvent être représentées par des séries procédant suivant les puissances entières et positives de z; on admet que ces séries permettent de définir dans tout le plan (sauf pour certains points singuliers) les fonctions données quand on prend le chemin décrit par la variable à partir d'un certain point initial;

» Si l'on considère la somme

$$P_\nu = \sum_{\mu=0}^{\mu=m_\nu-1} A_\mu^\nu z^\mu$$

des m_ν premiers termes du développement

$$f_\nu = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} A_\mu^\nu z^\mu,$$

valable à l'intérieur du cercle de rayon r_ν, les nombres entiers m_ν pourront toujours être choisis de façon que la série dont le terme général est

$$f_\nu(z) - P_\nu(z)$$

soit convergente inconditionnellement et uniformément dans tout le plan, à l'exception toutefois de certains points singuliers pour les fonctions f_ν. »

L'application de ce théorème aux fonctions

$$\log\left(1-\frac{z}{a_1}\right),\quad \log\left(1-\frac{z}{a_2}\right),\quad \log\left(1-\frac{z}{a_3}\right),\quad \ldots,$$

où l'on suppose les quantités a_1, a_2, a_3, ... telles que l'on ait

$$|a_1| \leqq |a_2| \leqq |a_3| \;\ldots\; \lim_{n=\infty} |a_n| = \infty,$$

est immédiate et conduit de la façon la plus naturelle au théorème fondamental de M. Weierstrass sur la construction d'une fonction entière dont les zéros sont donnés. Il est inutile d'insister sur la proximité de cette démonstration et de celle qu'a donnée M. Hermite dans sa Lettre à M. Mittag-Leffler *Sur quelques points de la théorie des fonctions,* insérée dans le t. XII des *Acta Societatis Fennicæ* et dans le t. 40 du *Journal de Borchardt.*

Cazzaniga. — Expression d'une fonction transcendante entière qui prend des valeurs données en des points arbitrairement donnés. (279-290).

Soient les quantités données

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

différentes entre elles, telles que l'on ait

$$|\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq |\alpha_3| \quad \ldots \quad \lim_{n=\infty} |\alpha_n| = \infty,$$

et dont aucune n'est nulle.

Soit en outre

$$F\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right) = \left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu}\right) e^{\sum_{k=1}^{k=p} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)^k}$$

la fonction

$$\varphi(z) = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} E\left(\frac{z}{a_\nu}, p_\nu\right),$$

représentant, comme on le sait, une fonction entière admettant pour zéros les quantités α_1, α_2, α_3, ..., en supposant que les nombres entiers p_ν soient tels que la somme

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left| \frac{1}{a_\nu} \left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{p_\nu} \right|$$

soit convergente, quel que soit x.

Cela posé, l'auteur parvient, pour la fonction cherchée $f(z)$, qui doit prendre au point α_ν la valeur f_ν, à l'expression suivante :

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{f_\nu w(z) E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)}{w'(\alpha_\nu) E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)},$$

où $w(z)$ désigne le produit de $\varphi(z)$ par une fonction de la forme

$$e^{w_1(z)},$$

$w_1(z)$ étant une fonction entière de z.

Tonelli. — Sur la fonction potentielle dans un espace à n dimensions. (291-321).

En partant de la formule donnée par M. Beltrami dans son Mémoire *Sulla teorica dei parametri differenziali* (*Memorie dell' Accademia di Scienze di Bologna*, 1869) et qui fournit l'extension du théorème de Green à un espace ayant un nombre quelconque de dimensions, M. Tonelli établit élégamment les propriétés fondamentales de la fonction potentielle dans un espace à n dimensions; il traite d'abord le cas général sans rien supposer sur la courbure première et s'occupe ensuite plus particulièrement du cas où l'espace est plan.

Dans une seconde partie de son Mémoire il montre, en généralisant un procédé dû à M. Dini, comment, dans un espace plan, on peut déterminer la fonction potentielle dans un champ sphérique, lorsque l'on donne sur le contour la valeur de la dérivée première (ou d'un ordre supérieur), prise le long de la normale au contour. J. T.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK, herausgegeben von Dr. O. SCHLÖMILCH, Dr. E. KAHL und Dr. M. CANTOR (¹).

Tome XXVI; 1881.

Veltmann (*W.*). — Détermination d'une fonction sur la surface d'un cercle, des conditions étant données pour les points de la circonférence de contour. (1-14).

L'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

ou des deux équations

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

sur la surface d'un cercle pour des valeurs données de u sur le contour, a été effectuée par MM. Prym et Schwarz dans les vol. 73 et 74 du *Journal de Crelle*, dans les cas où une solution existe. M. Schlaefli s'est aussi occupé de la question dans un Mémoire intitulé : *Quelques doutes sur la représentation générale d'une fonction périodique arbitraire d'une variable réelle par une série trigonométrique*. On s'est déjà occupé également du cas où le rayon du cercle croît indéfiniment et aussi où la surface est à connexité complexe avec un point de ramification.

M. Veltmann se propose d'arriver aux résultats déjà connus par une méthode simple et naturelle. Pour cela, il part des propriétés fondamentales des fonctions (monogénéité, application conforme), au lieu d'employer les conséquences que l'on déduit de ces propriétés, par exemple l'existence des équations différentielles écrites plus haut.

(¹) Voir *Bulletin*, V₁, 23.

Ce procédé peut être plus simple, mais aussi il demande, pour être bien suivi, plus de contention d'esprit; nous ne voyons pas qu'il soit bien nécessaire de laisser de côté une partie des théorèmes de Cauchy et de Riemann sous prétexte d'apporter une modification peu importante dans la démonstration de résultats connus.

Buka (F.). — Courbure des surfaces gauches aux points d'une génératrice rectiligne. (15-49).

Partant de la considération de deux éléments voisins, l'auteur arrive, par des considérations géométriques assez simples, à montrer la relation qui existe entre les rayons de courbure des sections quelconques d'une surface gauche aux différents points d'une génératrice; il étudie la courbe lieu des centres de courbure correspondants et montre comment on peut la construire et en déterminer les principales propriétés. Il construit et discute les hyperboloïdes osculateurs, la surface gauche formée par les tangentes aux lignes de courbure aux différents points d'une droite, etc., etc. (*Voir* sur ce sujet Chasles, *Correspondance mathématique et physique*, tome XI; de la Gournerie; Mannheim; Fiedler, *Géométrie descriptive;* Weyr, *Krümmung windschiefer Flächen*, etc.)

Günther (S.). — Détermination d'un lieu en Astronomie sphérique. (50-56).

1° Étant donné un quadrilatère sphérique dont la surface est moindre qu'une demi-sphère, déterminer le point d'intersection des diagonales, quand on se donne les coordonnées des quatre sommets relativement à un système d'axes rectangulaires sphériques quelconques.

2° Solution du problème.

M. Günther donne à la solution une forme calculable par logarithmes.

Ce problème avait été posé et résolu par Michel Maestlin, le professeur de Kepler. Mais la solution, si exacte qu'elle fût, conduisait à des calculs longs et pénibles; c'est là ce qu'évite la solution de M. Günther.

Dietrich. — Mesure du rapport des rayons de courbure en un point d'une surface au moyen de l'angle des tangentes d'inflexion correspondantes. (57-59).

L'auteur trouve l'expression simple

$$-\frac{\rho_2}{\rho_1} = \operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2},$$

ρ_1 et ρ_2 étant les rayons de courbure et φ l'angle des tangentes d'inflexion.

Schlomilch (O.). — Sur des sommes et des produits de rayons vecteurs de l'ellipse et de courbes analogues. (59-62).

L'équation de l'ellipse étant écrite en coordonnées polaires

$$R^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta} = \frac{2a^2b^2}{a^2+b^2-(a^2-b^2)\cos 2\theta},$$

on a, en désignant par R_k le rayon vecteur qui correspond à l'angle polaire $k\frac{2\pi}{n}$

$$R_0 . R_1 . R_2 \ldots R_n = (2ab)^n \sqrt{\frac{ab}{(a+b)^{2n} - (a-b)^{2n}}};$$

on trouve une formule analogue quand on exprime le rayon vecteur central au moyen de l'anomalie excentrique.

On a aussi des formules semblables pour les courbes dont les équations en coordonnées polaires ont une des formes

$$r^2 = \alpha + \beta \cos\theta, \quad \text{ou} \quad r^2 = \alpha + \beta \cos 2\theta.$$

Schlömilch (*O.*). — Sur les séries à la fois convergentes ou à la fois divergentes. (63-64).

Cauchy, dans son *Cours d'Analyse algébrique*, a montré que les deux séries infinies

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \ldots$$
$$1u_1 + 2u_2 + 4u_3 + 8u_4 + 16u_5 + \ldots$$

sont en même temps convergentes ou divergentes. Schlömilch montre comment on peut former une infinité de tels groupes de séries. L'application de son procédé lui donne, par exemple,

$$\begin{cases} \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \ldots, \\ \log 2.[1\varphi(1) + 2\varphi(2) + 4\varphi(3) + 8\varphi(4) + \ldots]; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \ldots. \\ 1\varphi(1) + k\varphi(k) + k^2\varphi(k^2) + k^3\varphi(k^3) + \ldots; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \ldots \\ 1\varphi(1) + 2\varphi(4) + 3\varphi(9) + 4\varphi(16) + \ldots. \end{cases}$$

Weihrauch. — Sur les déterminants doublement orthosymétriques. (64-70).

Le déterminant doublement orthosymétrique

$$C = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 \ldots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 \ldots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$$

peut, d'après Stern (*Journal de Crelle*, 73) et Zehfuss (*Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 7e année, p. 439), être mis sous la forme

$$C = \prod_{k=1}^{k=n} \left(\sum_{i=0}^{i=n-1} a_i \alpha_k^i \right)$$

α_k étant une des n racines de l'équation

$$x^n - 1 = 0.$$

Weihrauch donne d'abord de ce développement une démonstration nouvelle, puis il arrive facilement au résultat suivant :

Si, partant de l'équation

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} a_i y^{n-1-i} = 0, \quad y = \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1},$$

on forme l'équation aux puissances $n^{\text{èmes}}$ des racines,

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} b_i z^{n-1-i} = 0, \quad z = \beta_1^n, \beta_2^n, \ldots, \beta_{n-1}^n,$$

on a

$$C = \sum_{i=0}^{i=n-1} b_i.$$

Schaertlin (*G.*). — Déterminer un point tel que la somme de ses distances à n points donnés soit un minimum. (70).

Ciamician. — Sur la constitution des éléments. (71-72).

Erdmann (*G.*). — Sur les variations d'ordre n. (73-96).

Soit à chercher le maximum ou le minimum de

$$V = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y, y')\,dx,$$

où $y' = \frac{dy}{dx}$; posons

$$a_{mn} = \frac{\partial^{m+n}}{\partial y^m \partial y'^n} \varphi(x, y, y'), \quad a'_{mn} = \frac{d}{dx} \frac{\partial^{m+n}}{\partial y^m \partial y'^n} \varphi(x, y, y').$$

L'équation différentielle

(1) $$a_{10} = a'_{01}$$

doit être vérifiée. L'auteur se donne les limites y_0 et y_1 de y et traite le problème dans les cas où :

1° L'équation (1) est une équation différentielle de second ordre, où, par suite, la solution contient deux constantes d'intégration indépendantes l'une de l'autre;

2° Toutes les quantités a_{mn} deviennent, quand on y remplace y par la valeur que l'on tire de (1), des fonctions de x qui demeurent finies et continues entre les limites de l'intégration;

3° Désignant par c_1 et c_2 les constantes d'intégration, tous les quotients différentiels de y et y' par rapport à c_1 et c_2 de la forme $\frac{d^{m+n} y}{dc_1^m\, dc_2^n}$ et $\frac{d^{m+n} y'}{dc_1^m\, dc_2^n}$ restent finis.

Il applique ensuite les résultats trouvés au problème du principe de la moindre action dans le mouvement elliptique, puis au cas où le corps mobile est attiré

proportionnellement à la distance. Dans ce dernier cas, le principe de moindre action est applicable au mouvement elliptique du mobile, tant que sa trajectoire est comprise entre deux tangentes rectangulaires. Quand le mobile décrit cet arc en entier, le principe de la moindre action n'est plus applicable que dans le cas où les deux extrémités de l'arc se trouvent de côté et d'autre du grand axe, les tangentes en ces points faisant avec le grand axe l'angle $\varphi = \text{arc tang}(\sqrt{2} \pm 1)$.

Lange (*E.*). — Note sur un théorème de Chasles. (98-103).

Il s'agit du théorème suivant, donné par Chasles dans son *Aperçu historique*, p. 404, note XXXIII : *Quand les quatre faces d'un tétraèdre mobile sont assujetties à passer respectivement par quatre droites situées d'une manière quelconque dans l'espace, et que trois sommets du tétraèdre doivent se trouver sur trois autres droites, placées aussi d'une manière quelconque dans l'espace, le quatrième sommet du tétraèdre parcourra une courbe à double courbure du troisième degré.*

Ce théorème ainsi énoncé n'est point exact. M. Lange se propose de rechercher à quelles conditions doivent satisfaire les droites de l'espace pour qu'il ait lieu; il détermine aussi les cas où la cubique se décompose.

Frenzel (*C.*). — Nouvelle solution d'un problème de rotation. (104-126).

Le problème en question est la détermination du mouvement d'un solide de révolution autour d'un point fixe situé sur son axe sous l'influence de la pesanteur.

Ce problème a déjà été résolu bien des fois, mais l'auteur considère comme manquant de symétrie les solutions de Lagrange (*Mécanique analytique*, t. II), Poisson (*Traité de Mécanique*, t. II), Resal (*Traité de Cinématique pure*), Jullien (*Problèmes de Mécanique rationnelle*, t. II).

M. Frenzel se propose d'appliquer à la solution du problème les méthodes et les notations de Weierstrass, renvoyant d'ailleurs lui-même le lecteur qui a l'habitude d'employer les notations de Jacobi au Mémoire si intéressant de M. Hermite [*Sur quelques applications des fonctions elliptiques* (*Comptes rendus*, 2e semestre 1877 et 1er semestre 1878)].

Weihrauch (*K.*). — Développement d'un polynôme. (127-132).

m et n étant des nombres entiers, développer l'expression $(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})^n$. Posant

$$\left(\sum_{k=0}^{k=m-1} x^k\right)^n = \sum_{k=0}^{k=n(m-1)} a_k x^k$$

et de plus suivant toujours la notation employée dans le *Zeitschrift*,

$$(n)_k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k},$$

on trouve

$$a_k = \sum_{i=0} (-1)^i (n)_i (n-1+k-mi)_{n-1}.$$

Weihrauch (*K.*). — Valeur de quelques déterminants doublement orthosymétriques. (132).

Déterminant doublement orthosymétrique où l'on fait

$$a_k = \frac{(k-1)(k-2)}{2} \text{ ou } = (k-1)^2 \text{ ou } = \cos(ka) \text{ ou } = \sin(ka).$$

Weihrauch. — Théorème sur le quadrilatère plan. (133-134).

Thomae (*J.*). — La loi de réciprocité. (134-135).

Simplification de la troisième démonstration de Gauss.

Schlömilch (*O.*). — Une propriété des ellipses et des hyperboles concentriques. (135-136).

Schumann (*Ad.*). — Sur l'hyperboloïde équilatère. (136-143).

Dans le 86e volume du ***Journal de Crelle,*** M. Voigt a publié un Mémoire sur l'hyperboloïde déterminé par trois droites dont les directions constituent un trièdre trirectangle.

M. Schumann expose analytiquement les résultats trouvés par Voigt.

Hess (*W.*). — Propriétés de la lemniscate. (143-144).

Sur quelques théorèmes analogues à ceux qui se rapportent aux coniques.

Horn (*Th.*). — Sur les discontinuités du second quotient différentiel du potentiel superficiel. (145-156 et 209-231).

Le problème que l'auteur se propose est le suivant :

« Comment varient les seconds quotients différentiels du potentiel d'une surface courbe massive, pour des directions variables, et lorsque le point pour lequel on les forme traverse la surface ».

Schumann (*Ad.*). — Sur la cinématique des systèmes variables. (157-178).

Déjà dans le 23e volume du ***Zeitschrift,*** M. Burmester s'est occupé du mouvement des figures variables, employant la méthode synthétique dans la détermination des vitesses et des accélérations des points du système.

Il ne s'occupe ni des aires décrites par une courbe, ni des tangentes des arcs de courbe tracés par un point, ni des volumes décrits par une surface. M. Liguine [***Sur les aires des trajectoires décrites dans le mouvement plan d'une figure de forme invariable*** (***Bulletin des Sc. math.,*** II_2, p. 306)] et M. Darboux [***Sur les mouvements d'une figure invariable; propriétés relatives aux aires, aux arcs de courbe décrits et aux volumes des surfaces trajectoires*** (***Bulletin des Sc. math.,*** II_2, p. 383)] ont traité des questions de cette nature. Déjà, en 1867, M. Schumann s'était occupé de la mesure des surfaces décrites par une droite d'un système invariable dans son mouvement [Schumann, ***Beziehungen zwischen Flächen im Zusammenhange mit dem Krümmungsschwerpuncte von Curven*** (***Progr. d. Louisenstädt. Realschule in Berlin***)], et il a donné à ses

théorèmes une forme plus générale, en s'appuyant sur le Mémoire de M. Darboux, dans un travail publié dans le 25[e] volume du *Zeitschrift* (*Ueber die Flächenräume und Bogenlängen, welche bei der Bewegung eines starren Systems von einer Gerade umschrieben werden*).

Dans le présent travail, l'auteur se propose d'étendre ces théorèmes aux systèmes qui, dans leur mouvement, demeurent semblables à eux-mêmes. Quelques-uns des théorèmes peuvent aussi s'étendre facilement au cas où le système, tout en changeant de forme, demeure en affinité.

Matthiessen (*L.*). — Intégration des équations différentielles qui se présentent dans la dioptrique des cristallins sphériques des poissons. (179-200).

Suite du travail dont une première partie a paru dans le 25[e] volume du *Zeitschrift.*

Wein (*E.*). — Sur la détermination de la position d'une étoile par l'intersection de deux grands cercles. (201-204).

Böklen (*O.*). — Sur les surfaces homofocales. (204-207).

Étant donné un système de surfaces homofocales, on prend un point S de l'espace comme sommet d'un cône tangent qui touche une des surfaces, par exemple un ellipsoïde le long d'une ellipse E, considérée comme ellipse focale : déterminer un second système de surfaces homofocales. Les trois surfaces homofocales du second système qui passent par S ont avec les trois surfaces homofocales du premier système un contact supérieur, en ce sens qu'il y a coïncidence non seulement entre les tangentes aux lignes de courbure, mais aussi entre les génératrices réelles ou imaginaires de chaque groupe de surfaces tangentes.

Hočevar (*F.*). — Théorème de Géométrie. (207-208).

Schönemann (*P.*). — Transformation d'un triangle en un carré. (208).

Holzmüller (*G.*). — Sur les faisceaux isothermes, les parentés isogonales et les systèmes variables conformes qui sont en connexion avec les modes de représentation exprimés par les équations

$$z = \sqrt[n]{Z}, \quad z = \sqrt[m]{\frac{aZ^n - b}{cZ^n + d}}.$$

(231-256).

Suite des travaux de M. Holzmüller sur la géométrie lemniscatique et ses rapports avec des questions physiques. Étant donnée une courbe dans le plan Z, quelle est la courbe correspondante dans le plan Z et réciproquement? Ces considérations conduisent l'auteur à des courbes qu'il appelle hyperboles d'ordre n, lemniscates d'ordre n, dont il étudie les propriétés et qui lui fournissent des faisceaux de lignes isothermes. Il étudie aussi la correspondance entre les mouve-

ments de deux points correspondants figurés, l'un dans le plan z, l'autre dans le plan Z.

Wiener (*Chr.*). — Sur le double mode de génération des roulettes allongées ou raccourcies. (257-263).

Toute épicycloïde ou toute hypocycloïde généralisée peut être engendrée de deux manières : le point qui décrit la courbe se trouve dans un cas à l'intérieur du cercle mobile, dans l'autre cas à l'extérieur. L'auteur donne une démonstration simple de ce théorème; il remarque cependant que le théorème se trouve déjà énoncé dans un livre de Proctor (*A Treatise on the cycloïd and all forms of cycloïdal curves*, London, 1878), mais l'auteur anglais appuie sa démonstration sur les propriétés des courbes épicycliques établies précédemment.

Böklen (*O.*). — Sur les lignes géodésiques. (264-269).

L'équation d'une courbe tracée sur une surface quelconque est donnée en coordonnées géodésiques bipolaires; au point M de la courbe on mène le plan tangent et les tangentes aux rayons vecteurs géodésiques sur lesquelles on porte des segments proportionnels au numérateur et au dénominateur du quotient différentiel $\left|\frac{du}{dv}\right.$ si l'on a pour la courbe $\left.u = f(v)\right|$; la diagonale du parallélogramme complété avec ces deux segments est la normale à la courbe.

Applications à quelques exemples.

Schröter (*H.*). — Remarque au sujet de la Note sur un théorème de Chasles par E. Lange (p. 98 de ce volume). (270-272).

Hauck (*G.*). — Sur les principes fondamentaux de la perspective linéaire. (273-296).

L'auteur, qui a déjà publié un Mémoire sur la « Perspective subjective et les courbures horizontales du style dorique », où il cherche à donner à la perspective une base purement scientifique en partant des lois de l'optique physiologique moderne, se propose ici de donner pour ainsi dire un commentaire de ce travail. Il prétend fonder la perspective sur la physiologie et essaye en somme, dans le présent Mémoire, de donner à ses idées métaphysiques une forme un peu plus mathématique qu'il ne l'avait fait d'abord.

Küttner (*W.*). — Sur la statistique mathématique. (297-313).

Thomae (*J.*). — Théorie élémentaire de la série hypergéométrique. (314-332).

Dans ce travail, l'auteur se propose non pas tant de donner des résultats nouveaux, que d'exposer d'une façon simple et élémentaire les propriétés connues de la série hypergéométrique. Thomae commence d'abord par l'étude des facultés (*Facultäten*). Une fonction telle que

$$\varphi(n+1) = (n+1)\varphi(n),$$

$$\lim \varphi(n+\omega) : \varphi(\omega)\omega^{n} = 1, \quad \varphi(0) = 1,$$

ω étant une quantité positive qui croît au delà de toute limite, est complètement

définie. La marche suivie pour arriver à une représentation de la fonction est celle due à Weierstrass (*Journal de Crelle,* t. 51, p. 1-70). Il passe ensuite à l'étude des formules de récursion à trois termes :

$$A_n \varphi(n+2) + B_n \varphi(n+1) + C_n \varphi(n) = 0,$$

A_n, B_n, C_n étant des fonctions entières de n. Enfin il montre l'application des considérations précédentes à la série hypergéométrique.

Much. — Sur la méthode due à Sturm pour la démonstration du théorème d'addition des intégrales elliptiques de première espèce. (333-335).

Finger. — Sur un pendule analogue à celui de Kater et son application à la mesure de la pesanteur. (335-336).

Wittwer (W.-C.). — Éléments de Chimie mathématique. (337-356).

Krey (H.). — Quelques applications d'un théorème de la théorie des fonctions. (357-376).

M. Krey part du théorème fondamental de Cauchy qui donne les conditions sous lesquelles une intégrale prise entre deux limites quelconques ne change pas quand on fait varier le chemin d'intégration. Il l'applique successivement à la démonstration d'un théorème d'Algèbre dû à Jacobi [*Theoremata nova algebraica* (*Journal de Crelle,* t. 14)], à la détermination du nombre des solutions d'un système d'équations algébriques, et enfin pour la démonstration du théorème d'addition des intégrales elliptiques de première espèce, tel qu'il se présente comme cas particulier du théorème d'Abel.

Biehringer. — Sur une extension des lois de Mariotte et de Gay-Lussac. (377-383).

Böklen (O.). — Sur les foyers des lignes de courbure de l'ellipsoïde. (383-387).

Les lignes de courbure de l'ellipsoïde sont sur des ellipsoïdes ou des hyperboloïdes de révolution. Propriétés qui en résultent.

Lauermann (K.). — Sur les normales à l'ellipse. (387-390).

Démonstration analytique assez simple de propriétés connues depuis longtemps sur les pieds des normales abaissées d'un point sur l'ellipse.

Vogel (P.). — Note sur la discontinuité dans les courbes. (391-392).

$y = f(x)$ étant l'équation d'une courbe ayant un point double au point $x = a$, M. Plateau croyait qu'en remplaçant y par $y - \cos\sqrt{a - x}$, on obtiendrait une courbe à *point saillant*. M. Mansion a montré dans ce *Bulletin* (1878, II_2) que

cela n'était pas exact. M. Vogel propose de remplacer y par $y - \frac{(x-a)^n}{\log(x-a)}$, n étant entier et $\gtreqless 1$ et appliqué à quelques cas particuliers.

Hovestadt (*H.*). — Démonstration d'un théorème de Weierstrass. (392-393).

Théorème sur les formes quadratiques bilinéaires, donné par Weierstrass dans les *Monatsberichte* de Berlin, de 1858, p. 207.

Hornstein. — Sur la connaissance du système des astéroïdes. (394).

Biehringer. — A propos de la Météorologie. (395-400).

G. B.

MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES DE BORDEAUX [1].

Tome II; 1878.

Darboux. — Mémoire sur l'équilibre astatique et sur l'effet que peuvent produire des forces de grandeurs et de directions constantes appliquées en des points déterminés d'un corps solide quand ce corps change de position dans l'espace. (1-65).

Voir le *Bulletin*, 2e série, t. II, Ire Partie, p. 278.

De Tilly. — Note sur la théorie de la rotation des projectiles et sur la similitude mécanique. (66-72).

L'auteur donne quelques indications sur les travaux faits sur ce sujet par M. le général Mayevski, par M. Magnus de Sparre et par lui-même; il avait dirigé quelques critiques, fondées en théorie, sur la méthode de M. Mayevski; les résultats obtenus par ce dernier sont cependant exacts, ainsi que l'a montré l'étude approfondie faite par M. Magnus de Sparre; M. de Tilly justifie le principe de ses critiques.

Tannery (*P.*). — Note sur la genèse des forces attractives et répulsives. (95-104).

Il s'agit de ce problème : « Déterminer les hypothèses nécessaires pour substituer, à des attractions et répulsions s'exerçant à distance entre des molécules matérielles, l'action d'un milieu s'exerçant par pression sur ces molécules. » L'auteur admet que les molécules sont des solides invariables et que le milieu est fluide.

---

[1] Voir *Bulletin*, I_2, p. 167.

Rayet (*G.*). — Note sur quelques propriétés géométriques du canevas des cartes orthodromiques équatoriales. (129-130).

Il s'agit de la projection orthodromique de M. Hilleret où le canevas des méridiens et des parallèles est formé par des droites et des hyperboles. M. Rayet donne en particulier la loi de la dilatation des surfaces.

Tannery (*P.*). — Hippocrate de Chio et la quadrature des lunules.

Réfutation de l'opinion d'après laquelle le géomètre grec aurait voulu passer de la quadrature des lunules à celle du cercle.

Castet. — Du plus court chemin sur une surface de révolution entre deux points de la génératrice. (185-187).

Glotin. — Navigation orthodromique. (188-210).

Jacquier. — Note sur les propriétés des systèmes de deux forces qui sont équivalentes. (211-216).

Tannery (*P.*). — Sur les solutions du problème de Délos par Archytas et par Eudoxe.

Essai de restitution de la solution par Eudoxe du problème des moyennes proportionnelles, solution sur laquelle on n'a que quelques indications fournies par Eutocius.

Gomes Teixeira (*F.*). — Sur le nombre des fonctions arbitraires des intégrales des équations aux dérivées partielles. (315-321).

L'auteur se propose d'étendre la théorie d'Ampère à une équation contenant un nombre quelconque de variables indépendantes

Tome III; 1879.

De Tilly. — Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique. (1-190).

« L'auteur rappelle d'abord les définitions ordinaires du point, de la ligne, de la surface, et il énumère alors les trois axiomes irréductibles qui forment la base de la Géométrie, savoir : 1° l'axiome de la *distance* et de ses propriétés essentielles, communes aux divers systèmes de Géométrie; 2° l'axiome de l'augmentation indéfinie de la distance, qui exclut la géométrie dite *elliptique* ou doublement abstraite, dans laquelle l'espace serait *rentrant sur lui-même*: 3° l'axiome de la parallèle unique, qui sépare la géométrie usuelle ou euclidienne de la géométrie *abstraite* de Lobatchefsky et de Bolyai.

» On peut définir la position d'un point de l'espace avec une approximation indéfinie, sans avoir besoin d'aucune comparaison directe des positions de l'étendue, en concevant l'espace rempli par trois systèmes de surfaces dont on

peut subdiviser à l'infini les intervalles, et auxquelles on attribuerait des numéros d'ordre. Entre deux points ainsi définis, il existe une certaine relation, dont nous n'avons d'idée que par le sentiment de la constance de l'impression qu'elle produit sur nos sens : c'est la *distance*. Cette quantité dépend des numéros des surfaces qui déterminent les deux points.

» Les propriétés que l'expérience nous porte à admettre dans les êtres géométriques ne sont compatibles qu'avec trois formes générales de cette relation, formes dont chacune caractérise un des trois systèmes de géométrie dont nous venons de parler.

» De là, l'auteur passe aux notions de la sphère et du cercle, et il établit les propriétés de la rotation d'un système invariable autour d'un point fixe, puis autour de deux points fixes. Dans ce dernier mouvement, il existe une série continue de points immobiles qui constituent la ligne droite, définie ainsi indépendamment du plan.

» Vient ensuite l'étude des triangles, après laquelle l'auteur établit la définition du plan, comme lieu décrit par une droite tournant autour d'une droite qui lui est perpendiculaire. Propriétés de la perpendiculaire au plan.

» La ligne droite considérée dans le plan. Axiome des parallèles.

» Tel est le contenu du Chapitre I. Le Chapitre II a pour titre : Exposition de la Géométrie dans les Traités élémentaires. M. de Tilly passe en revue, numéro par numéro, le Traité de MM. Rouché et de Comberousse, en indiquant seulement le chiffre des articles auxquels il ne trouve rien à changer, et donnant pour les autres l'exposé succinct des modifications qu'il croit devoir y apporter. De cette manière, il a pu faire tenir en quarante pages tous les matériaux nécessaires pour reconstruire un Traité de Géométrie entièrement conforme aux principes établis dans le premier Chapitre, tout en conservant une forme appropriée à l'enseignement élémentaire.

» Le Chapitre III contient un travail analogue sur la Trigonométrie usitée. Dans le Chapitre IV, l'auteur indique les changements qu'il faudrait apporter à la Trigonométrie usitée pour l'approprier aux systèmes de Géométrie plus généraux.

» Le Chapitre V traite des principes de la Mécanique. Après avoir indiqué les raisons pour lesquelles il y abandonne les systèmes plus compliqués que le système usuel, l'auteur expose successivement ses idées sur la notion de vitesse et quelques points de Cinématique, l'axiome de l'inertie, le théorème des vitesses virtuelles, les théorèmes généraux de la Dynamique, enfin sur une question spéciale relative au mouvement de rotation d'un corps solide. »

Weyr (*Ed.*). — Sur l'arrangement des plans tangents de certaines surfaces. (191-211).

L'auteur s'occupe des surfaces engendrées par une conique mobile, variable de grandeur et de forme, et de l'arrangement de plans tangents le long d'une conique génératrice ; la solution du problème suivant forme la conclusion principale de son travail.

Considérons une surface Π sur laquelle il se trouve une série de coniques Σ. Soit donnée la surface développable Δ enveloppe des plans des coniques Σ, et soient données de plus cinq courbes (directrices) de Π. Par cela, Π est parfaitement déterminée. En effet, tout plan ϖ tangent à Δ contiendra une conique Σ de Π ; cette conique passera par les traces sur ϖ des cinq courbes données.

On demande de construire le plan tangent de Π en un point quelconque de Σ.

Laisant. — Remarques sur les fractions périodiques. (212-234).

L'auteur complète l'étude de certaines propriétés, concernant les fractions périodiques, publiées en collaboration avec M. Baujeux dans deux Mémoires insérés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (2e série, t. VII et IX.)

Abria. — Sur les surfaces équipotentielles. (235-283).

Bayssellance. — Représentation proportionnelle des minorités. (285-304).

Tannery (*P.*). — L'arithmétique des Grecs dans Pappus. (351-371).

Analyse des débris, malheureusement trop rares, qui, dans la *Collection mathématique* de Pappus, concernent l'Arithmétique.

Darboux (*G.*). — Note sur deux intégrales elliptiques qui se présentent sous forme indéterminée. (373-376).

Lorsque k tend vers zéro, l'expression $\log \frac{4}{k}$ constitue une valeur approchée de K'.

Recherche de la valeur de l'intégrale

$$\int_0^a \frac{\operatorname{dn}' a\, du}{\operatorname{sn}' a \operatorname{cn}' a (1 - k^2 \operatorname{tn}'^2 a \operatorname{sn}^2 u)},$$

pour la valeur K' attribuée à l'argument a.

Glotin. — Navigation orthodromique. (377-394).

Glotin. — Résolution des triangles sphériques par des triangles rectilignes sur une projection gnomonique. (395-400).

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. GERONO et CH. BRISSE (¹). — 3e série.

Tome XX; 1881, 2e semestre.

Letnikof (*A.*). — Sur les propriétés principales des foyers des courbes du second degré et sur la détermination analytique de ces points. (289-304).

(¹) Voir *Bulletin*, V₂, 131.

Cet article résume des propriétés connues et n'en contient pas de nouvelles. Il y a lieu cependant de remarquer, à la fin de cette exposition, une formule très simple donnant l'excentricité d'une conique. — La définition des foyers qui a été adoptée ici est celle d'Euler.

Droz (*A.*). — Note de Géométrie. (305-307).

Il s'agit d'un théorème de Chasles sur l'intersection du plan tangent et de la normale à une surface du second degré avec un des plans diamétraux de cette surface.

Leinekugel (*A.*). — Solution de la question du concours général de 1879, en rhétorique. (307-310).

Problème de Géométrie sur des volumes engendrés par des figures tournantes

Lez (*H.*). — Solution des questions du concours général de 1879, en seconde. (310-314).

1° Lieu géométrique dérivant d'un système de deux droites parallèles.
2° Calcul relatif au triangle équilatéral.

Moret-Blanc. — Solution de la question du concours général de 1880, en philosophie. (314-315).

Lieu des points d'une sphère pour lesquels la longitude est égale à la latitude.

Moret-Blanc. — Solution de la question du concours général de 1880, en rhétorique. (315-316).

Volumes engendrés par des figures tournantes.

Un abonné. — Solution de la question du concours général de 1880, en seconde. (317-319).

Problème relatif au triangle.

Moret-Blanc. — Solution des questions du concours général de 1880, en troisième. (319-321).

1° Lieu géométrique relatif à deux droites parallèles.
2° Construction d'un quadrilatère inscriptible.

Correspondance. — M. L. Doucet : Sur la question comprise sous les nos 970 et 1028. Un triangle circonscrit à une elliptique a pour hauteurs les droites joignant les sommets aux points de contact ; lieu des sommets ; lieu du point de concours des hauteurs. — M. A. Legoux : Sur l'intégration des équations des lignes de courbure de l'ellipsoïde. — M. A. Hilaire : Sur un théorème de Steiner, attribué par erreur à M. Mention, et relatif à une conique inscrite dans un triangle. (321-328).

B... (*Ch.*). — Solution de la question 127. (329-330).

En rendant rationnelle l'équation

$$(a_1+x)^{\frac{1}{2}}+(a_2+x)^{\frac{1}{2}}+\ldots+(a_n+x)^{\frac{1}{2}}=0,$$

on parvient à une équation du degré 2^{n-2}.

Moret-Blanc. — Solution de la question 1195. (330-332).

Le nombre des boulets d'une pile à base carrée ou triangulaire n'est jamais n^3 ni n^5.

Moret-Blanc. — Solution de la question 1328. (333-335).

Sur un certain système de surfaces du second degré.

Realis (*S.*). — Solution de la question 1330. (335-336).

Propriétés des expressions

$$\begin{aligned}
x &= 2\ \ (\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2)+2\alpha(2\beta+3\gamma+4\delta),\\
y &= 2(-\alpha^2+\beta^2-\gamma^2+\delta^2)+2\beta(2\alpha-3\gamma+4\delta),\\
z &= 3(-\alpha^2-\beta^2+\gamma^2+\delta^2)+4\gamma(\alpha+\beta+2\delta).
\end{aligned}$$

Voir *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVIII, p. 500, sur un sujet analogue.

Resal (*H.*). — Note sur la généralisation d'un théorème de Pappus. (337-338).

La proposition de M. Resal consiste en ce que les points qui divisent proportionnellement les côtés successifs d'un polygone fermé ont même centre de gravité que les sommets du polygone. Elle a été énoncée antérieurement en 1877, avec bien d'autres propriétés, par M. Laisant, dans une Communication au Congrès du Havre.

Faure (*H.*). — Sur l'expression du volume de certains tétraèdres. (338-344).

Cet article est une intéressante application des déterminants à diverses questions concernant des volumes de tétraèdres. On y retrouve certains résultats figurant dans la *Théorie des indices*, du même auteur.

Jamet (*V.*). — Sur une classe de surfaces du quatrième ordre. (344-348, 385-391, 434-443).

Cette étude prend son origine dans un travail de M. Amigues sur les *girocyclides*, surfaces spéciales engendrées par des circonférences passant par deux points fixes. L'auteur s'est proposé d'obtenir certaines propriétés des girocyclides du quatrième ordre au moyen de propriétés des cônes du second ordre, en établissant la corrélation entre ces deux surfaces. Nous regrettons de ne pouvoir signaler, même à grands traits, les principales de ces propriétés, parmi lesquelles il y a lieu de remarquer surtout celles qui se rapportent aux lignes de courbure.

plusieurs propriétés dignes d'intérêt, qui prennent principalement leur source dans les travaux de Chasles et de M. Cremona.

Dewulf (*E.*). — Question : Combien existe-t-il de courbes rationnelles (unicursales) du quatrième ordre qui ont deux points doubles en a_1 et a_2 et qui passent par les sept points simples 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7? (401-402).

Catalan (*E.*). — Note sur la question 393. (403-405).

Sur les aires de paraboles d'ordres quelconques.

Legoux (*A.*). — Note sur un système de courbes orthogonales et homofocales. (406-408).

Les courbes dont il s'agit sont représentées par l'équation

$$\frac{x^2}{\lambda f(x,y)-a}+\frac{y^2}{\lambda f(x,y)-b}=1.$$

Realis (*S.*). — Démonstration de propositions énoncées. (408-411).

Ces propositions (voir 2e série, t. XVII, p. 178) se rapportent aux racines entières de l'équation du troisième degré, et conduisent à d'intéressantes propriétés des nombres.

Droz (*A.*). — Note sur des formules de Joachimsthal. (411-413).

Surface du triangle, connaissant les équ tions des trois côtés. — Volume du tétraèdre, connaissant les équations des quatre plans formant les faces.

Genty. — Note sur les conditions qui expriment qu'une surface du second degré est de révolution. (414-416).

L'auteur obtient ces conditions par une méthode très élégante en employant la polaire réciproque de la surface, par rapport à une sphère concentrique.

Fauquembergue (*E.*). — Solution d'une question de licence; Paris, juillet 1880. (416-418).

Problème sur la chaînette.

Henry (*C.*). — Décomposition des nombres $f^{12}-9g^{12}$ et du double de ces nombres en deux cubes rationnels. (418-420).

Conséquences d'identités dues à M. Éd. Lucas.

Fauquembergue (*E.*). — Solution d'une question de licence; Paris, juillet 1880. (420-421).

Question de Cinématique dans l'espace.

Chambeau (*A.*). — Solution de la question proposée au concours d'admission à l'École Centrale en 1880; 2e session. (464-468).

Problème sur les paraboles passant par deux points fixes, et dont les diamètres ont une direction fixe.

Concours d'admission a l'École Polytechnique en 1881. — Mathématiques; Littérature; Lavis; Calcul; Géométrie descriptive. Énoncés des compositions. (468-470).

Fauquembergue (*E.*). — Solution d'une question de licence; Paris, juillet 1880. (471-473).

Équation différentielle des lignes asymptotiques d'une certaine surface.

Bourget (*J.*). — Solution de la question 251. (473-480).

Problème des huit racines.

Question proposée : 1376. (480).

Rectification : question 1306, p. 370. (480).

Orlof (*G.-A.*). — Sur la fonction génératrice des polynômes $P_{m,n}$ de Didon. (481-489).

Cet article a pour origine les travaux de Didon publiés notamment, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXX, p. 749, sous le titre : *Sur un mode d'approximation des fonctions de plusieurs variables*, et dans les *Annales de l'École Normale*, 1re série, t. VII, p. 247 : *Développements sur certaines séries de polynômes à un nombre quelconque de variables.* Dans ces deux articles, ce géomètre, trop prématurément enlevé à la Science, a étudié les propriétés de ces fonctions $P_{m,n}$ qui présentent une grande analogie avec les fonctions X_n de Legendre. L'article de M. Orlof contient des résultats nouveaux et souvent de notables simplifications.

Biehler (*Ch.*). — Théorie des points singuliers dans les courbes algébriques. (489-498, 537-546).

Ces deux articles forment la suite d'études précédemment publiées sous le même titre dans les *Nouvelles Annales* (voir *Bulletin* IV_2, 265; V_2, 134). Dans cette troisième partie, l'auteur étudie la construction des branches paraboliques fournies par une direction multiple de points à l'infini. Il suppose successivement que cette direction est parallèle à l'axe des y, ou bien quelconque, et se livre à une discussion très complète des divers cas qui peuvent se présenter.

Weill. — Théorèmes sur les courbes algébriques. (498-500).

Ces théorèmes portent sur la somme des carrés des distances mutuelles des points où une sécante rencontre une courbe.

Realis (*S.*). — Exercices de calcul algébrique. (501-506).

Ces exercices se rapportent à de remarquables identités, et conduisent à des propriétés des nombres rationnels, soit réels, soit complexes, spécialement en ce qui touche les décompositions en sommes de trois carrés.

D'Ocagne (*M.*). — Sur le mouvement vertical d'un point pesant dans un milieu résistant. (506-511).

Cette Note a pour but de faire connaître une propriété commune aux deux mouvements, ascendant et descendant. Il s'agit de la loi qui lie les espaces parcourus par le mobile en des temps égaux.

Concours d'admission a l'École navale en 1880. — Géométrie et Statique; Tracé graphique; Arithmétique, Algèbre, Calcul de Trigonométrie rectiligne. Énoncés des compositions. (511-514).

Lionnet. — Propositions. (514-515).

Six énoncés sur les propriétés des nombres.

Un anonyme. — Solution de la question 1272. (515-518).

Propriétés du tétraèdre dont les faces sont équivalentes.

Moret-Blanc. — Solution de la question 1283. (518-520).

Enveloppe d'une droite.

Moret-Blanc. — Solution de la question 1343. (520-522).

Questions relatives au triangle.

Goffart (*N.*). — Solution de la question 1373. (523-524).

Propriété de la circonférence.

Goffart (*N.*). — Solution de la question 1374. (524-526).

Lieu géométrique dans l'espace.

Questions proposées : 1377 à 1381. (526-527).

Rectifications : Questions 1364 et 1376. (528).

Resal (*H.*). — Sur la détermination de quelques intégrales indéfinies. (529-537).

Ces intégrales sont celles des expressions suivantes :

$$f(x)\sqrt{1 \pm x^2}\,dx, \quad \frac{f(x)}{\sqrt{1 \pm x^2}}\,dx, \quad f(x)\sqrt{x^2 - 1}\,dx, \quad \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 - 1}}\,dx,$$

$$\sqrt{\sin x}\,dx, \quad \sqrt{\operatorname{cosec} x}\,dx, \quad \sqrt{\operatorname{tang} x}\,dx.$$

Saltel (*L.*). — Contribution à la théorie de la substitution des systèmes d'équations. Application de cette théorie à la recherche

de l'équation et des points multiples d'un lieu défini par k équations contenant $k-1$ paramètres variables. (546-564).

L'auteur définit ainsi l'objet de son Mémoire :

« On rencontre, en Algèbre élémentaire, de nombreux problèmes se résolvant sans peine, grâce à l'introduction de solutions étrangères préalablement connues; il suffit en effet de les supprimer à la fin du calcul.

» C'est, je crois, faute d'avoir remarqué l'existence et la détermination précise de certains résultats étrangers, qui s'introduisent nécessairement par les substitutions *connues* d'un système d'équations à un autre système d'équations, que l'on ne développe pas, dans les *Traités de Géométrie analytique*, un procédé *élémentaire* permettant de trouver l'équation d'un lieu géométrique défini par k équations contenant $k-1$ paramètres variables. En traitant, dans le présent travail, quatre cas particuliers de ce dernier problème général, j'aurai donc surtout en vue de mettre en parfaite évidence l'existence et la détermination exacte des non-solutions que l'on rencontre dans l'application des règles les plus élémentaires relatives à la théorie de l'élimination; j'indiquerai en outre un moyen, non encore remarqué, d'obtenir, en même temps que l'équation du lieu, les coordonnées des points multiples de ce lieu. »

Voir, du même auteur : *Historique et développement d'une méthode pour déterminer les singularités ordinaires d'un lieu géométrique défini par k équations.*

École Normale supérieure; Concours de 1881. — Composition de Physique. Énoncé (565). A. L.

ASSOCIATION FRANÇAISE pour l'avancement des Sciences. Comptes rendus des Sessions [1].

5e Session (Clermont-Ferrand); 1876.

Lucas (*É.*). — Sur la recherche des grands nombres premiers. (61-68).

Le Mémoire de M. Lucas a pour objet l'étude de la décomposition ou de l'irréductibilité des grands nombres en facteurs premiers. Les nouvelles méthodes reposent sur une idée fondamentale, l'étude des fonctions symétriques des racines d'une équation de degré quelconque à coefficients commensurables et sur la réciprocité d'un théorème de Fermat. Si l'on désigne par a un nombre quelconque non divisible par le nombre premier p, $a^{p-1}-1$ est, comme on sait, un multiple de p. Mais la réciproque de ce théorème n'a pas lieu nécessairement. Cependant on peut énoncer la proposition suivante : « Si a^x-1 est divisible par p pour

---

[1] Voir *Bulletin*, I$_2$, 173.

$x = p - 1$ et n'est pas divisible par p lorsque x est un diviseur de $p - 1$, on peut affirmer que le nombre p est premier. » Cette proposition n'est qu'un cas particulier d'une proposition plus étendue, puisque l'on peut, comme M. Lucas l'a prouvé dans un très grand nombre de cas, remplacer le nombre entier a par un nombre complexe. Mais la méthode qui résulte de l'application de ce théorème est pour ainsi dire opposée aux anciennes méthodes. Dans celle d'Euler, par exemple, on divise le nombre supposé premier par des nombres toujours inférieurs et différents, et c'est l'insuccès de la division qui conduit à affirmer que le nombre essayé est premier. Dans la méthode de M. Lucas les divers essais consistent dans la division de nombres d'un calcul facile par un même diviseur, le nombre donné. Par conséquent, d'une part, on n'a pas besoin de se servir d'une Table de nombres premiers; d'autre part, dans le cas d'un nombre premier, le résultat se trouve affranchi de l'incertitude des calculs numériques. De plus, la division se trouve nécessairement supprimée, puisqu'il suffit préalablement de calculer les dix premiers multiples du diviseur constant. M. Lucas a déduit de là le plan d'une machine automatique qui permettrait de trouver de très grands nombres premiers.

Catalan (*E.*). — Sur les fonctions X_n de Legendre. (68-74).

Indication de très nombreuses relations entre ces polynômes et leurs intégrales associées aux facteurs $1 - x$, $1 - x^2$.

Grolous (*J.*). — Étude sur la thermostatique des corps. (75-80).

Arson. — Essai de théorie sur le ventilateur à force centrifuge. (82-87).

Collignon (*É.*). — Problème des raccordements. (87-106).

Le tracé des routes, des canaux, des chemins de fer, etc., présente une série d'alignements droits reliés par des courbes. On emploie généralement, pour opérer ces raccordements, des cercles ou des paraboles. Il résulte de là que le tracé présente, au point où une courbe succède à un alignement droit, une variation brusque de courbure qui n'est pas sans inconvénient, surtout sur les chemins de fer où la trajectoire des wagons est fixée d'une manière invariable. Le dévers transversal qu'il convient de donner à la voie pour équilibrer la force centrifuge étant proportionnel à la courbure, on serait conduit à faire varier brusquement la hauteur du rail à l'entrée d'une courbe; en réalité, on substitue une variation graduelle à cette dénivellation brusque, mais cette variation graduelle supposerait en toute rigueur une variation analogue de la courbure, c'est-à-dire une altération du tracé.

M. Collignon reprend cette question en se plaçant à un point de vue plus géométrique. Il s'agit donc de raccorder deux alignements droits en des points donnés par une courbe dont la courbure soit nulle en ces points extrêmes et varie d'une manière continue de l'un à l'autre. L'auteur examine successivement diverses solutions.

Lafon (*A.*). — Sur les accroissements géométriques (104-114).

L'auteur s'est proposé d'étendre aux parallélogrammes et aux parallélépipèdes la notion des accroissements géométriques. Après avoir introduit une notation nouvelle, il en fait des applications aux courbures géodésiques, aux théorèmes de Gauss et de Dupin, aux problèmes sur les enveloppes.

Tchebychef (*P.*). — Sur la généralisation de la formule de M. Catalan et sur une formule arithmétique qui en résulte. (114-117).

M. Tchebychef généralise la formule

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n},$$

en remplaçant les unités des numérateurs par les termes d'une série quelconque. Il donne ensuite des applications.

Deprez (*M.*). — Sur une machine destinée à l'étude des lois du frottement et du pouvoir lubréfiant des corps gras. (118-124).

Baehr (*C.-F.-W.*). — Note sur la cinématique des fluides. (124-127).

En considérant pour tous les points du fluide qui environnent à une très petite distance un point pris pour centre le déplacement relatif par rapport à ce centre, estimé dans la direction du rayon vecteur, on trouve qu'autour de chaque point du fluide on peut décrire un système d'hyperboloïdes à une nappe séparé par le cone asymptote d'un système d'hyperboloïdes à deux nappes, ces deux systèmes jouissant de la propriété suivante : La composante du déplacement relatif est dans le sens positif du rayon vecteur pour tous les points des surfaces de l'un des systèmes, et dans le sens négatif pour tous les points des surfaces de l'autre. Sur le cône asymptote le déplacement est perpendiculaire au rayon vecteur.

Jung (*G.*). — Sur les problèmes inverses des moments d'inertie et des moments de résistance d'une section plane. (127-128).

Résumé de la solution graphique communiquée à l'Institut Lombard.

Mannheim (*A.*). — Remarque sur la surface de l'onde. (130-140).

Cornu (*A.*). — Théorie de la liaison synchronique des appareils oscillants (131-140).

Un corps en oscillation, pendule ou lame vibrante, reçoit une attraction très faible pendant un temps très court, mais à des intervalles bien égaux. Si la durée de l'oscillation diffère peu de la période de succession des attractions extérieures, le système finit par prendre un mouvement oscillatoire et permanent, de même période que ces attractions.

Gariel (*C.-M.*). — Transformation perspective d'une anamorphose relative à la formule des lentilles. (140-143).

6e Session (Le Havre); 1877.

Piarron de Mondesir. — Sur les nombres premiers. Formules pour le calcul exact de la totalité des nombres premiers compris entre 0 et un nombre pair quelconque 2N. (79-92).

Il s'agit ici d'une formule permettant de calculer *a priori* et exactement le nombre des nombres premiers compris entre 0 et un nombre pair quelconque. La formule est fondée sur une notation qui exprime, soit en plus, soit en moins, le nombre entier qui se rapproche le plus du quotient du nombre quelconque N par un nombre premier ou par le produit de plusieurs nombres premiers. La formule peut être transformée en vue de simplifier les calculs. M. de Mondesir a pu ainsi aborder le calcul du nombre total des nombres premiers compris dans le premier million, nombre qu'il a trouvé égal à 78490.

Collignon (É.). — Recherches sur le mouvement épicycloïdal. (92-125).

Le problème que l'auteur s'est proposé de résoudre consiste à réaliser le mouvement donné d'un point dans un plan, à l'aide d'un mouvement épicycloïdal satisfaisant à l'une des deux conditions suivantes : ou bien que la courbe roulante applique en temps égaux des arcs égaux sur la courbe fixe qui lui sert de directrice, ou bien que la vitesse angulaire de la courbe roulante soit constante. On est ainsi conduit à des équations différentielles, que M. Collignon intègre dans plusieurs cas intéressants.

Mannheim (A.). — Sur les plans tangents singuliers de la surface de l'onde et sur les sections faites dans cette surface par des plans parallèles à ces plans tangents. (125-127).

L'auteur déduit de l'existence des points singuliers celle de plans singuliers, et il démontre que les sections faites daas la surface de l'onde par les plans parallèles à ces plans tangents singuliers sont des anallagmatiques du quatrième ordre.

Catalan (E.). — Sur la somme des diviseurs du nombre *n*. (127-129).

L'auteur examine les conséquences d'un théorème donné par M. Halphen à la Société Mathématique. Il montre qu'il est facile de tirer de là d'autres propositions analogues au célèbre théorème d'Euler. Par exemple, $\psi(n)$ représentant le nombre des décompositions de n en parties entières positives, égales ou inégales, M. Catalan établit que la somme des diviseurs de n a pour expression

$$\psi(n-1) + 2\psi(n-2) - 5\psi(n-5) - 7\psi(n-7) + 12\psi(n-12) + \ldots.$$

Leveau. — Note sur la comète périodique de d'Arrest. (129-133).

L'auteur rend compte de ses recherches sur cette comète. Le but de son travail a été de relier les observations faites en 1870 à celles de 1851 et 1858 et d'en déduire des positions exactes pour le retour de 1877. Le succès a couronné

comme on sait, ces efforts, et l'on a pu faire des observations d'après les éphémérides fournies par l'auteur.

Halphen. — Sur les points singuliers des courbes gauches algébriques. (132-142).

On trouve dans ce Mémoire une théorie générale des singularités quelconques des courbes gauches algébriques. La détermination des points singuliers, tangentes singulières, plans stationnaires, les relations entre l'ordre, la classe, le genre de ces courbes forment la partie la plus importante de cette étude intéressante.

Laisant (C.-A.). — Sur quelques propriétés des polygones. (142-154).

L'auteur s'est proposé surtout d'étudier les relations qui existent entre un polygone plan et celui qu'on obtient en construisant sur chacun des côtés du premier un triangle semblable à un triangle donné. La méthode des équipollences s'applique naturellement à ce genre de questions.

Piarron de Mondesir. — Sur une nouvelle formule algébrique. (154-158).

Cette formule peut être considérée comme la généralisation du binôme de Newton. L'auteur l'emploie pour démontrer la formule du Waring relative à la somme des puissances semblables des racines d'une équation.

Lemoine (Ém.). — Sur quelques questions de probabilité. (158-159).

Lucas (Éd.). — Considérations nouvelles sur la théorie des nombres premiers et sur la division géométrique de la circonférence en parties égales. (159-167).

C'est la suite des communications faites par l'auteur au Congrès de Clermont; on y trouve de nouveaux développements sur la division de la circonférence en parties égales et l'interprétation d'un passage des Œuvres de Mersenne; on y rencontre aussi des théorèmes semblables à celui de Wilson, pour la recherche des grands nombres premiers. Ce Mémoire débute par un résumé historique des recherches antérieures, dans lequel on remarquera la différence des méthodes employées; elles reposent soit sur la considération des progressions arithmétiques, soit sur celle des progressions géométriques.

Mannheim (A.). — Sur la surface de l'onde. (167-168).

L'auteur cherche et détermine quelles sont sur la surface de l'onde les transformées des lignes de courbure de l'ellipsoïde.

Piarron de Mondesir. — Sur la résolution de l'équation trinôme de degré impair $x^m \pm x = r$ au moyen d'un nouveau signe algébrique. (168-172).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Théorème d'Arithmétique sur la somme des inverses des puissances semblables des nombres premiers. (172-175).

Désignant par S_n la somme

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots,$$

et par Σ_n la somme

$$\Sigma_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \dots,$$

où ne figurent que les nombres premiers, on a

$$\Sigma_n = l\,S_n - \frac{1}{3}\,l\,S_{3n} - \frac{1}{6}\,l\,S_{5n} + \frac{1}{5}\,l\,S_{6n} + \frac{1}{7}\,l\,S_{7n} + \dots,$$

où la loi est que les nombres qui contiennent un facteur carré n'entrent pas et que le signe est positif ou négatif selon que le nombre des facteurs premiers du nombre est pair ou impair.

Mannheim (*A.*). — Sur les normales de la surface de l'onde. (175-176).

Les points où une normale quelconque de la surface de l'onde rencontre les plans principaux de cette surface, le pied de la perpendiculaire abaissée du centre sur cette normale déterminent quatre points dont le rapport anharmonique est constant.

On a une propriété analogue en considérant le point où la normale est rencontrée par le diamètre perpendiculaire à celui qui passe par son pied.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur un déterminant. (177-179).

M. Glaisher, généralisant une proposition connue, décompose en facteurs les déterminants, tels que le suivant :

$$\begin{vmatrix} a-x & b & c & d & e \\ b & c-x & d & e & a \\ c & d & e-x & a & b \\ d & e & a & b-x & c \\ e & a & b & c & d-x \end{vmatrix},$$

que l'on savait décomposer seulement pour $x = 0$.

Guyesse (*P.*). — Note sur les sondages à grande profondeur. (181-188).

Jablonski. — Sur une classe d'équations différentielles (188-194).

Intégration du système

$$\frac{dy_1}{P y_1 - P_1} = \dots = \frac{dy_n}{P y_n - P_n},$$

où $P_1, \dots, P_n$ sont des fonctions linéaires de $y_1, \dots, y_n$.

Gohierre de Longchamps. — Note sur l'intégration d'une équation aux différences finies. (194-197).

Cette équation est la suivante :

$$(x+2)\,F(x) = 1 + (x-1)\,F(x-1).$$

La méthode de l'auteur consiste à changer de fonction et à procéder en quelque sorte d'une manière récurrente.

Normand (*J.-A.*). — Sur les occultations d'étoiles par Mars, observables pendant l'opposition de 1877. (199-202).

Baehr (*G.-F.-W.*). — Sur un moyen mécanique de déterminer les rayons de courbure des différentes sections normales en un point quelconque d'une surface, par l'observation du temps d'oscillation d'une règle placée sur la surface. (203-204).

Soient l la demi-longueur, d la demi-hauteur d'une règle homogène, r le rayon de courbure de la section, g la gravité, t la durée d'une oscillation. On aura

$$t = \pi\sqrt{\frac{l^2+4d^2}{3g(r-d)}},$$

équation que donne r si t est déterminé par l'observation.

Fouret (*G.*). — Théorèmes sur les normales aux surfaces algébriques. (205-208).

L'auteur généralise quelques théorèmes déjà donnés par M. Mannheim et les étend à des surfaces algébriques quelconques, définies par leur degré, leur classe et leur rang. Les démonstrations reposent sur le théorème suivant que l'on doit à M. de Jonquières : le nombre des points de contact des surfaces d'un système (μ, ν, ρ) avec une surface algébrique d'ordre m, de classe n, et de rang r indépendante des surfaces du système est $m\nu + n\mu + r\rho$.

Grolous (*J.*). — Note sur la convergence des séries. (209-211).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Théorème de Trigonométrie. (211-213).

Si l'on a

$$\varphi(x) = A + iB = \left(1+\frac{ix}{a}\right)\left(1+\frac{ix}{b}\right)\cdots,$$

on en déduit

$$\text{arc tang}\,\frac{x}{a} + \text{arc tang}\,\frac{x}{b} + \ldots = \text{arc tang}\,\frac{B}{A}.$$

L'auteur fait plusieurs applications.

Lucas (*Éd.*). — Sur l'échiquier anallagmatique de M. Sylvester. (213-214).

Catalan (*E.*). — Sur quelques développements de l'intégrale elliptique de première espèce. (214-219).

Parmi les résultats qu'obtient M. Catalan au moyen d'ingénieuses transformations, nous citerons seulement celui-ci, dans lequel $F_1(c)$ représente l'intégrale complète de première espèce de module c,

$$F_1(c) = \frac{\pi}{2} \sum_0^\infty T_s \left(\frac{1-b}{32}\right)^s,$$

où T_s désigne un nombre entier.

Duvergier (*A.*). — Perfectionnement à l'indicateur Richard. (219-222).

7[e] Session (Paris); 1878.

Jonquières (*E. de*). — De la représentation des nombres par des formes quadratiques binaires. Application à l'analyse indéterminée. (40-49).

Le problème de la représentation d'un nombre par une forme quadratique binaire donnée peut être résolu très simplement dans le cas fort étendu où cette forme est $u^2 + tv^2$, t désignant un nombre rationnel positif ou négatif. Le nouveau mode de solution consiste à faire dépendre la représentation du nombre donné N de la décomposition préalable de son carré en une somme quadratique de même forme que celle qui est demandée.

M. de Jonquières se propose deux objets distincts :

1° Faire connaître deux formules générales qui permettent d'écrire immédiatement toutes les décompositions propres du carré d'un nombre donné N et de ce nombre lui-même en une somme quadratique de la forme $u^2 + tv^2$, toutes les fois qu'une telle décomposition est possible;

2° Montrer comment la dépendance mutuelle qui existe entre les représentations propres de N^2 et celles de N, chacune à chacune, trouve son application dans la résolution des systèmes de deux équations indéterminées du deuxième degré en nombres entiers et premiers, dans certains cas où l'on a à considérer simultanément un nombre indéterminé y et son carré y^2. Les équations

$$y = x^2 + tu^2,$$
$$y^2 = z^2 + tv^2,$$

avec les conditions

$$u = x + \alpha, \quad v = z + \beta,$$

rentrent dans cette catégorie.

Gohierre de Longchamps. — Sur les normales aux coniques. (49-53).

Considérant les coniques comme des courbes unicursales, on trouve, en appliquant cette idée aux normales, des démonstrations simples de propriétés connues et de quelques autres qui sont nouvelles. L'auteur a complété ainsi le

théorème de Joachimsthal, et montre que le cercle qui passe par les pieds de trois normales menées d'un point et par le point de la conique diamétralement opposé au pied de la quatrième normale, A', passe aussi : 1° par la projection du centre de la conique sur la tangente en ce point A'; 2° par la projection du point P d'où l'on mène des normales sur la droite qui joint le point A' au second point de rencontre avec la conique de la normale au point A, diamétralement opposé à A'.

Collignon (*É.*). — Enveloppe des ellipses planétaires obtenues en faisant varier la direction, mais non la grandeur de la vitesse initiale. (53-56).

Généralisation de la propriété de la parabole de sûreté, démontrée par des procédés élémentaires et de pure Géométrie.

Catalan (*E.*). — Sur les lignes de courbure de l'ellipsoïde et de la surface des ondes. (56-62).

Suite au Mémoire du même auteur *Sur une transformation géométrique et sur la surface des ondes* (Académie de Belgique, 1868). La question est surtout traitée au point de vue analytique.

Mannheim (*A.*). — Sur la surface de l'onde. (63-67).

L'auteur fait usage d'un nouveau mode de représentation des plans tangents à une surface réglée, et il retrouve ainsi des résultats qu'il avait déjà fait connaître au Congrès de Nantes, et en outre quelques conséquences nouvelles qui donnent par exemple la solution de la question suivante :

On donne un pinceau de normales; on fait tourner d'un angle droit chacun des rayons de ce pinceau autour d'un point fixé dans les plans passant respectivement par ce rayon et par ce point fixé. Après la rotation, chaque rayon est venu prendre une nouvelle position et appartient à un pinceau de normales; construire les foyers et les plans focaux de ce nouveau pinceau.

Collignon (*É.*). — Sur une manière de rendre tautochrones les oscillations d'un point le long d'une courbe plane. (68-80).

Le procédé employé par M. Collignon consiste à substituer au point matériel un solide de révolution assujetti à rouler sur une voie dont la construction géométrique est indiquée. L'auteur fait ensuite l'application au pendule composé.

Laisant (*A.*). — Sur la cinématique du plan. (81-88).

Application de la méthode des équipollences aux principales questions de Cinématique plane : vitesses, accélérations des divers ordres, mouvement d'une figure invariable. On sait que les méthodes de Bellavitis sont très propres à l'étude de ce genre de questions.

Gilbert (*Ph.*). — Sur la réduction des forces centrifuges composées dans le mouvement relatif d'un corps solide. (88-92).

Dans ce mouvement les forces centrifuges composées de tous les points sont

réductibles à une force R et à un couple G. Partant d'une expression particulière de la force centrifuge composée, on exprime les composantes parallèles à trois axes liés aux corps, en fonction des composantes de la rotation du système de comparaison et de la rotation relative du corps lui-même. De là M. Gilbert déduit : 1° le théorème de M. Resal ; 2° une construction géométrique très simple de la résultante R ; 3° une construction géométrique également très simple de l'axe du couple résultant G ; 4° diverses propriétés des forces composées en général. Les formules relatives à l'axe G donnent immédiatement l'équation des mouvements par rapport aux axes d'inertie du corps, obtenue par M. Quet.

Lucas (*É.*). — Sur l'emploi de l'arithmomètre Thomas dans l'Arithmétique supérieure. (94-95).

Picquet. — Mémoire sur les courbes et les surfaces anallagmatiques. Conséquences relatives à quelques courbes et surfaces du quatrième degré. (95-132).

Ce Mémoire est divisé en sept Chapitres. Dans le premier l'auteur donne l'équation générale de la courbe ou de la surface anallagmatique de degré m et sa classe en fonction de l'onde de multiplicité des points cycliques ou du cercle de l'infini.

Dans le deuxième Chapitre, il en est déduit une classification des courbes ou des surfaces anallagmatiques. Pour un degré donné m, il y a autant d'espèces qu'il y a d'entiers de même parité que m et inférieurs à m, y compris zéro. En particulier, pour le quatrième degré, il y en a deux dont l'une avait été étudiée, mais dont l'autre est signalée ici pour la première fois.

Dans le troisième Chapitre, il est démontré que la courbe déférente de l'anallagmatique de degré m et d'indice k est de classe $m-k$ et de degré $k(2m-3k-1)$, avec $m-2k$ sommets à l'infini.

La surface déférente de l'anallagmatique de degré m et d'indice k est de classe $m-k$, de degré $k(3m^2-9mk+7k^2-4m+6k+1)$, et admet le plan de l'infini comme plan tangent multiple d'ordre $m-2k$.

Le quatrième Chapitre étend à toutes les courbes du quatrième ordre à 1 point double les résultats démontrés pour les anallagmatiques de degré 4 et d'indice 1. Il y est démontré en particulier que les points de contact des six tangentes menées du point double à une pareille courbe sont sur une même conique.

Le cinquième Chapitre est consacré à la démonstration d'un nouveau mode de génération applicable à toutes les courbes du quatrième degré à point double.

Dans le sixième Chapitre l'auteur considère les surfaces du quatrième degré à directrice rectiligne double et du cinquième degré à directrice rectiligne triple.

Enfin, dans le septième Chapitre, M. Picquet examine le cas où la surface du quatrième degré est involutive, c'est-à-dire où les deux plans tangents passant en chaque point de la directrice double forment une involution.

Mannheim (*A.*). — Transformation par polaires réciproques d'un pinceau de normales, et extensions. (132-135).

M. Mannheim emploie la théorie des polaires réciproques pour la transformation des pinceaux de droites et établit ainsi différentes propositions nouvelles.

Laisant (*A.*). — Sur une généralisation de la division harmonique. (135-136).

L'auteur étend au plan la propriété des quatre points harmoniques sur une droite en se servant de la représentation des imaginaires.

Lalanne (*L.*). — Sur l'emploi de la Géométrie pour résoudre certaines questions de moyennes et de probabilités. (138-139).

Tagliaferro (*N.*). — Sur de nouvelles fonctions numériques transcendantes (140-144).

Broch (*O.-J.*). — Note sur la convergence de la série du binôme de Newton pour le cas de $x = 1$. (145-147).

M. Broch reproduit ici la démonstration qu'il donne pour ce cas dans ses cours à l'Université de Christiania.

Gilbert (*Ph.*). — Sur l'application des équations de Lagrange aux mouvements relatifs. (147-152).

On sait que Bour a donné les équations différentielles de Lagrange sous la forme convenable pour l'application aux mouvements relatifs. Ces équations sont ici établies par M. Gilbert d'une manière immédiate et leur interprétation géométrique conduit à un théorème général important sur le mouvement apparent d'un système dont le centre de gravité est fixé sur la terre. Appliqué aux problèmes du gyroscope complet traités par M. Lottner et par Bour, ce théorème fournit presque sans calcul les équations différentielles du mouvement, même en tenant compte des quantités du même ordre que le carré de la rotation terrestre. Dans le cas où l'axe du gyroscope est libre dans tous les sens, l'intégration s'effectue au moyen des fonctions elliptiques. Dans le cas où cet axe ne peut se mouvoir que dans un plan fixe par rapport à la terre, on démontre qu'il oscille par rapport à sa position d'équilibre comme un pendule simple, dont le plan d'oscillation tourne autour de la verticale avec une vitesse angulaire constante.

Mannheim (*A.*). — Construction de la normale à la surface trajectoire d'un point d'une figure de forme invariable dont le déplacement est assujetti à quatre conditions. (152-154).

Cette construction ne s'appuie pas sur l'existence des droites D, Δ, et demeure applicable quand elles sont imaginaires.

Mannheim (*A.*). — Construction des centres de courbure principaux de la surface de vis à filet triangulaire. (156-159).

Tchebychef. — Sur les parallélogrammes les plus simples symétriques autour d'un axe. (159-163).

Applications mécaniques du beau théorème sur les fonctions qui approchent le plus de zéro.

Lucas (*É.*). — Sur les formules de Cauchy et de Lejeune-Dirichlet. (164-173).

Ce Mémoire est le développement de théorèmes intéressants, dus à Aurifeuille et Le Lasseur. L'auteur a rapproché les résultats obtenus par ces savants de ceux que l'on doit à Gauss, Cauchy, Dirichlet relativement à la transformation de $4\,\frac{x^p-1}{x-1}$ en une forme quadratique.

Fouret (*C.*). — Sur les surfaces de vis. (173-179).

Les surfaces hélicoïdales de même axe et de même pas forment dans leur ensemble un implexe dont les caractéristiques sont toutes deux égales à l'unité. De ce fait M. Fouret déduit immédiatement plusieurs propriétés intéressantes de ces surfaces hélicoïdales. Entre autres résultats, on trouve que la courbe d'ombre propre d'une surface de vis à filet carré, éclairée par un point lumineux quelconque, est l'intersection de cette surface par une surface de troisième ordre.

Laisant (*A.*). — Formule relative à des sommations algébriques. (179-180).

Laisant (*A.*). — Sur la déformation métallique des surfaces. (180-181).

8e Session (Montpellier); 1879.

Laisant (*C.-A.*). — Notice historique sur les travaux des première et deuxième sessions jusqu'en 1878 inclusivement. (64-117).

Cette Notice fort étendue rend compte des diverses communications présentées à l'Association Française dans les sessions précédentes. Elle est divisée de la manière suivante :

I. Analyse algébrique. — Calcul des probabilités. — Théorie des nombres.

II. Géométrie.

III. Calcul infinitésimal et calcul des fonctions.

IV. Mécanique rationnelle. — Mécanique appliquée.

V. Mécanique céleste et Astronomie. — Géodésie. — Topographie. — Arpentage.

VI. Physique mathématique.

VII. Questions diverses.

Elle se termine par la note finale suivante :

« La Notice historique qu'on vient de lire peut donner une idée de l'importance croissante des communications mathématiques dans l'ensemble des travaux de l'Association Française pour l'avancement des Sciences... »

Aux travaux analysés ci-dessus il importe d'ajouter ceux communiqués soit à la section de Physique, soit à celle du génie civil et militaire, soit à celle de

navigation, et qui ne sont souvent autre chose que des applications directes des Mathématiques.

Amigues (E.). — De quelques propriétés d'une famille de courbes représentées par une équation différentielle à deux variables. (118-128).

Collignon (Éd.). — Problème de Géodésie. (129-137).

A partir d'un point M pris sur la surface d'un ellipsoïde de révolution, du globe terrestre, par exemple, on mesure suivant le méridien et suivant le parallèle deux arcs très petits, correspondants chacun à une variation d'une seconde en latitude et en longitude. On demande les dimensions de l'ellipsoïde; la latitude λ du point M est supposée connue.

Ce problème, appliqué au sphéroïde terrestre, se trouve résolu dans les Traités de Géodésie par une méthode approximative, fondée sur la faible valeur de l'excentricité de l'ellipse méridienne. L'auteur s'est proposé de reprendre la question d'une manière générale sans faire aucune hypothèse sur l'excentricité de la courbe cherchée.

Il remarque pour cela que le problème revient à construire une ellipse, connaissant un point et le cercle osculateur en ce point, ainsi que la distance de ce point à un axe. Cette construction est faite d'une manière géométrique.

Simon (Ch.). — Mémoire sur la nouvelle navigation astronomique. (138-143).

Ce travail est une étude de pure géométrie. Qu nd on considère à un point de vue purement théorique ce qu'on a appelé la *nouvelle navigation astronomique,* il est naturel de se demander quelles sont les cartes sur lesquelles subsisterait la théorie des droites de hauteur. On reconnaît aisément que ce sont celles où les angles sont conservés, et l'on est ainsi conduit à examiner ce que deviendrait la théorie de la navigation si l'on faisait usage de cartes construites à la même échelle que celle de Mercator, mais en projection stéréographique sur l'équateur, et la conclusion qui se présente d'elle-même est que, dans la pratique courante, les nouvelles cartes n'offriraient aucun avantage sur les anciennes, mais qu'il pourrait être utile, pour la résolution de certains problèmes, d'employer concurremment les deux systèmes de cartes.

Ritter (F.). — Quelques inventions mathématiques de Viète. (143-149).

Parmentier. — Sur la quadrature des paraboles du troisième degré. (150-154).

Démonstration d'un théorème connu avec applications numériques.

Schoute (P.-H.). — De la projection sur une surface. (155-161).

L'auteur appelle *projection d'une courbe sur une surface* le lieu des pieds des normales menées à la surface des différents points de la courbe. Il commence par démontrer quelques théorèmes connus et ajoute quelques propositions nouvelles.

Collignon (*Éd.*). — Note sur l'inscription dans le cercle d'un polygone régulier de dix-sept côtés. (162-170).

Le but de cette Note est de faire connaître une démonstration géométrique nouvelle, qui repose sur l'emploi de certains angles auxiliaires dont la considération permet de simplifier un peu la théorie de cet intéressant problème.

Berdellé (*Ch.*). — Sur l'élévation aux puissances et le calcul d'intérêts composés. (170-176).

Berdellé (*Ch.*). — Propriétés des puissances de 5 et de leurs multiples. (176-179).

Schoute (*P.-H.*). — Sur les courbes tracées sur une surface du deuxième ordre. (180-287).

Cet article est un complément aux études de MM. Chasles, Cayley et d'autres géomètres sur les courbes tracées sur les surfaces du second degré.

Roche (*É.*). — Sur l'aplatissement terrestre et la distribution de la matière à l'intérieur du globe. (187-190).

L'état intérieur de la terre, au point de vue de la répartition de la masse au centre, est lié à trois éléments astronomiques, savoir : la densité moyenne, la valeur numérique de la précession et enfin l'aplatissement superficiel. Il résulte de là trois conditions auxquelles doit satisfaire la loi des densités des couches terrestres, mais qui sont insuffisantes pour déterminer cette loi.

M. Roche, en admettant la fluidité et une certaine hypothèse sur la compressibilité des couches, avait trouvé autrefois que l'on satisfait à ces conditions au moyen d'une loi très simple qui ferait varier la densité de 10,6 au centre du globe à 2,1 à la surface. Cette loi, d'où l'on déduisait la variation de la pesanteur à l'intérieur du globe, s'accordait avec l'expérience de M. Airy sur l'oscillation du pendule au fond d'une mine.

Dans ces derniers temps, l'hypothèse de la fluidité a été vivement attaquée par MM. Hopkins et W. Thomson. Sans prendre parti sur cette question, M. Roche remarque que considérer la terre comme un bloc solide à peu près uniforme, ayant à son centre un noyau très dense et enveloppé d'une couche sphérique assez mince et beaucoup moins dense, constitue une hypothèse tout opposée à celle du fluide compressible. Mais par sa netteté cette hypothèse se prête au calcul et, en la combinant avec les valeurs connues de la densité moyenne, de la précession et de l'aplatissement, l'auteur a pu arriver à la détermination des inconnues qu'elle renferme.

Tout calcul fait, on trouve que le bloc composant la majeure partie du globe terrestre aurait une densité égale à 6. La masse centrale serait le $\frac{1}{14}$ de la masse entière.

Enfin la couche extérieure à laquelle M. Roche attribue la densité moyenne 2,7 aurait une épaisseur égale à $\frac{1}{9}$ du rayon. Sa masse serait le $\frac{1}{7}$ de la masse entière.

Alexéief. — Sur l'intégration de l'équation $y'' + Py' + Qy = 0$. (190-192).

L'auteur montre que, lorsque l'équation linéaire du second ordre admettra une intégrale première de la forme

$$Ay^2 - Byy' + Cy'^2 = 1,$$

où A, B, C sont des fonctions de x, l'intégration complète de l'équation sera toujours ramenée aux quadratures.

Ragona (*D.*). — Sur une nouvelle méthode pour mesurer la déclinaison magnétique en un lieu donné. (193).

Schoute (*P.-H.*). — Sur la transformation conjuguée. (194-205).

Les courbes planes du troisième ordre qui passent par huit points donnés ont encore un neuvième point commun qui, avec les huit points donnés, forme la base du faisceau. Quand on ne fixe que sept points de cette base et qu'on fait mouvoir le huitième, le neuvième se meut aussi. Ces deux points forment donc dans le plan des courbes du troisième ordre une correspondance birationnelle en involution, que M. Schoute commence par étudier. Il considère ensuite la correspondance entre un plan simple et un plan double. Les deux points du plan simple qui correspondent à un point du plan double forment une correspondance involutive birationnelle, à laquelle M. Schoute donne le nom de *transformation conjuguée*. Une telle correspondance a déjà été étudiée par M. de Paolis. M. Schoute reprend cette théorie, en faisant l'étude de quelques cas spéciaux et en mettant en évidence plusieurs points de vue nouveaux.

Laisant (*C.-A.*). — Sur la transformation exponentielle. (206-211).

Il s'agit ici de la transformation définie par l'équation $z' = e^z$, où z et z' sont deux variables imaginaires. L'auteur donne les principales propriétés géométriques qui se rapportent à cette transformation.

Guieysse (*P.*). — Étude sur les sondages. (211-235).

1. Sondes à grande profondeur. — Détermination des courants de surface en pleine mer et des courants de fond. — Sondes d'atterrissage.
2. Sondes en embarcation.

Delsaulx. — Note sur une propriété caractéristique des surfaces du second degré dans la théorie de l'électricité statique. (236-239).

L'auteur se propose de démontrer que, parmi toutes les surfaces convexes, les surfaces du second degré jouissent seules de la propriété que, dans l'équilibre électrique, les actions élémentaires sur un point intérieur se détruisent deux à deux.

Forestier. — Note sur les équations d'une même courbe en coordonnées polaires par rapport au même axe. (240-241).

Landré (*Corneille-L.*). — Remarques sur les solutions singulières

des équations différentielles du premier ordre à deux variables. (241-245).

Pellet (*A.-E.*). — Sur les équations de degré premier solubles par radicaux. (245-249).

L'auteur démontre, par des considérations purement algébriques, le théorème de Galois relatif aux équations de degré premier solubles par radicaux, en appliquant la méthode qu'il a développée, en 1878, dans sa thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris.

Dewulf et *Schoute* (*P.-H.*). — Déterminer une courbe unicursale du quatrième ordre ayant des points doubles en A_1 et A_2, et passant par les sept points 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7. (249-253).

Appell (*P.*) — Sur certaines équations différentielles linéaires contenant un paramètre variable. — Sur des polynômes satisfaisant à une équation différentielle du troisième ordre. (253-260).

Dans le premier paragraphe de ce Mémoire, l'auteur étudie les fonctions satisfaisant à une équation linéaire de la forme

$$A_0 \frac{d^p y}{dx^p} + A_1 \frac{d^{p-1} y}{dx^{p-1}} + \ldots + A_p y = my,$$

où $A_0, \ldots, A_p$ sont des fonctions données de x, et m un paramètre variable. Il considère plus particulièrement le cas où $m = 3$, et il généralise sous certaines hypothèses des formules bien connues relatives aux polynômes de Legendre et de Jacobi.

Dans la seconde Partie, M. Appell considère les polynômes qui naissent de la série

$$\sum \frac{a\ldots(a+n-1)\, b\ldots(b+n-1)\, c\ldots(c+n-1)}{1.2\ldots n\ldots d\ldots(d+n-1)\, e\ldots(e+n-1)}\, x^n,$$

lorsque c est égal à un nombre entier négatif.

Marsilly (*L.-J.-A. de C. de*). — Mémoire sur une méthode de calcul appropriée aux corps discontinus qui obéissent à des actions à distance. (261-273).

Escary. — Valeur finale de la fonction Y_n pour des valeurs indéfiniment croissantes de l'entier n. (274-278).

La forme en intégrale définie sous laquelle Jacobi a mis la fonction Y_n de Laplace permet d'obtenir la valeur finale de ce polynôme pour des valeurs croissantes de n.

Brioschi (*F.*). — Recherches sur les équations différentielles linéaires du second ordre. (278-283).

Applications de la théorie des formes à celle des équations linéaires selon les méthodes que la Science doit à M. Brioschi.

Hermary. — Sur le jeu du Solitaire. (284-295).

L'auteur se propose de simplifier la théorie de ce jeu si difficile, donnée par Reiss dans le *Journal de Crelle,* et, après lui, par M. Ruchonnet dans le t. III de la *Correspondance mathématique.*

9e Session (Reims); 1880.

Gilbert (Ph.). — Sur une propriété de la fonction de Poisson et sur l'intégration des équations aux dérivées partielles. (61-65).

Schoute (P.-H.). — Sur une transformation géométrique et sur la généralisation d'un problème de la théorie des enveloppes dites « courbes de sûreté ». (65-72).

M. Schoute se propose de déterminer l'enveloppe des ellipses obtenues comme mouvement régi par une attraction centrale proportionnelle à la distance du mobile au centre d'attraction, en supposant que l'on fasse varier la direction, mais non la grandeur de la vitesse initiale. Cette enveloppe est une ellipse.

Les différentes ellipses considérées sont les projections obliques d'un même cercle, ce qui conduit M. Schoute à étudier les progressions d'une courbe donnée sur un plan et les enveloppes sous certaines conditions.

Catalan (E.). — Sur une suite de polynômes entiers et sur quelques intégrales définies. (73-78).

Soit

$$y_p = 1^p + 2^p x + 3^p x^2 + \ldots + n^p x^{n-1} + \ldots,$$
$$P_p = y_p (1-x)^{p+1};$$

on a

$$\frac{P_p}{(1-x)^p} = \frac{2}{\pi}\Gamma(p+1)\int_0^\pi \frac{-e^{-\cos\varphi} + (1+x)\cos(\sin\varphi) - x e^{\cos\varphi}}{e^{-\cos\varphi} - 2x\cos(\sin\varphi) + x^2 e^{\cos\varphi}} \cos p\varphi \, d\varphi,$$

$$y_p = \frac{2}{\pi}\Gamma(p+1)\int_0^\pi \frac{\sin(\sin\varphi)}{e^{-\cos\varphi} - 2x\cos(\sin\varphi) + x^2 e^{\cos\varphi}} \sin p\varphi \, d\varphi.$$

M. Catalan s'occupe ensuite de l'expression des sommes des puissances de la suite des nombres naturels et des nombres de Bernoulli par des intégrales définies.

Collignon (É.). — Sur les polygones inscriptibles. (78-91).

Application de la Statique à la démonstration de ce théorème bien connu : *De tous les polygones qu'on peut construire dans un plan avec des côtés donnés, le plus grand est celui qui est inscriptible dans le cercle.*

Longchamps (G. de). — Sur les séries récurrentes proprement dites et sur un théorème de Lagrange. (91-96).

Sylvester (*J.-J.*). — Sur les équations à trois et à quatre périodes des racines de l'unité. (96-98).

Gilbert (*Ph.*). — Mouvement d'un point pesant sur un cercle tournant autour d'un axe vertical. (98-104).

Un cercle tourne avec une vitesse angulaire constante ω', autour d'un axe vertical ST situé dans son plan; trouver le mouvement d'un point pesant de masse m, assujetti à se mouvoir sans frottement sur le cercle.

Collignon (*É.*). — Observations sur un système particulier de cartes d'égale superficie. (104-114).

Le système considéré est ainsi défini : on appelle L la longitude et λ la latitude d'un point quelconque de la sphère, x et y les coordonnées rectangulaires correspondantes de la carte, et l'on pose, en considérant le rayon de la sphère comme égal à l'unité,

$$x = L, \qquad y = \sin\lambda.$$

Longchamps (*G. de*). — Sur les fonctions récurrentes du troisième degré. (115-117).

a, b, c étant les racines de l'équation

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0,$$

on pose $abc = r$, et l'on cherche à calculer les fonctions D_n, E_n, S_n, définies comme il suit :

$$r^n D_n = (a^n + b^n)(b^n + c^n)(c^n + a^n),$$

$$r^n E_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}\,\frac{b^n - c^n}{b - c}\,\frac{c^n - a^n}{c - a},$$

$$S_n = a^n + b^n + c^n.$$

La méthode employée consiste principalement à transformer une fonction de trois lettres en une fonction de deux lettres seulement.

Catalan (*E.*). — Sur la quadrature des courbes paraboliques. (118-120).

Laquière. — Théorie géométrique des courbes anallagmatiques, sections planes de la cyclide. (121-131).

Application de la Géométrie euclidienne à la démonstration des propriétés connues des courbes anallagmatiques.

Laquière. — Construction nouvelle du cercle coupant trois cercles donnés et de la sphère coupant quatre sphères données, sous des angles respectivement déterminés. Enveloppe de la sphère variable coupant trois sphères fixes sous des angles donnés respectivement constants. (132-135).

Cayley (A.). — Note sur la théorie des courbes de l'espace. (135-139).

La courbe unicursale d'ordre $2p$ dépend de $8p$ constantes. Elle est donc déterminée si l'on se donne $4p$ points. Mais, ces $4p$ points étant donnés, la courbe n'est pas déterminée uniquement; par exemple, pour $p=2$, c'est-à-dire pour une courbe quartique de seconde espèce, ou, autrement dit, pour une excubo-quartique, le nombre des courbes est égal à 4. M. Cayley se propose ici de traiter la question analytiquement, mais encore dans un cas particulier pour la position des huit points que l'on se donne.

Marsilly (L.-J.-A. de C. de). — Note sur la communication du mouvement dans un milieu rationnellement distribué. (140-150).

Stephanos (C.). — Sur quelques systèmes de surfaces du second degré, dont les deux systèmes de droites appartiennent à deux complexes linéaires. (150-156).

Les systèmes considérés sont les uns composés d'un nombre doublement infini de surfaces du second degré ayant quatre points et quatre plans tangents communs, les autres sont composés d'un nombre simplement infini de surfaces du second degré ayant huit points et huit plans tangents communs.

Schoute (P.-H.). — De la transformation conjuguée dans l'espace. (156-179).

Considérons dans l'espace des éléments qui, pris chacun avec son degré déterminé de multiplicité, représentent un nombre de $\frac{n(n^2+6n+11)}{6}-3$ conditions pour chaque surface de l'ordre n qui y passe; ces surfaces F_n constituent un système triplement infini, c'est-à-dire un système linéaire. Si, de plus, on choisit ces éléments, cette base du système, en sorte que trois surfaces F_n, qui n'appartiennent pas au même faisceau, passent encore par deux points qui n'appartiennent pas à la base, les surfaces qui passent par un point p passeront par un second point p' qui se déplace quand on fait mouvoir le point p. M. Schoute étudie la correspondance birationnelle en involution qui se trouve ainsi définie.

Lemoine (Em.). — Questions de probabilités et valeurs relatives des pièces du jeu des échecs. (179-183).

Lemoine (Em.). — Questions de probabilités. (183-184).

On range, au hasard, dans leur boîte, les seize petits cubes du jeu du taquin; quelle est la probabilité qu'un des cubes occupera dans la boîte le rang que marque le chiffre écrit sur ce cube?

Lemoine (Em.). — Théorème de Géométrie. (184).

Soient ABC un triangle; A'B'C' le triangle formé en joignant entre eux les points de contact A'B'C' du cercle inscrit à ABC avec les côtés; de A'B'C' on déduit

par le même procédé un triangle A″B″C″, et ainsi de suite. Démontrer que l triangle $A^nB^nC^n$ tend à devenir équilatéral quand n croît indéfiniment.

Landry (*F.*). — Méthode de la décomposition des nombres en facteurs premiers. (185-189).

La méthode présentée par M. Landry dans cette Note s'applique aux nombres peu considérables (de six chiffres au plus). Avec des nombres plus grands, les calculs deviendraient par trop prolixes.

Smith. — Sur l'équation à six périodes. (190-191).

Guccia (*J.*). — Sur une classe de surfaces, représentables, point par point, sur un plan. (191-200).

M. Guccia s'occupe dans cette Note des surfaces qui possèdent deux droites multiples qui ne se coupent pas, et dont les ordres de multiplicité ont une somme égale à l'ordre de la surface diminuée d'une unité. Telles sont : la surface générale du troisième ordre, la surface du cinquième ordre à deux droites doubles qui ne se coupent pas [Clebsch, *Ueber die Abbildung algebraischer Flächen* (*Math. Annalen*, vol. I). — Cremona, *Sulle trasformazioni razionali nello spazio* (*Rendiconti dell' Istituto Lombardo*, IV_2, fascicule 9)].

L'auteur détermine les conditions qui doivent être données dans le plan pour que la surface ainsi représentée soit déterminée; il étudie enfin les courbes tracées sur la surface.

Henry (*Ch.*). — Sur divers points de la théorie des nombres. Remarques historiques. (201-207).

1. Une assertion fausse et une rectification de Fermat.

On sait que Fermat avait cru que les nombres de la forme $2^{2^n}+1$ étaient premiers. On croyait que Euler, le premier, avait démontré que cette proposition était fausse en trouvant que $2^{2^5}+1$ est divisible par 641. M. Ch. Henry a trouvé, dans une lettre de Torricelli à Carcavi, ce passage relatif à la question proposée : *Præterea non tam plausibile mihi videbatur inventum illud.*

2. Sur une méthode de décomposition des grands nombres.

Le procédé dont il s'agit repose sur le théorème suivant :

Si un nombre impair est premier, il est, et d'une seule manière, la différence de deux carrés entiers.

Cette méthode est déjà signalée dans le *Dictionnaire des Mathématiques* de Montferrier (art. *Nombre premier*); elle a reçu de notables perfectionnements grâce aux travaux de MM. Aurifeuille, Landry, Le Lasseur et Lucas.

3. Sur une formule de décomposition

$$2^{4n-2}+1=(2^{2n-1}+2^{n}+1)(2^{2n-1}-2^{n}+1).$$

Cette formule, retrouvée et employée par M. Le Lasseur, existe déjà : 1° dans les manuscrits de Sophie Germain (manuscrit 9118 des fonds français de la Bibliothèque nationale, p. 84); et même 2° dans les œuvres de Nicolas de Béguelin (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1772, p. 296, et 1777, p. 255).

Escary. — Intégration, sous forme finie, des formules de Fresnel

relatives à l'intensité et à l'anomalie, dans sa théorie de la diffraction de la lumière. (207-222).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Une identité trigonométrique. (222-223).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur quelques équations identiques dans la théorie des fonctions elliptiques. (223-224).

Salanson (*A.*). — Nouvelle application des méthodes Lalanne pour le calcul des expériences photométriques. (225-227).

Catalan (*E.*). — Sur une décomposition en facteurs. (228-229).

1° $$\left\{\begin{aligned}&(2r)^{4k-2}+2(q-r)(2r)^{2k+1}+q^2\\&\quad=[(2r)^{2k+1}+(2r)^{k+1}+q][(2r)^{2k-1}-(2r)^{k-1}+q];\end{aligned}\right.$$

2° La formule précédente, pour $r=q=1$, devient la formule de M. Le Lasseur

3° $$3^{6k-3}+1=(3^{2k+1}+1)(3^{2k-1}+3^{2k+1}+1)(3^{2k-1}-3^{k-1}+1).$$

Casey (*J.*). — Sur les équations des cercles circonscrits ou inscrits à des polygones plans et sphériques. (230-238).

Desboves (*A.*). — Sur la résolution en nombres entiers ou complexes de l'équation $U^n \pm V^n = S^n + W^n$. (239-243).

Les cas où $n=2$ ou 3 sont bien connus. Passant au cas de $n=4$, on a l'équation

$$U^4=V^4+S^4+W^4,$$

qu'Euler considère comme impossible; mais jusqu'ici l'impossibilité n'a pas encore été démontrée. Il n'en est plus de même de l'équation

$$U^4+V^4=S^4+W^4;$$

on a comme solutions :

$$\begin{aligned}
U&=(x^2+y^2)(2x^5-yx^4+2y^2x^3+18y^3x^2-y^5)-8xy^2(2x^4+y^4),\\
V&=(x^2+y^2)(x^5-18y^2x^3+2y^3x^2+y^4x-2y^5)-8x^2y(x^4-2y^4),\\
S&=(x^2+y^2)(2x^5-yx^4+2y^2x^3-18y^3x^2-y^5)+8xy^2(2x^4+y^4),\\
W&=(x^2-y^2)(-x^5-18y^2x^3+2y^3x^2-y^4+2y^5)-8x^2y(2x^4+y^4).
\end{aligned}$$

Pour $x=1$, $y=3$,

$$59^4+158^4=133^4+134^4,$$

solution bien plus simple que celle donnée par Euler dans les *Mémoires de Saint-Pétersbourg*

$$477069^4+8947^4=310319^4+428397^4.$$

M. Desboves termine par quelques considérations générales et par la solution en nombres complexes de l'équation

$$U^5+V^5=S^5+W^5.$$

Laquière. — Des carrés doublement magiques. (243-254).

Laquière. — Note sur une amusette arithmétique. (255-257).

Placer un certain nombre des entiers naturels consécutifs aux points d'intersection d'une série de circonférences concentriques avec une série de diamètres, ainsi qu'au centre, de telle sorte que la somme des termes contenus, soit sur une même circonférence, soit sur un même diamètre, reste toujours la même.

Schoute (*P.-H.*). — Sur l'évaluation d'une intégrale définie par la théorie des probabilités. (258-262).

La résolution de ce problème : *Quelle est la probabilité pour qu'une droite, qui coupe un cercle donné, coupe encore un autre cercle donné dans le même plan,* permet, en employant deux marches différentes, d'évaluer l'intégrale

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi \operatorname{arc\,sin} \frac{R}{\sqrt{a^2+r^2+2ar\cos\theta}}\,d\theta.$$

On trouve

$$\frac{1}{\pi r}\left[(R+r)\operatorname{arc\,sin}\frac{R+r}{a} - (R-r)\operatorname{arc\,sin}\frac{R-r}{a}\right.$$
$$\left. + \sqrt{a^2-(R+r)^2} - \sqrt{a^2-(R-r)^2}\right].$$

NOUVELLE CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE, RÉDIGÉE PAR M. E. CATALAN, AVEC LA COLLABORATION DE MM. MANSION, LAISANT, BROCARD, NEUBERG ET ÉD. LUCAS (¹).

Tome V; 1879.

Brocard (*H.*). — Sur la fréquence et la totalité des nombres premiers. (1-7, 33-39, 65-71, 113-117, 263-269).

Aperçu historique, d'après S. Günther, *Ziele und Resultate der neueren mathematisch-historischen Forschungen* (Erlangen, 1876), complété par des recherches de l'auteur. Travaux de Gauss, Eisenstein, Schlömilch, Dirichlet, Serret, Le Besgue, Tchebychef. Notes par M. Catalan, où il signale, entre autres choses, une erreur de M. Curtze relativement à la série de Lambert.

Realis (*S.*). — Note sur quelques équations indéterminées. (Fin, *voir* t. IV, p. 325, 346, 369). (8-11).

(¹) Voir *Bulletin*, 1re série, t. VIII, p. 217; t. X, p. 146; 2e série, t. I, p. 269; t. II, p. 111; t. IV, p. 56. La *Nouvelle Correspondance mathématique* paraissait mensuellement par livraison de deux ou trois feuilles. Le prix d'abonnement était : 10 fr. pour la Belgique, 12 fr. pour l'Union postale. Ce Recueil est remplacé, depuis 1881, par un autre intitulé *Mathesis* (*voir* ci-dessous, p. 189).

Lucas (*Éd.*). — Questions de Géométrie élémentaire. (12-13).

Démonstration de plusieurs propositions élémentaires, et, en particulier, de la suivante, très remarquable, dont la première Partie appartient à Steiner. Si les diagonales d'un octaèdre se coupent à angle droit, les projections du point de concours A des diagonales sur les faces de l'octaèdre sont situées sur une sphère : les perpendiculaires abaissées de A sur chacune des faces rencontrent les faces opposées en huit points situés sur la même sphère.

Mansion (*P.*). — Démonstration élémentaire de la formule de Stirling, d'après M. J.-W.-L. Glaisher, F. R. S. (44-53).

Laisant (*C.-A.*). — Sur le polarimètre polaire de M. Amsler. (Suite, *voir* t. IV, p. 57). (71-76; 107-121).

Le Paige (*C.*). — Sur la multiplication des déterminants. (76-79).

Jamet (*V.*). — Sur la multiplication des déterminants. (79-81).

Van Aubel (*H.*). — Sur les courbes du troisième degré. (81-87).

Mansion (*P.*). — Remarques sur les théorèmes arithmétiques de Fermat. (88-91; 122-125).

Fermat a déclaré en 1640 et en 1654 qu'il ne parvenait pas à démontrer que 2^k+1 est toujours premier quand $k = 2^n$. On ne peut donc pas dire qu'il s'est trompé relativement à cette proposition empirique.

Catalan (*E.*). — Quelques identités. (91-94).

Le produit de deux nombres par leur somme ne peut être un cube. Si

$2p = a + b + c$, on a $a^2 + b^2 + c^2 = p^2 + (p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2$.

Si n_p est le $(p+1)$ coefficient binomial dans $(1+x)^n$, on a, d'après M. E. Césàro,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = n_1 - \frac{1}{2}n_2 - \frac{1}{3}n_3 - \dots - (-1)^n \frac{n_n}{n}.$$

Bombled. — Sur la série $1 + 2^p x + 3^p x^2 + \dots$. (95-97).

Realis (*S.*). — Question d'analyse indéterminée. (126-128).

L'équation

$$z_1^3 + z_2^3 + \dots + z_n^3 = (5n+3)z^3$$

est toujours résoluble d'une infinité de manières, en nombres entiers positifs ou négatifs.

Catalan (*E.*). — Sur une suite de nombres impairs. (128-129).

De Longchamps (*G.*). — Sur les conchoïdales. (145-149).

Par un point A pris sur une courbe F, menons une tangente AI coupant deux autres courbes en B, C. Portons sur la tangente AI une longueur AI = BC. Le lieu du point I est une *conchoïdale*. Tracé de la tangente à la cissoïde, à la strophoïde, à la lemniscate, au limaçon de Pascal, etc., considérés comme des conchoïdales.

Realis (*S.*). — Théorèmes d'Arithmétique. (150).

Jamet (*V.*). — Sur la Géométrie de la sphère. (151-156).

Théorie des transversales.

Laisant et *Beaujeux*. — Quelques conséquences des théorèmes de Fermat et de Wilson. (156-160; 177-182).

Soit p un nombre premier, q un entier $< p-1$. On a

$$(1.2.3\ldots q)[1.2\ldots(p-q+1)]+1 = \text{multiple de } p.$$

Conséquences nombreuses.

Lucas (*É.*). — Problèmes sur les normales à l'ellipse. (161-165).

Catalan (*E.*). — Un problème traité par Euler. (169).

Lucas (*É.*). — Sur l'analyse indéterminée biquadratique. (183-186).

Soit à résoudre l'équation indéterminée $y^2 = f(x)$, en nombres rationnels, $f(x)$ étant une fonction du quatrième degré à coefficients rationnels. On posera

$$y\varphi(x) = F(x),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction de degré p, où x^p a pour coefficient l'unité, $F(x)$ une fonction de degré $p+2$. On devra avoir

$$[F(x)]^2 - f(x)[\varphi(x)]^2,$$

équation de degré $2p+4$ contenant $2p+3$ coefficients inconnus. Si l'on connaît $2p+3$ solutions rationnelles de $y^2 = f(x)$, cette équation de degré $2p+4$ servira à en trouver une de plus.

Dostor (*G.*). — Centre de gravité du périmètre d'un quadrilatère quelconque. (187-188).

Starkof. — Sur l'intégration des équations linéaires. (225-230).

Chadu. — Sur le cercle des neuf points. (230-232).

Neuberg (*J.*). — Sur la courbure des lignes. (233-234).

Ribaucour (*A.*). — Mémoire sur les courbes enveloppes de cercles

et sur les surfaces enveloppes de sphères. (257-263; 305-315; 337-343; 385-393; 417-425).

Première Partie. — I. De tous les points d'une courbe donnée, on décrit des cercles de rayons fonctions de la position de ce point. L'enveloppe de ces cercles a deux branches dont les points correspondants sont réunis par une *ligne de contact* perpendiculaire à la tangente à la courbe donnée, au centre du cercle variable et distante de ce centre d'une quantité a donnée par la formule

$$a\,ds = r\,dr,$$

ds étant la différentielle de l'arc de la courbe primitive. On conclut de cette formule, par exemple, les théorèmes suivants :

1° *Les cordes de contact des cercles concentriques aux premiers et tels que l'on ait*

$$r'^2 - r^2 = \text{const.}$$

sont les mêmes que pour les premiers.

2° *Si* $r = \rho$, *rayon de courbure de la courbe primitive, la corde de contact passe par le centre de courbure de sa développée.*

3° *Si* $r = \delta$, δ *étant la distance comptée depuis la courbe donnée jusqu'à une seconde courbe, dans une direction fixe, la corde de contact, relativement au cercle de rayon* r, *ayant son centre en* A, *a pour pôles le point* S *d'intersection des tangentes en* A *à la courbe lieu des centres et en* B *point correspondant de la deuxième courbe.*

4° *Étant données deux courbes* A, B, *si l'on prend pour* r *la distance entre un point de* B *et le point où la tangente en* B *coupe* A, *la série des cercles* r *sera orthogonale à la courbe* B ; *la corde de contact, dans ce cas, passe par le centre de courbure de* B *au point considéré. La corde de contact a une enveloppe touchée par chaque corde en un point situé en ligne droite avec les centres de courbure des deux branches de l'enveloppe des cercles aux points où elles sont rencontrées par cette corde.*

II. Déformons la ligne des centres (A), de manière à en faire une droite (D) tangente en A à (A). Soient (e), (e') les enveloppes des cercles relatives à la droite (D) ; (E), (E′) les enveloppes de (e), (e'), quand on fait rouler (A) sur (D); c, c', C, C′ les centres de courbure de (e), (e'), (E), (E′). On aura le théorème suivant :

Lorsque l'on déforme la ligne des centres (A), *en la laissant tangente à* (D) *au point* A, *la droite qui joint les centres de courbure* C, C′ *passe par un point fixe de* (D) *et rencontre la normale à la développée de* (A) *en un point dont la distance à la normale en* A *à* (A) *est constante pendant la déformation.*

III. Propriétés relatives de plusieurs séries de cercles, dont les rayons sont dans un rapport constant.

IV. Si l'on déforme la ligne des centres (A) dans une portion de sa longueur, la somme algébrique des deux arcs correspondants de l'enveloppe reste constante.

V. Propriété analogue pour l'aire comprise entre les deux branches de l'enveloppe et les cordes de contact extrêmes.

VI. Propriétés relatives aux centres de gravité, dans le cas étudié § III.

Deuxième Partie. — Extension des résultats précédents aux enveloppes de sphères.

Neuberg (*J.*). — Sur les triangles homologiques (270-275).

Lévy (*L.*). — Exposition des premières propriétés des surfaces du second degré. (276-278; 321-323; 348-350).

Neuberg (*J.*). — Sur les tétraèdres homologiques. (315-320).

Brocard (*H.*). — Propriété du triangle. (323-325; 343-347; 393-397; 425-430).

Catalan (*E.*). — Une propriété du nombre 365. (325).

Neuberg (*J.*). — Sur la cycloïde. (351-355).

Une cycloïde peut être engendrée de la manière suivante : un point A se meut avec une vitesse v sur une droite D; autour de ce point A tourne une droite E avec une vitesse angulaire v'; le point B situé sur E à une distance $AB = R$ telle que $v'R = v$, engendre une cycloïde; les autres points de E engendrent des cycloïdes allongées ou raccourcies. Le mouvement de E est dit cycloïdal. Toute droite qui a un mouvement cycloïdal à l'un de ses points engendre une cycloïde, tandis que tous les autres engendrent des cycloïdes allongées ou raccourcies. On trouve aisément que la normale, la tangente à la cycloïde, une droite faisant un angle constant sont animées d'un mouvement cycloïdal.

Mansion (*P.*). — Principes de la théorie des développoïdes des courbes planes. (356-363; 398-397).

Brocard (*H.*). — Notes sur les questions de mathématiques du Concours de l'École Polytechnique. (364-370).

Mansion (*P.*). — Esquisses biographiques : J. Booth. (375).

De Longchamps (*G.*). — Sur les cubiques unicursales. (403-408).

Catalan (*E.*). — Sur la décomposition d'un cube en quatre cubes. (409-411).

Jensen (*J.-L.-W.-V.*). — Multiplication de deux séries convergentes. (430-432).

Traduit du danois du *Journal de Zeuthen*, 1879, p. 95-96. On peut multiplier deux séries convergentes, d'après la règle habituelle, même si la série des modules de l'une d'elles n'est pas convergente.

Realis (*S.*). — Questions d'analyse numérique. (433-435).

Catalan (*E.*). — Sur une épure de Géométrie descriptive. (435-437).

Bibliographie. (14-18; 205-209; 255).

Correspondance. (18-22; 103; 166-168; 195-201; 235-238; 279; 370-374; 437-448).

Solutions des questions proposées. (23-30; 53-64; 103-109; 130-142; 169-176; 209-219; 242-254; 280-299; 326-335; 376-381; 412-416; 449-451).

Questions proposées. (31-32; 64; 110-112; 142-144; 176; 201-205; 209-224; 256; 300-303; 335-336; 381-384; 451-454).

Extraits analytiques. (97-100; 188-194).

Variétés. (101-102; 144-197; 239-242; 438-449).

Rectifications. (144; 150; 198; 224; 303-304; 344; 416).

Table des matières. (455-564).

Tome VI; 1880.

Ribaucour (*A.*). — Mémoire sur les courbes enveloppes de cercles et sur les surfaces enveloppes de sphères. (Fin). (1-8).

Voir t. V, p. 257, 305, 337, 385, 417.

Neuberg (*J.*). — Sur le nombre des sphères qui touchent quatre plans donnés. (8-18).

Discussion complète, par la Géométrie seule, de tous les cas qui peuvent se présenter. Il y a huit sphères au maximum, mais ce nombre peut se réduire.

Brocard (*H.*). — Propriété du triangle. (19-23, 97-100).

Suite, *voir* t. V, p. 323, 343, 393, 425.

Saltel (*L.*). — Application du théorème de Rolle à la théorie de l'osculation. (24-30).

Catalan (*E.*). — Sur un système d'équations linéaires. (30-32).

Catalan (*E.*). — Sur quelques développements de $\cos mx$ et de $\sin mx$. (100-105).

Neuberg (*J.*). — Propriétés de l'ellipse. (105-109).

Laisant (*A.*). — Généralisation d'une formule de M. Catalan. (109-111).

Realis (*S.*). — Remarque sur une équation indéterminée. (111-113).

Dubois (*E.*). — Sur le théorème des faisceaux. (114-118).

Cesaro (*E.*). — Sur l'existence de certains polyèdres. (118-119).

Il n'y a que cinq espèces de polyèdres dont tous les angles solides ont le même nombre d'arêtes et les faces le même nombre de côtés. Ce sont le tétraèdre, l'hexaèdre à faces quadrilatères, l'octaèdre et l'icosaèdre à faces triangulaires, le dodécaèdre à faces pentagonales.

Catalan (*E.*). — Sur l'intégrale $\int \frac{dx\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}$. (151-155).

On arrive à la substitution d'Euler qui rend la différentielle rationnelle, par les substitutions naturelles

$$x = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi,\quad \sin\varphi = z,\quad z = \sqrt{2}\sin\theta.$$

Le Paige (*C.*). — Sur une propriété des déterminants hémisymétriques d'ordre pair. (155-158).

Dubois (*E.*). — Sur une famille de courbes cycloïdales. (158-165).

Neuberg (*J.*). — Exercices de Mathématiques élémentaires. (165-168; 215-216; 364-365).

Wassilief. — Esquisse biographique. Alexandre Popof. (169).

Desmartres. — Sur les surfaces à génératrices circulaires. (193-201, 300-305, 337-341).

Les normales aux différents points d'une surface engendrée par un cercle, le long d'une de ces génératrices circulaires, rencontrent, outre l'axe de cette génératrice, une conique fixe qui peut servir à construire ces normales. Les surfaces dont les génératrices circulaires sont les lignes géodésiques sont la sphère et le cylindre.

Catalan (*E.*). — Des coniques satisfaisant à quatre conditions. (201-206).

Brocard (*H.*). — Note sur divers articles de la *Nouvelle Correspondance*. (206-215).

Neuberg (*J.*). — Sur les normales à l'ellipse. (241-250, 289-299).

Résumé extrêmement bien fait de la théorie des normales aux coniques, contenant des démonstrations et des propositions nouvelles.

Lucas (*É.*). — Sur l'extension du théorème de Descartes. (250-253).

Les théorèmes de M. Laguerre sur la limite supérieure du nombre des racines supérieures à une quantité a sont démontrés par M. Lucas, comme Segner et Gauss ont démontré celui de Descartes.

Catalan (*E.*). — Remarques sur une série. (253-255).

L'auteur établit d'une manière très simple la transformation de Clausen de la série de Lambert.

Brocard (*H.*). — Sur la fréquence et la totalité des nombres premiers. (Suite, voir t. V.) (255-263, 481-488, 529-542).

Recherches de Piarron de Mondesir, Meissel, Riemann, Genocchi, Desboves, James Glaisher et J.-W.-L. Glaisher.

Realis (*S.*). — Sur quelques questions se rattachant au problème de Pell. (306-312, 342-350).

Cesaro (*E.*). — Sur la série harmonique. (312-314).

La somme des n premiers termes de la série harmonique est comprise entre ln et $ln + \frac{1}{2}$. (Démonstration élémentaire.)

Laquière. — Théorie géométrique des courbes anallagmatiques, sections planes de la cyclide. (351-354, 402-406, 453-432).

Cesaro. — Une démonstration de la formule de Stirling. (354-357).

Simplification de la méthode exposée t. V, p. 44.

Mansion (*P.*). — Dérivée des fonctions élémentaires d'une variable imaginaire. (358-364, 385-396).

Catalan (*E.*). — Sur la quadrature des courbes paraboliques. (396-402).

Démonstration très simple du théorème de Gauss.

Landry. — Décomposition de $2^{64}+1$. (417).

Le Lasseur. — Autres décompositions. (417-418).

Décomposition de nombres très grands en leurs facteurs: 2918000731816531 est premier.

Catalan (*E.*). — Sur la cyclide. (439-446).

Résumé des propriétés de cette surface en suivant autant que possible la marche indiquée par Dupin.

Realis (*S.*). — Problème d'analyse indéterminée.

Carnoy (*J.*). — Théorèmes sur les coniques.

Cesaro (*E.*). — Quelques formules. (450-452).

Catalan (*E.*). — Sur une propriété des surfaces du second degré. (489-490).

Le Paige (*C.*). — Sur quelques propriétés des déterminants. (489-496).

Déterminants de déterminants.

Laquière. — Observations sur la question **229**.

Sur les quadrilatères articulés.

Cesaro (*E.*). — Sur les formes approchées des solides d'égale résistance. (502-503).

Radicke (*A.*). — Démonstration du théorème de v. Staudt et de Clausen. (503-507).

Radicke (*A.*). — Démonstration d'un théorème de Stern. (507-509).

Cesaro (*E.*). — Une question de maximum traitée par Poncelet. (548-551).

Berger. — Quelques théorèmes extraordinaires. (551-552).

Catalan (*E.*). — Un nouveau théorème empirique. (552-553).

La somme des cinquièmes puissances des *n* premiers nombres naturels ou neuf fois cette somme est décomposable en trois carrés entiers et positifs.

Bibliographie. — (217-219, 315-317).

Correspondance. — (32-44, 119-122, 170-175, 219-228, 263-264, 317-325, 366-370, 408-417, 453-463, 509-512).

Solutions des questions proposées. — (48-93, 122-140, 176-191, 229-237, 325-333, 370-383, 418-424, 463-475, 513-525, 554-562).

MATHESIS, Recueil mathématique a l'usage des Écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. Mansion, Professeur à l'Université de Gand, et J. Neuberg, Professeur à l'École des Mines de Liège. Gand, Hoste; Paris, Gauthier-Villars (2).

Mansion (P.). — Démonstration élémentaire du théorème de Taylor pour les fonctions d'une variable imaginaire. (3-6).

Démonstration élémentaire de la formule

$$fZ = fz_0 + \frac{Z-z_0}{1} f'z_0 + \frac{(Z-z_0)^2}{1.2} f''z_0 + \ldots + \frac{(Z-z_0)}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}z_0 + \int_{z_0}^{Z} \frac{(Z-z)^{n-1} f^n z\, dz}{1.2\ldots(n-1)},$$

où z est de la forme $x+y\sqrt{-1}$. De la forme du reste ici indiquée, on déduit celle de M. Darboux et celle de M. Falk. Cette dernière forme du reste, qui suffit pour établir complètement la théorie des fonctions élémentaires d'une variable imaginaire, est aussi obtenue en ne s'appuyant que sur le théorème de Rolle, donc sans Calcul intégral.

---

(1) Ce Volume est le dernier de la *Nouvelle Correspondance*. M. Catalan avait su grouper autour de lui des collaborateurs zélés. Son action avait été féconde. Il est regrettable qu'il ait été conduit à cesser la publication de son intéressant Recueil.

(2) *Mathesis* fait suite à la *Nouvelle Correspondance mathématique*, mais a un caractère un peu plus élémentaire. Ce Recueil paraît par livraisons mensuelles de 16 ou 24 pages in-8. Le prix d'abonnement est : 7 fr. 50 c. pour la Belgique; 9 fr. pour l'Union postale. Le Tome I contient viii-228 pages et un Supplément de 64 pages.

Mansion (*P.*). — Généralisation d'une propriété des podaires. (7).

Neuberg (*J.*). — Questions de Mathématiques élémentaires. (7-10, 26-27).

Mansion (*P.*). — Sur un nouveau principe de Calcul des probabilités. (10).

Mansion (*P.*). — Sur l'évaluation approchée des aires planes. (17-22, 33-36).

Voir plus bas l'analyse du *Supplément*.

Mansion (*P.*). — Une nouvelle formule de Calcul différentiel. (23-25).

Formule de M. Teixeira donnant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction composée.

Hermite (*C.*). — Sur la série

$$\frac{1}{(\log 2)^n} + \frac{1}{(\log 3)^n} + \ldots + \frac{1}{(\log x)^n} + \ldots.$$

Cette série est divergente pour toute valeur de n. Autre démonstration par M. E. Catalan, p. 58; Note par M. Baehr sur la même série, p. 58.

Liebrecht (*E.*). — Discussion de l'équation du troisième degré. (28-29).

Verstraeten et *Mister*. — Courbe de contact d'un cylindre circonscrit à un hélicoïde à plan directeur. (49-51; 137-139).

Cette courbe est une hélice (Guillery) dont la tangente a la même inclinaison que celle des rayons lumineux.

Cesáro (*E.*). — Sur la série harmonique. (51-53; 143-144).

En ne s'appuyant que sur le développement en série de $\log(1+x)$, l'auteur établit les inégalités suivantes, où H_n désigne la somme

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n},$$

C la constante d'Euler :

$$\log\left(n + \frac{1}{2}\right) + 0,57 < H_n < \log\left(n + \frac{1}{2}\right) + 0,60,$$

$$H_n = l\sqrt{n(n+1)} + C + \frac{\theta}{6n(n+1)}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Ruex (*P.*) et *Neuberg* (*J.*). — Sur un lieu géométrique. (55-57).

Lieu géométrique des points de rencontre des tangentes communes à deux coniques, l'une mobile d'une certaine manière.

Lucas (*É.*). — Notes de Géométrie analytique. (65-66).

Démonstrations très simples des théorèmes suivants :

Si trois points d'une droite demeurent sur les faces d'un trièdre, un quatrième point décrit un ellipsoïde; si quatre points d'une droite demeurent sur les faces d'un tétraèdre, un cinquième point décrit une ellipse et la droite reste parallèle à un cône de révolution.

Mansion (*P.*). — Sur une intégrale définie. (67-70).

Günther (*S.*). — Note sur la logocyclique ou strophoïde. (81-84).

Tangente; aire; longueur d'un arc exprimée au moyen d'un arc d'hyperbole équilatère et d'un arc de lemniscate.

Barbarin. — Puissance d'un point par rapport à une conique à centre. (85-87).

Gilbert (*Ph.*). — Exercice de Géométrie infinitésimale. (97-99).

Cesáro (*E.*). — Démonstration élémentaire et généralisation de quelques théorèmes de M. Berger. (99-102).

Voici quelques-uns de ces théorèmes :

Pour $n = \infty$, *la moyenne de la somme des diviseurs d'un nombre entier est* $\frac{1}{6}n\pi^2$; *celle des inverses des diviseurs,* $\frac{1}{6}\pi^2$. M. Cesáro donne un principe général qui permet de trouver la valeur d'un grand nombre de moyennes analogues.

Neuberg (*J.*). — Sur les figures semblables. (106-108).

D'Ocagne (*M.*). — Partage des polygones. (109-110).

Catalan (*E.*). — Carré magique de la villa Albani. (121).

Brocard (*H.*). — Ecole Polytechnique de Paris. Concours de 1881. (122-123).

Neuberg (*J.*). — Sur une application de l'Algèbre directive. (123-127).

Lucas (*É.*). — Questions d'Arithmétique. (134).

Mansion (*P.*). — Sur la sommation de certaines séries, d'après M. E. Catalan. (139-142).

Séries ayant pour terme général une expression décomposable en fractions de la forme $\frac{A}{(x+k)(x+k+1)}$.

Neuberg (*J.*). — Sur le centre des médianes antiparallèles. (153-154; 173-176; 185-190).

Le point k du plan d'un triangle ABC, dont les distances aux côtés sont proportionnelles aux longueurs de ces côtés, jouit d'une foule de propriétés qui le placent au nombre des points *remarquables* du triangle. M. J. Neuberg a réuni les théorèmes, déjà connus, concernant ce point (appelé *point de Grebe,* en Allemagne) et a ajouté quelques nouvelles propositions intéressantes.

Si x, y, z sont les distances d'un point quelconque aux côtés de ABC, k est le point pour lequel $x^2+y^2+z^2$ est minimum (Gauss); c'est aussi le centre des ellipses décrites par les points tels que $x^2+y^2+z^2$ reste constante (E. Cesáro).

Les droites AK, BK, CK, appelées par M. Lemoine *médianes antiparallèles,* sont symétriques des médianes de ABC par rapport aux bissectrices; elles partagent les côtés correspondants dans le rapport des carrés des côtés adjacents et passent par les intersections A′, B′, C′ des tangentes menées par A, B, C à la circonférence ABC. K est le centre de gravité du triangle qui a pour sommets les projections de K sur les côtés de ABC.

Soient A_1, B_1, C_1 les projections de K sur les perpendiculaires élevées aux milieux des côtés de ABC. Les triangles isoscèles A_1BC, B_1CA, C_1AB sont semblables; l'angle à la base vérifie la formule

$$\cot\alpha = \cot A + \cot B + \cot C \text{ (Brocard).}$$

Les droites AC_1, BA_1, CB_1 se coupent en un même point ω; les droites BC_1, CA_1, CB_1 concourent en un second point ω'.

Les points ω, ω', que M. J. Neuberg appelle *points de Brocard,* du nom du géomètre qui les a considérés pour la première fois, sont les foyers d'une conique touchant les côtés de ABC aux pieds des médianes antiparallèles.

Le centre O de la circonférence ABC et les six points ω, ω', k, A_1, B_1, C_1 appartiennent à une même circonférence (cercle de Brocard), qui est le lieu des centres des médianes antiparallèles des triangles circonscrits à ABC et dont les côtés font un même angle avec un côté adjacent de ABC.

Les parallèles aux côtés du triangle A′B′C′, menées par K et limitées respectivement par les angles A, B, C, sont égales entre elles (Lemoine); leurs extrémités sont situées sur une même circonférence et sont les sommets de deux triangles inscrits à ABC et ayant leurs côtés perpendiculaires à ceux de ABC. Ces mêmes points étant les sommets de trois rectangles inscrits à ABC, k est le point de concours des droites qui joignent les milieux des côtés de ABC aux milieux des hauteurs correspondantes.

Soit $\alpha\beta\gamma$ un triangle formé par trois parallèles à BC, CA, AB, à des distances proportionnelles à ces côtés. Les côtés des triangles ABC, $\alpha\beta\gamma$, dont K est le centre de similitude, se coupent en six points d'une même circonférence dont le centre est sur la droite KO. Ces six points sont aussi sur le périmètre d'un triangle $\alpha''\beta''\gamma''$ homothétique à A′B′C′ par rapport à K.

En particulier, les parallèles aux côtés de ABC, menées par K, rencontrent le périmètre de ABC en six points d'une même circonférence (Lemoine); les projections des pieds H_a, H_b, H_c, des hauteurs de ABC sur les côtés sont sur une même circonférence. Le centre de la dernière courbe est au milieu des droites joignant les droites H_a, H_b, H_c, aux points de concours des hauteurs des triangles AH_bH_c, BH_cH_a, CH_aB_b.

Les centres des médianes antiparallèles des triangles ABC, $H_a H_b H_c$ sont en ligne droite avec l'intersection des hauteurs de ABC (Edm. van Aubel).

Mansion (*P.*). — Sur la série harmonique et la formule de Stirling. (169-172).

L'auteur établit les formules suivantes :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = C + \log n + \frac{1}{2n} - \frac{\theta}{2n(2n+1)}, \quad 0 < \theta < 1,$$

$$\log(1.2.3\ldots N) = \frac{1}{2}(C+1) + \left(N + \frac{1}{2}\right)\log N - \frac{\theta}{2},$$

en ne supposant connue que l'aire de l'hyperbole équilatère; C est la constante d'Euler.

Realis (*S.*). — Sur une somme de cubes. (176-177).

Jeřábek et *Neuberg*. — Sur un hexagone équilatéral, inscrit à un triangle donné. (191-193).

Biographie et bibliographie. — (11, 39-41, 70-71, 110-113, 144-145, 158-161, 178).

Notes mathématiques. — (58, 66-67, 87-89, 155-158).

Questions d'enseignement. — (103-106, 193-198).

Solutions de questions proposées. — (28-30, 42-47, 59-61, 71-78, 90-94, 113-118, 127-133, 145-151, 161-167, 179-183, 199-203).

Questions proposées. — (12-15, 30-31, 48, 62, 78-79, 95-96, 118-119, 135-136, 168, 184, 203-207).

Questions d'examen. — (16, 32, 63-64, 79-80, 119-120, 162).

Rectifications. — (32, 48, 80, 88, 151).

Table des auteurs. — (208).

Supplément. — Sur l'évaluation approchée des aires planes; par M. P. Mansion. (1-64).

Parmi les formules vraiment pratiques pour le calcul des aires planes, il n'y en a que deux qui soient démontrées rigoureusement, savoir celle de Poncelet et celle de Parmentier; pour les autres et en particulier pour la plus exacte de toutes, celle de Simpson, on ne donne pas de limite supérieure et de limite in-

férieure de l'erreur qu'elles comportent, de sorte qu'au fond elles sont établies d'une manière purement empirique.

Dans le présent Mémoire, l'auteur obtient, d'une manière simple, et souvent de plusieurs manières, la *limite de l'erreur* et sa représentation géométrique, non seulement pour les formules de Parmentier et de Poncelet, mais aussi pour celle des trapèzes, pour les deux formules de Simpson, pour celles de Weddle, de Catalan et de Ch. Dupin, pour une formule inédite de Parmentier et pour une formule nouvelle. Il compare ensuite ces diverses formules au point de vue de leur exactitude relative, en supposant l'ordonnée de la courbe développable en série au moyen du théorème de Taylor, entre certaines limites plus ou moins rapprochées.

Le résultat le plus simple et le plus important est établi en ne s'appuyant que sur le premier Livre de Géométrie :

L'aire S *comprise entre une courbe dont la concavité est toujours tournée dans le même sens, deux ordonnées extrêmes et une base à laquelle elles sont perpendiculaires, est comprise entre celle d'un polygone inscrit dont les sommets sont des ordonnées équidistantes qui le décomposent en trapèzes de même hauteur, et ce polygone où les deux trapèzes extrêmes seraient remplacés par des rectangles de même hauteur, ayant pour bases respectivement la seconde et l'avant-dernière ordonnée des sommets du polygone.*

Analytiquement, avec les notations habituelles, $s = \int_{x_0}^{x_n} y\,dx$ est compris entre

$$h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-2} + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right),$$

$$h\left(\frac{y_1}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-2} + y_{n-1} + \frac{y_{n-1}}{2}\right).$$

Parmi les autres résultats obtenus, nous citons les suivants :

1° Parmi les formules expéditives, la plus exacte est celle de Parmentier.

2° Parmi les formules très exactes, mais peu expéditives, la meilleure est celle de Simpson :

$$S = \frac{h}{3}(A + 4B),$$

$$A = \frac{y_0}{2} + y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2} + \frac{y_{2n}}{2},$$

$$B = y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1},$$

quand le nombre des divisions de la base est pair. 3° L'aire à chercher est comprise entre l'aire $T = h(A + B)$ du polygone inscrit et la somme $M = 2hB$ des trapèzes circonscrits de Poncelet. La formule de Simpson peut s'écrire

$$S = \frac{1}{3}(2T + M);$$

par suite, l'erreur qu'elle comporte est inférieure à la plus grande des deux différences

$$\frac{1}{3}(2T + M) - T = \frac{h}{3}(B - A), \quad M - \frac{1}{3}(2T + M) = \frac{2h}{3}(B - A),$$

donc

$$\frac{2h}{3}(B - A),$$

résultat nouveau extrêmement simple. 4° Si le nombre des divisions de la base est impair, la formule de Simpson se transforme dans la formule de M. Catalan, qui est presque aussi exacte.

BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, pubblicato da B. BONCOMPAGNI [1].

Tome XII : 1879.

Favaro (Ant.). — Intorno alla vita ed alle Opere di Prosdocimo de' Beldomandi, matematico padovano del secolo XV. (1-74, 115-251).

M. Favaro, dans son consciencieux travail, a voulu élever un monument durable à la gloire de Prosdocimo de' Beldomandi, son compatriote et l'un de ses plus anciens prédécesseurs à l'Université de Padoue. L'œuvre était difficile et laborieuse, et le savant professeur nous avoue que, perdant tout à fait courage, il aurait abandonné sa patriotique entreprise, sans les encouragements de ses amis, et surtout sans l'aide du prince Balthasar Boncompagni.

Prosdocimo, mathématicien, philosophe, astronome et musicien, enseignait l'astrologie à Padoue en 1422 ; il mourut en 1428, dans cette ville. On ne connaît pas la date de sa naissance, mais la conjecture la plus probable, c'est qu'il naquit de 1360 à 1370. Il écrivit en 1410 son *Tractatus Algorismi.* Cet Ouvrage, imprimé pour la première fois le 22 février 1483, à Padoue, ne contient pas un mot d'Algèbre; s'il assigne une place importante à Prosdocimo dans l'histoire de l'Arithmétique, il ne justifie donc nullement ce qu'a dit Montucla dans son *Histoire des Sciences mathématiques* (t. I, p. 537) qu'à Prosdocimo revenait l'honneur d'avoir été, avec Léonard de Pise, l'un des importateurs de la science algébrique en Europe. M. Favaro cite les dix Ouvrages suivants de Prosdocimo, tous relatifs à l'Astronomie : *Commentarium Sphæræ* (Commentaire sur le traité *De Sphaera* de Jean de Sacrobosco, imprimé à Venise en 1531). — *Canones de motibus corporum supercœlestium. — Tabulæ mediorum motuum, equationum, stationum et latitudinum planetarum, eleuationis signorum, diuersitatis aspectus Lunæ, mediarum coniunctionum et oppositionum lunarium, feriarum, latitudinum climatum, longitudinum et latitudinum ciuitatum. — Stellæ fixæ verificatæ tempore Alphonsi. — Tractatus de electionibus. — Canon ad inueniendum tempus introitus Solis in quodcumque* 12 *signorum in Zodiaco. — Canon ad inueniendum introitum Lunæ in quodlibet* 12 *signorum in Zodiaco. — Canones magistri Ioannis de Saxonia super Tabulas Alphonsi, per Prosdocimo de Beldomandis* (sic). — *Canones operatiui et compositiui Astrolabii.* — Et enfin l'*Astrolabium.*

Profondément versé dans la théorie de la musique, qui faisait alors partie intégrante du *Quadrivium* des Mathématiques, Prosdocimo écrivit de nombreux Ouvrages sur la science musicale. Il était musicien dans toute l'acception du mot,

---

(1) Voir *Bulletin*, V_2, 164.

tel qu'on l'entendait au moyen âge : *Musicus cognoscit, sentit, discernit, eligit, ordinat et disponit omnia quæ ipsam tangunt scientiam.* Plusieurs de ces Ouvrages ont été imprimés par les soins de M. de Coussemaker (*Scriptores de Musica*, t. III), savoir : le *Tractatus de contrapuncto*, écrit en 1412 ; le *Tractatus practice de musica mensurabili* (qui n'est qu'un abrégé revu et amendé de la *Musique spéculative* de Jean de Muris) ; le *Tractatus practicæ de musica mensurabili ad modum Italicorum* ; le *Libellus monocordi;* et la *Brevis summula proportionum.*

Il en est d'autres qui sont restés manuscrits, tels que *Expositiones tractatus practicæ cantus mensurabilis magistri Johannis de Muris* (ms. de 1404) ; *Tractatus planæ musicæ* (ms. de 1412) ; *Opusculum contra theoricam partem, sive speculativam Lucidarii Marchetti Patavini,* et enfin la *Musica speculativa.*

N'oublions pas de dire que M. Favaro a relevé quelques erreurs commises par Baldi, Montucla, Libri, Fétis, Hoefer, etc., relativement à la personne ou aux écrits de Prosdocimo de' Beldomandi.

Riccardi (*P.*). — Nuovi Materiali per la storia della Facoltà matematica nell' antica Università di Bologna. (299-312).

Cette étude peut être considérée comme une suite au Mémoire du professeur Silvestro Gherardi, publié à Bologne en 1846 et traduit en allemand par le professeur Curtze en 1871. Elles est suivie d'un Appendice contenant le programme des leçons de Mathématiques professées par Cavalieri, de 1642 à 1645, à l'Université de Bologne. Ce programme démontre, ainsi que le fait observer M. Riccardi, que le modeste et religieux Bonaventure Cavalieri ne se borna pas à approuver *in petto* la doctrine de Copernic, mais qu'il eut le courage de l'enseigner publiquement, bien que sous forme d'hypothèse.

Eneström (*Gust.*). — Notice sur la correspondance de Jean Ier Bernoulli. (313-314).

En 1797, toute la correspondance de Jean Ier Bernoulli fut acquise, au prix de 60 ducats, par l'Académie Royale des Sciences de Stockholm. L'Académie semble l'avoir si bien *gardée* depuis cette époque, dit M. Eneström, qu'à Stockholm même on ignorait son existence, en l'année 1848, et que personne ne put renseigner sur ce dépôt le Dr Wolf, qui s'était avisé de poser une question à ce sujet dans les *Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern.* Cette précieuse correspondance a été retrouvée il y a quelques années. Pour donner une idée de son importance, qu'il suffise de dire qu'elle se compose de plus de 1400 lettres, dont 900 au moins en français, plus de 500 en latin et 1 en allemand, écrites par le marquis de L'Hôpital, Varignon, Jean Bernoulli, Moivre, Montmort, Chr. Wolf, Euler, Dortous de Mairan, Cramer, Maupertuis, etc. Il y a là un trésor enfoui, qui demeure inutile pour la science, et pourtant, dit M. Eneström, en terminant sa trop courte Notice, « plusieurs de ces lettres jettent une grande lumière dans l'histoire des Mathématiques de ce temps ».

Żebrawski (*T.*). — Quelques mots au sujet de la Note de M. Maximilien Curtze sur l'orthographe du nom et la patrie de Witelo. (315-317).

Les observations du Dr Zebrawski, membre de l'Académie des Sciences de Cracovie, s'appliquent à une Note publiée dans le t. IV du *Bullettino* (année 1871), p. 49-76, par M. Curtze, professeur au gymnase de Thorn.

« Il est bien vrai », dit M. Curtze, « que Witelo vivait à Cracovie; mais doit-il à cause de cela être Polonais? Je crois que non. » A M. Curtze qui voudrait germaniser l'illustre mathématicien du XIIIe siècle, M. Żebrawski répond victorieusement : « Dans le cas où la nationalité d'un homme est mise en doute, il n'y a d'autre preuve plus claire et plus décisive que l'aveu de la personne même : à quelle nationalité veut-elle appartenir? Or, notre *Witek* dit : *In nostra terra, scilicet Poloniæ,* et cela suffit pour nous assurer qu'il ne put être que Polonais; un Allemand n'aurait pas nommé la Pologne comme son pays, *terra nostra,* et la Pologne dans ce temps-là n'était soumise à aucun gouvernement étranger. »

En France, on a toujours regardé comme étant de nationalité polonaise le célèbre physico-mathématicien, et généralement on le désigne sous le nom de Vitellio.

M. Curtze a relevé treize manières différentes dont ce nom est écrit dans divers manuscrits, mais M. Żebrawski fait voir que le véritable nom, le nom primitif est *Witek*, et que cette orthographe, défigurée en *Witelo* par un premier copiste, a pu passer ensuite par toutes les autres variantes signalées par M. Curtze.

Dall' Oppio (*Luigi*). — Fisica tecnologica, Elettricità e Magnetismo, Telegrafia elettrica, elettrometallurgia, accensione elettrica delle mine, Illuminazione elettrica, Telefoni, ecc., di Rinaldo Ferrini, Professore nel R. Istituto tecnico superiore di Milano, 1878, in-8 di pagina XVI, 574. (318-332).

Dans cet article, l'ingénieur Luigi dall' Oppio fait l'examen de l'Ouvrage publié en 1878, à Naples, Milan et Pise par le professeur Rinaldo Ferrini, membre de l'Institut Lombard. Il loue la partie du Livre qui traite des applications techniques de l'électricité et du magnétisme; mais il s'attache spécialement à la critique du Chapitre intitulé : *I principii intorno ai potenziali,* et regrette que l'auteur n'ait pas mieux profité des excellents travaux de M. Betti sur la Physique mathématique.

Hultsch (*Fred.*). — Pappi Alexandrini collectionis quæ supersunt e libris manuscriptis edidit, latina interpretatione et commentariis instruxit Fredericus Hultsch. Article traduit de l'allemand en italien par le Dr Alfonso Sparagna. (333-344).

Le Dr Hultsch a publié à Berlin, en trois volumes in-8°, avec interprétation latine et savants commentaires, tout ce qui reste de la collection mathématique de Pappus d'Alexandrie. Cette publication est de haute importance pour l'histoire des Mathématiques dans l'antiquité. Dans l'article analytique, traduit en italien par M. Sparagna pour le *Bullettino*, le Dr Hultsch passe en revue, Livre par Livre, le contenu de ce Recueil, dont nous ne connaissons guère, en France, que les Porismes rétablis par la merveilleuse sagacité de feu notre illustre ami, Michel Chasles. On sait combien il y a de lacunes profondément regrettables et

aussi d'interpolations malencontreuses dans ce qui nous reste de Pappus, et combien de parties importantes sont entièrement perdues.

Le plus ancien manuscrit connu de la collection mathématique de Pappus appartient à la Bibliothèque du Vatican, où il est coté sous le n° 218. Il commence à la moitié du second Livre; c'est ce manuscrit qui a servi de base au grand travail édifié par le Dr Frédéric Hultsch.

Steinschneider (Maurice). — Intorno a Johannes de Lineriis (de Liveriis) e Johannes Siculus. Nota di M. Steinschneider. (345-351).

Dans cette Note, le savant orientaliste et mathématicien de Berlin a pour but d'apporter son contingent d'observations personnelles, et de provoquer de nouvelles recherches dans les manuscrits, pour arriver à résoudre toutes les questions relatives à deux auteurs qu'on a souvent confondus, Jean de Linières et Jean de Sicile, et pour bien déterminer les Ouvrages qui appartiennent à chacun d'eux, et dont l'attribution reste encore incertaine.

Boncompagni (Balth.). — Intorno alle vite inedite di tre matematici (Giovanni Danck di Sassonia, Giovanni de Lineriis, e Fra Luca Pacioli da Borgo San Sepolcro), scritte da Bernardino Baldi. (352-419).

Bernardino Baldi, né en 1553, mort en 1617, est auteur d'un ouvrage intitulé : *Vite de matematici* qui ne fut jamais imprimé, et dont le Prince Balthazar Boncompagni possède trois manuscrits différents, comprenant ensemble les vies de 193 mathématiciens, parmi lesquels Jean Danck de Saxe, Jean de Linières et Fra Luca Pacioli.

Jean Danck de Saxe était professeur de Mathématiques à Paris en 1330; c'est en 1331 qu'il termina, dans cette ville, son commentaire sur le livre d'astrologie judiciaire d'Abd-el-Aziz el Kabiti, plus connu sous le nom d'Alchabitius. Cet Ouvrage fut imprimé à Venise pour la première fois en 1485; on en connaît d'autres éditions publiées à Venise en 1491, 1502, 1503, 1513, et enfin à Paris, en 1521.

Jean de Linières ou de Lignières était Français, du diocèse d'Amiens. Il enseignait les Mathématiques à Paris, en même temps que Jean Danck de Saxe et Jean de Muris, célèbre docteur de Sorbonne, que l'on croit originaire de Normandie.

Le frère franciscain Luca Pacioli enseigna l'Arithmétique à Pérouse pendant les années 1477-1480; plus tard il enseigna les Mathématiques à Naples, à Florence, à Rome. Ses œuvres comprennent : 1° *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità,* imprimée pour la première fois à Venise en 1494; 2° *Compendium de divina proportione.* La Bibliothèque Ambroisienne de Milan en conserve précieusement un exemplaire manuscrit décoré de figures géométriques dessinées de la propre main de Léonard de Vinci, qui était lié d'amitié avec Fra Luca Pacioli; 3° *Trattato di architettura;* 4° *Figure di antichi caratteri;* 5° *Libellus in tres tractatus divisus;* ce Triparty, s'il faut en croire Baldi, était un Traité des corps réguliers; 6° une traduction en langue italienne des Eléments d'Euclide; 7° *Tractatus de viribus quantitatis.* Le Prince Boncompagni, qui cite, à défaut de Baldi, cette édition d'Euclide, de 1509, et ce traité resté jusqu'à présent inédit, *De viribus quantitatis*, rappelle en outre

que Luca Pacioli dédia un autre Traité : *De ludis in genere cum illicitorum reprobatione*, à François de Gonzague, marquis de Mantoue, et à la marquise Isabelle, sa femme; mais le savant et illustre éditeur du *Bullettino* déclare qu'aucun exemplaire, soit imprimé, soit manuscrit, n'est parvenu à sa connaissance. On est alors porté tout naturellement à se demander si cet Ouvrage a jamais existé.

Boncompagni (*B.*). — Vite inedite di tre matematici (Giovanni Danck di Sassonia, Giovanni de Lineriis e Fra Luca Pacioli da Borgo san Sepolcro) scritte da Bernardino Baldi. (420-427). — Appendice di documenti inediti relativi a Fra Luca Pacioli. (428-438).

Ces documents inédits, extraits des manuscrits de la Bibliothèque du Vatican, de la bibliothèque de l'Université de Bologne, des Archives générales de Venise, de celles de Pérouse et des Archives d'Etat de Florence, ont été reproduits avec le plus grand soin par le Prince Balthazar Boncompagni.

Henry (*Ch.*). — Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat, suivies de fragments inédits de Bachet et de Malebranche. (477-568; 619-740).

On ne saurait qu'applaudir à la publication d'écrits authentiques inédits de Fermat, de Bachet ou de Malebranche. Mais disons tout de suite que les fragments mathématiques attribués à Malebranche par M. Ch. Henry ne sont point de Malebranche : ils sont l'œuvre d'un autre Père de l'Oratoire, Claude Jaquemet, de Valenciennes, professeur à Vienne (Dauphiné), moins connu que l'illustre métaphysicien, mais plus mathématicien que lui. Je me bornerai à dire ici que nulle part, dans les manuscrits du fonds de l'Oratoire, Malebranche n'est indiqué comme étant l'auteur de ces essais mathématiques, et que la simple lecture des pièces rapportées par M. Henry démontre surabondamment qu'elles ne proviennent point de Malebranche.

Un reproche plus grave que nous adresserons à l'auteur des *Recherches sur les manuscrits de Fermat*, etc., c'est d'avoir méconnu et rapetissé le caractère de Fermat. Qu'on en juge!

« En général », dit M. Henry, « on s'est fait une conception beaucoup trop idéale du caractère de notre géomètre; on l'a trop considéré à travers ses formules, pas assez dans sa province, dans son Parlement, à travers son milieu; répétant les éloges qui ont été décernés à son désintéressement, à son talent de jurisconsulte, les critiques n'ont pas assez deviné, sous les prudes réticences de l'éloge public, les franchises de la chronique privée. Ainsi on a dit que Fermat quitta fort peu sa patrie; cependant un passage d'une lettre adressée à Roberval nous prouve qu'il est allé à Bordeaux; Mersenne nous le montre à Bergerac; trois de ses lettres imprimées dans le *Commercium epistolicum*, de Wallis, sont datées de Castres; enfin il est mort dans cette ville le 12 janvier 1665. » — « Notre conseiller (Fermat), qui était fort riche en propriétés, à Beaumont de Lomagne, n'a pas manqué de solliciter et d'obtenir les faveurs du chancelier Seguier. C'est ce que prouvent trois lettres extraites de manuscrits autographes de la Bibliothèque Nationale. Grâce à Monsieur de la Chambre, Fermat peut donc être rangé à

côté de Conrart, de Desmarets, de Chapelain, de Gomberville, de Cerisy, de Habert, d'Esprit, de Chaumont, de Priezac, de Ballesdens, etc., parmi les savants qui ont reçu les faveurs de Séguier. » — « Le jugement de Fermat a-t-il été toujours à l'abri de l'exagération quelquefois reprochée à ses compatriotes? » — « L'action directe du milieu se compliquait d'ailleurs chez notre géomètre d'une influence plus générale. La modestie a fait des progrès, au moins des progrès apparents. Les livres d'aujourd'hui n'étalent plus les prétentions de leurs ancêtres. Seul, un charlatan pourrait de nos jours songer aux hyperboles que Descartes voulait inscrire en tête d'un de ses écrits. Seule, une dupe pourrait, à l'exemple de Menelaüs, de Campanus ou de Lucas Pacioli, préconiser comme admirable l'objet de ses études. » — « Il semble aussi que Fermat ait péché par excès de précipitation. » — « A ces faiblesses de caractères (de Fermat) il convient toutefois d'opposer une grande largeur d'intelligence. » etc., etc.

Le cadre du *Bulletin* ne permet pas de relever tous les jugements téméraires et parfois puérils de M. Henry. Qu'on nous permette cependant quelques observations. La *Biographie universelle* de Michaud a dit que Fermat quitta fort peu sa patrie (ce qui est vrai), mais elle n'a pas dit qu'il ne perdit jamais de vue son clocher. Que Fermat soit allé à Bordeaux et à Bergerac, ou à Castres où l'appelait son service de conseiller, délégué à la Chambre de l'Édict, comment cela peut-il montrer qu'on s'est fait une conception beaucoup trop idéale du caractère de Fermat? Qu'on lise les trois lettres de Fermat publiées par M. Henry, et l'on y reconnaîtra le langage, non point d'un solliciteur ou d'un courtisan, mais celui d'un homme bien élevé qui a le sentiment de sa valeur et de sa dignité. M. Henry cite ces paroles du P. de Billy, savant mathématicien jésuite : « Ego correxi D. de Fermatum et ostendi quod si duo minores numeri radicum æquentur majori impossibilis est solutio per ipsius methodum : *quod ipse postea fassus est ingenue se non animadvertisse.* » Aux yeux de M. Ch. Henry, cet aveu de Fermat est une marque de faiblesse de caractère; nous y voyons, nous, tout le contraire. Ce que Fermat dit de Frenicle dont il croyait pourtant avoir à se plaindre : « Pour M. de Frenicle ses inventions en Arithmétique me ravissent, et je vous déclare ingénuement que j'admire ce génie qui, etc. », prouve une rare générosité d'âme. Je passe sous silence les anecdotes d'un goût fort douteux recueillies par M. Henry contre Lagrange, Bézout et Delisle, le maître de Lalande. Disons en finissant ce trop long article que M. Henry n'a pas mieux compris l'originalité des œuvres de Mersenne et la nature des habitudes prétendues *cachottières* (*sic*) d'une époque où l'on travaillait pour ainsi dire en commun, qu'il n'a compris la grande figure de Fermat.

Favaro (*Ant.*). — Intorno ad alcune Notizie inedite, relative a Niccolo Coppernico, raccolte e pubblicate dal Prof. Massimiliano Curtze. (775-807).

En 1874 et en 1875, M. Curtze a publié une collection de Notices sous le titre *Reliquiæ Copernicanæ*. En juin 1877, il lisait à la Société des Sciences et des Arts de Thorn un savant Rapport dont la traduction italienne par le D[r] Sparagna a été insérée dans le t. XI du *Bullettino*, p. 167-171. En 1878, poursuivant ses laborieuses investigations, M. Curtze a fait paraître encore ses *Inedita Copernicana*, publication importante dont il avait soigneusement recueilli les matériaux dans les manuscrits des bibliothèques de Berlin, Frauenbourg, Upsal et Vienne, et aussi dans des livres imprimés ayant appartenu à Copernic et enrichis

de notes écrites de sa propre main. L'examen du livre d'Abou Hassan Ali, intitulé : *Preclarissimus liber completus in indiciis astrorum* (Venise, 1485) a permis à M. Curtze de reconnaître que le grand astronome, tout aussi bien d'ailleurs que Tycho Brahe, Kepler et Galilée, s'était occupé d'astrologie judiciaire. Le principal des écrits inédits de Copernic, signalé par M. Curtze, n'est pas un autographe, c'est une copie. Il a pour titre : *Nicolai Coppernici de hypothesibus motuum cœlestium a se constitutis,* et se trouve dans le volume manuscrit n° 10530 de la Bibliothèque impériale de Vienne. La lettre de Copernic au chanoine Bernard Wapowski, touchant un écrit de Jean Werner intitulé : *De motu octavæ spheræ,* a été publiée dès 1854 et réimprimée en 1873 par MM. Hipler et Prowe, avec notes de ces deux érudits. M. Curtze l'a étudiée dans les deux exemplaires manuscrits qui se voient, l'un à la Bibliothèque royale de Berlin, l'autre à la Bibliothèque impériale de Vienne. Il a recueilli en outre de curieuses informations, à l'aide des notes autographes de Copernic relevées surtout dans quelques livres de la bibliothèque du chapitre de Ermland.

Boncompagni (*Balth.*). — Intorno a due scritti di Leonardo Euler. (808-811).

Dans le cahier de mai 1879 de la *Nouvelle Correspondance mathématique,* de Bruxelles, le savant et sympathique directeur, M. Eug. Catalan, venant à citer un écrit d'Euler intitulé : *Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques,* s'était demandé quelle était la date de la publication de cet écrit et à quel Recueil académique il pouvait bien appartenir. Le prince Balthazar Boncompagni, mieux que personne, pouvait répondre à ces deux questions, et il l'a fait de manière à donner satisfaction non seulement au mathématicien que la Belgique s'honore de compter au nombre de ses plus illustres professeurs, mais encore à tous ceux qui s'intéressent à l'histoire des Sciences mathématiques. Il nous apprend en effet que cet écrit d'Euler fut publié pour la première fois, en 1782, à Middelbourg, dans les *Mémoires de la Société zélandaise des sciences* de Flessingue, et que cette première impression est indiquée dans la liste complète des Ouvrages de L. Euler, publiée à Pétersbourg en 1783, à Bâle en 1786, à Pavie en 1787, et aussi dans un Catalogue des Ouvrages d'Euler publié à Pétersbourg en 1843, et enfin dans les Catalogues de Jean Georges Mensel, 1804, et Poggendorff, 1863. Le Mémoire en hollandais, par Gerard Greeve, que M. Catalan mentionne comme suivant immédiatement le Mémoire d'Euler, n'a pas trait aux Mathématiques; il a pour titre : *Waarneeming van een hoornagtig uitwas gegroeid aan de binnenzijde van de dije,* c'est-à-dire en français : *Observation d'une excroissance cératoïde, poussée au côté interne de la cuisse.*

Dans le cahier de mai 1879 du *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques,* on a donné une lettre de Nicolas Fuss à Condorcet, dont le post-scriptum indiquait un travail d'Euler sur le moyen de rendre rationnelle la formule intégrale $\int \frac{dx\sqrt{1-x^2}}{1-x^4}$. Le prince Balthazar Boncompagni a retrouvé l'observation d'Euler relative à ce point d'Analyse, dans un Mémoire présenté à l'Académie impériale des Sciences de Pétersbourg, le 16 septembre 1776, et publié en 1845 dans le 4e volume du *Calcul intégral* d'Euler.

Genocchi (*Angelo*). — Dimostrazione del quinto postulato di Euclide. Nota del Prof. Vincenzo de Rossi Re (812).

Le célèbre professeur et académicien de Turin prouve en quelques lignes, que cette démonstration du postulatum d'Euclide est défectueuse comme toutes les autres.

Günther (S.). — Invarianti, covarianti e contravarianti delle funzioni omogenee. Nota del P. Giacomo Foglini; Roma, 1879. Article traduit de l'allemand en italien par le Dr Sparagna. (813-814).

S. Günther, après avoir fait ressortir le côté pratique et vulgarisateur du travail de G. Foglini, reconnaît que la science allemande n'a encore rien produit d'équivalent dans ce genre, et exprime le vœu que ce Mémoire soit traduit en allemand.

Tychsen (Camille). — Lagrange, par Camille Tychsen, traduit du danois par le Dr Zeuthen. (815-827).

Ce Mémoire bio-bibliographique de Camille Tychsen sur Lagrange fut publié d'abord en danois dans le *Journal de Mathématiques* dirigé par le savant professeur de l'Université de Copenhague. Il se termine par une liste détaillée des travaux de Lagrange qui sont répandus dans les divers recueils académiques de l'Europe.

Eneström (Gust.). — Lettres inédites de Joseph-Louis Lagrange à Léonard Euler, publiées par Balthazar Boncompagni; Saint-Pétersbourg, 1877. Article traduit du suédois par MM. Leouzon le Duc et Aristide Marre. (828-838).

Ainsi que le fait observer fort judicieusement M. Gustave Eneström, les correspondances entre les savants, écrites à une époque où l'on n'avait point encore de Journaux et de Revues périodiques, sont d'une haute importance pour la connaissance du développement des sciences mathématiques. Dans l'année 1862, dix-huit lettres d'Euler à Lagrange parurent dans l'édition des Œuvres posthumes d'Euler, publiée par les frères Fuss à Pétersbourg; mais aucune lettre de Lagrange à Euler n'avait encore paru lorsque, en 1877, le prince Balthazar Boncompagni publia et reproduisit par la photolithographie onze lettres de Lagrange à Euler. Cette correspondance remonte à 1754; elle se continue en 1755, 1756, 1759, 1760 et 1762 et roule principalement sur le calcul des variations, dont la découverte est constatée dans la lettre de Lagrange du 12 août 1755, la théorie des cordes vibrantes, la théorie de la propagation du son, et l'intégration des équations différentielles partielles.

« L'histoire des Sciences mathématiques », conclut M. Eneström, « doit être reconnaissante au prince Balthazar Boncompagni pour sa précieuse publication. Le noble et savant Mécène a ainsi rendu un nouveau service à cette branche de la Science, à laquelle il applique ses forces avec un succès si éclatant. »

Biadego (J.-B.). — Sulla Memoria inedita di Pietro Maggi, intorno ai principii di meccanica molecolare di Ambrogio Fusinieri. Nota di Giambattista Biadego. (839-846).

Ce Mémoire de Pietro Maggi, qui fait l'objet de cette Notice de Biadego, fut écrit en l'année 1840, à propos d'une longue dissertation sur quelques principes de mécanique moléculaire, insérée par Ambroise Fusinieri dans les *Annales des Sciences du royaume Lombard-Vénitien*. Présenté à l'Académie d'Agriculture, Arts et Commerce de Vérone, dès le 10 décembre de cette même année 1840, il ne fut admis aux honneurs de la lecture en séance publique que le 3 mars 1842, et ne fut point imprimé dans les Mémoires de l'Académie. Il était resté inédit jusqu'au jour où le prince Balthazar Boncompagni lui donna l'hospitalité dans son *Bullettino*.

Maggi (*Pietro*). — Dissertazione intorno ai principii di meccanica molecolare del Dottore Ambrogio Fusinieri. (847-862).

Cette dissertation est une vigoureuse défense des principes de Newton, Volta, Berzelius et Arago contre les attaques de Fusinieri et sa nouvelle théorie de la mécanique moléculaire.

Boncompagni (*Balth.*). — Giunte allo scritto intitolato : *Intorno alle vite inedite di tre matematici* (*Giovanni Danck di Sassonia, Giovanni di Lineriis e Fra Luca Pacioli da Borgo S. Sepolcro*) *scritta da Bernardino Baldi* (*Bullettino*, ecc., tomo XII, p. 352-438. (863-872).

Ces additions sont relatives à Luca Pacioli, et sont empruntées à neuf documents inédits, extraits des archives générales *Dei contratti* de Florence, et remontant, trois à l'année 1497, trois à l'année 1499, et trois à l'année 1500. Le testament de Fra Luca Pacioli, daté du 21 novembre 1511 à Borgo San Sepolcro clôt dignement cet appendice au Mémoire du prince Balthazar Boncompagni.

Wiedemann (*Eilhard*). — Materiali per la storia delle scienze naturali presso gli Arabi, per Eilardo Wiedemann. Traduzione dal tedesco del Dr Alfonso Sparagna. (873-876).

Ce Mémoire du Dr Eilhard Wiedemann parut d'abord en allemand dans les *Annales de Physique et de Chimie de Poggendorff*, années 1876, 1877 et 1878. Il se rapporte principalement à l'Optique, à la détermination des poids spécifiques, à la variation de la pesanteur suivant la variation de la distance au centre de la Terre, à la force de l'aimant, à la réfraction de la lumière.

Bezold (*Wilhem von*). — Materiali per la storia dell' Ottica fisiologica (Ruota de colori e visione binoculare) per Guglielmo von Bezold. Traduzione dal tedesco del Dr Alfonso Sparagna. (877-880).

Le texte original allemand de ce Mémoire fut publié pour la première fois, en 1878, dans les *Annales de Physique et de Chimie de Poggendorff*. Von Bezold y met en lumière certains passages peu connus ou mal observés du célèbre *Traité d'Optique* de Alhazen, mathématicien arabe du XIe siècle de notre ère, publié à Bâle, en 1572, sous le titre : *Opticæ Thesaurus Alhazeni Arabis libri septem*. Enrico Narducci, de Rome, a donné, dans le tome IV du *Bullettino*

(année 1871), une intéressante Notice sur une traduction italienne inédite, faite dans le XIVe siècle, de ce même *Traité d'Optique.*

Gerland (E.). — Sulla storia dell' invenzione dell' areometro per E. Gerland. Traduzione dal tedesco del Dr Alfonso Sparagna. (881-885).

La conclusion de cette instructive Notice, c'est que l'aréomètre ne fut inventé ni par Archimède, ni par Hypathia, mais qu'il fut inventé probablement dans le IVe siècle de notre ère et servit tout d'abord à des usages médicinaux. Dans la lettre de Synésius, évêque de Cyrène, à la savante Hypathia, le passage relatif à cet instrument demeura incompris jusqu'au jour où Fermat en donna la véritable signification. Il faut lire, p. 882 du *Bullettino,* la curieuse Note empruntée par le savant éditeur à Bernard Barcouda, imprimeur du Roy, de la Chambre de l'Edict de la Ville et Diocèse de Castres, et publiée par celui-ci, p. 84-87 d'une traduction d'italien en français du *Traicté de la Mesure des eaux courantes de Benoist Castelli,* imprimé à Castres en 1664). Barcouda s'exprime ainsi au commencement de cette Note : « Les pages qui restent vuides dans ce casier m'ont donné la pensée de les remplir de la belle observation que j'ay apprise ces jours passez, de l'incomparable M. Fermat, qui me fait l'honneur de m'aimer, et de me souffrir souvent dans sa conversation. »

Marre (Aristide). — Deux mathématiciens de l'Oratoire. (886-894).

Ces deux oratoriens sont le P. Claude Jaquemet, professeur à Vienne (Dauphiné), qui eut, au dire du P. Adry, l'historien de l'Oratoire, la réputation d'un des premiers mathématiciens du royaume, et le P. Bizance, l'ami et le compagnon du P. Malebranche à Paris. Après une courte Notice sur chacun de ces deux savants oratoriens, M. Aristide Marre met sous les yeux du lecteur la reproduction fidèle d'une lettre autographe et inédite du P. Jaquemet au P. Bizance, datée de Vienne, 26 janvier 1690. Cette lettre, relative à la théorie des nombres carrés et à une proposition de Fermat sur les nombres polygones de Diophante, est la pièce capitale et la seule autographe, au milieu de toutes ces copies de la correspondance mathématique du P. Jaquemet et du P. Bizance, que M. Ch. Henry a faussement attribuée à Malebranche. Les feuillets numérotés 180 et 181 qui la renferment sont de plus petites dimensions que les autres feuillets du manuscrit 24236 du fonds français de la Bibliothèque nationale (ancien 168 du fonds de l'Oratoire), et M. Henry ne l'a pas aperçue, bien qu'il ait extrait de ce même volume manuscrit plus de soixante pages d'essais mathématiques provenant de la correspondance des PP. Jaquemet et Bizance.

Ajoutons ici que M. Marre a publié dans le *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques* (2e série, t. IV, Ire Partie, p. 200) deux nouvelles lettres mathématiques inédites du P. Jaquemet, retrouvées par le P. Ingold, bibliothécaire actuel de l'Ordre de l'Oratoire. Elles sont adressées de Vienne au P. Reyneau, l'auteur bien connu de l'*Analyse démontrée* et des *Eléments de Mathématiques.* M. Gaston Darboux a fait voir dans une Note que la règle donnée par le P. Jaquemet, dans la première de ces deux lettres, est semblable à celle que l'on attribue à Maclaurin.

Annonces des Ouvrages récemment publiés et des Mémoires insérés

dans les principaux recueils scientifiques de l'Europe. (75-114; 252-298; 439-476; 569-618; 741-774; 895-946).

Indice degli Articoli. (947-748).

Indice dei Nomi. (949-984).

Cet index contient plus de 5000 noms par ordre alphabétique des auteurs mentionnés dans le tome XII du *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Science matematiche e fisiche*, du prince Balthazar Boncompagni.

ARISTIDE MARRE.

PROCEEDINGS OF THE LONDON MATHEMATICAL SOCIETY (¹).

Tome IX; novembre 1877 à décembre 1878.

McColl (H.). — Le calcul des propositions équivalentes et des limites d'intégration. (9-20).

Cet article curieux a pour but l'application des Mathématiques aux opérations logiques.

L'auteur définit une méthode de calcul dans laquelle les symboles A, B, C, ... représentent des propositions. L'équation

$$A = 1$$

exprime que la proposition A est vraie; la fausseté de cette proposition se traduit par l'équation

$$A = 0.$$

Le symbole ABC désigne une proposition composée dont les propositions A, B, C sont dites les facteurs. L'équation

$$ABC = 1$$

exprime que les propositions-facteurs sont vraies toutes les trois. L'équation

$$ABC = 0$$

exprime que l'une au moins est fausse; en d'autres termes, qu'elles ne peuvent pas être vraies toutes les trois.

Le symbole $A + B + C$ désigne une proposition indéterminée dont A, B, C sont les termes. L'équation

$$A + B + C = 0$$

(¹) Voir *Bulletin*, II_1, 145.

exprime que les trois propositions sont fausses. L'équation

$$A + B + C = 1$$

exprime qu'elles ne le sont pas toutes, que l'une au moins est vraie. Ces définitions sont indépendantes du nombre des propositions.

L'auteur désigne par A′ le contraire de la proposition A. On a donc, en vertu des définitions précédentes,

$$A + A' = 1, \qquad AA' = 0.$$

L'auteur montre que la règle de la multiplication algébrique s'applique aux propositions indéterminées; il introduit encore quelques autres symboles dans le détail desquels il serait trop long d'entrer. Comme application de son nouveau calcul il traite les deux questions suivantes :

1° Quelle est la probabilité pour que les racines de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

soient réelles, les nombres a, b, c étant compris entre 0 et A, et toutes leurs valeurs ayant la même probabilité? Le résultat est

$$\frac{5}{36} + \frac{1}{6}\, l.2.$$

2° Intervertir l'ordre des intégrations dans l'intégrale multiple

$$\int_{-a}^{2a} du \int_{-u}^{2u} dx \int_{-x}^{2x} dy \int_{-2x}^{\frac{y^2}{2x}} \varphi(u, x, y, z)\, dz.$$

Rayleigh (Lord). — Sur les ondes progressives. (21-26).

Clifford. — Note sur le mouvement tourbillonnaire. (26-27).

Le problème peut être énoncé ainsi : « On donne en chaque point la dilatation et la rotation. Il s'agit de déterminer la vitesse de translation ». L'auteur fait connaître une solution de ce problème reposant sur l'emploi des quaternions.

Clifford. — Sur la triple génération de la courbe des trois barres (courbe de Watt). (27-28).

Démonstration géométrique du théorème relatif à cette triple génération.

Clifford. — Sur le centre de gravité d'un octaèdre. (28).

Voici la règle donnée par l'auteur : Soient dans l'espace trois droites af, bg, ch. Leurs sommets déterminent un octaèdre. Considérons les quadrilatères $bcgh$, $cahf$, $afbg$. Les plans passant par les milieux de ces quadrilatères se coupent en un point k.

Désignons par m le centre de gravité du triangle formé par les milieux de af, bg, ch. Le centre g se trouve sur la droite mk et au milieu de cette droite.

Cayley (A.). — Sur les fonctions θ doubles. (29-30).

M. Cayley donne un aperçu de ses recherches publiées depuis *in extenso* dans

le *Journal de Borchardt*, t. LXXXV, p. 214, et il explique que sa méthode relative aux fonctions θ doubles s'applique sans modification au cas des fonctions elliptiques.

Cayley (A.). — Sur la représentation géométrique des variables imaginaires par une correspondance réelle entre deux plans. (31-39).

Considérons deux variables imaginaires

$$u = x + yi, \quad v = x' + y'i,$$

liées par une relation algébrique de degré m en u, n en v. Si l'on représente ces variables par deux points P, P' pris dans deux plans Π, Π', on aura ainsi établi une correspondance (m, n) entre les points de ces deux plans. Dans un travail antérieur l'auteur avait étudié un cas particulier. Il examine ici une question générale relative à ce mode de correspondance. En général, quand le point P décrit une petite courbe ovale et revient à sa position primitive, il en est de même des points correspondants. L'auteur examine comment se modifie cette proposition quand l'ovale grandit ou qu'il est décrit autour d'un des points V auxquels correspondent deux points P' confondus.

Tanner (H.-W.-L.). — Sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre contenant plusieurs fonctions inconnues. (41-65).

L'auteur considère une ou plusieurs équations contenant des fonctions $y_1, \ldots, y_n$ de m variables $x_1, \ldots, x_m$, et il montre d'abord que tout système de telles équations peut être ramené à une forme normale qu'il définit comme il suit : chaque équation ne contiendra que des déterminants jacobiens de la forme

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n})};$$

elle sera algébriquement homogène par rapport à ces déterminants, les coefficients ne dépendant que des variables x_i.

Chaque système avec n fonctions et m variables indépendantes peut être ramené à cette forme canonique, si l'on porte le nombre des variables indépendantes à $m + n$.

Après avoir établi ce résultat, l'auteur considère exclusivement les équations dont la forme canonique est du premier degré et peut s'écrire

$$\Sigma P_\alpha \frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n})} = 0.$$

Il cherche d'abord dans quel cas une équation de ce genre peut être ramenée à la forme

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n, u_{n+1}, \ldots, u_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)} = 0$$

que l'on sait intégrer. Il faut pour cela que les coefficients P satisfassent à certaines conditions. Quand ces conditions seront remplies, les fonctions u seront déterminées par un système d'équations linéaires simultanées.

L'auteur traite ensuite l'équation linéaire à deux termes qui peut toujours, en vertu d'un théorème bien connu sur les déterminants fonctionnels, se ramener à la forme

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = P,$$

où P dépend des x, y.

Enfin le Mémoire se termine par l'étude d'une classe d'équations que l'on peut aisément ramener à la forme simple

$$\Sigma P_{\alpha\beta} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta} = 0.$$

Rayleigh (*Lord*). — Sur la relation entre les fonctions de Laplace et de Bessel. (61-64).

L'auteur montre comment les fonctions de Bessel se déduisent de celles de Laplace par le passage à la limite, qui permet aussi d'obtenir les formules récurrentes entre les fonctions de Bessel.

Roberts (*S.*). — Sur les normales aux coniques. (65-75).

Exposition à un point de vue nouveau de différentes propriétés des normales et en particulier des normales menées d'un point à une conique.

Tanner (*H.-W.-L.*). — Sur une méthode générale d'intégration des équations aux dérivées partielles. (76-92).

Étant donnée une équation du premier ordre

$$F(z, p_1, \ldots, p_n; x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

on sait que le problème de son intégration peut s'énoncer ainsi : « Trouver n relations entre les variables z, x_i, p_h, permettant de satisfaire à l'identité

$$dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n = 0. \text{ »}$$

L'auteur généralise ce point de vue et l'étend aux équations de degré supérieur à un nombre quelconque de variables indépendantes.

Lamb (*H.*). — Sur les conditions pour le mouvement permanent d'un fluide. (76-77).

L'auteur donne ces conditions et en fait des applications.

Maxwell (*Clerk*). — Sur la capacité électrique d'un long cylindre mince et d'un disque de sensible épaisseur. (94-101).

Si l'on désigne par E la charge totale du corps, par ψ_0 la valeur du potentiel à l'intérieur, par Q_0 l'énergie potentielle et par K la capacité du conducteur, on a

$$Q_0 = \tfrac{1}{2}\psi_0 E, \qquad E = K\psi_0,$$

et, par conséquent,

$$K = \frac{1}{2}\frac{E^2}{Q_0}.$$

Comme Q_0 est la plus petite valeur qui corresponde à toutes les distributions possibles de la charge, on a toujours

$$K > \frac{1}{2}\frac{E^2}{Q},$$

Q étant l'énergie potentielle correspondant à une distribution quelconque de la charge.

D'après cela, on peut obtenir pour K des valeurs approchées en étudiant une loi de distribution de l'électricité à la surface du corps, qui permette de faire le calcul de Q. Si le corps est, par exemple, un cylindre long et mince de longueur l et de rayon b, on peut supposer la densité constante, et l'on obtient

$$K > \frac{1}{\log \frac{2l}{b} - 1}.$$

L'auteur étudie encore une autre loi dans laquelle la densité est exprimée par une somme de fonctions harmoniques.

L'auteur applique une méthode analogue à un disque mince de rayon a et d'épaisseur b. Il suppose que l'électricité soit distribuée sur les deux faces du disque comme si le disque était infiniment mince, et il obtient la formule

$$K > \frac{2a}{\pi - \frac{b}{a}\left(1 + \frac{b^4}{a^4}\right)\log\left(1 + \sqrt{\frac{a}{b}}\right)};$$

ou, si $\frac{b}{a}$ est très petit,

$$K \neq \frac{2}{\pi}\left(a + \frac{b}{2\pi}\log\frac{a}{b}\right).$$

Minchin. — Sur l'équilibre astatique. (102-118).

Si un corps solide est en équilibre sous l'action des forces appliquées en différents points de ce corps, il peut demeurer en équilibre si l'on déplace le corps sans changer les points d'application, la grandeur et la direction des forces. L'étude de tels déplacements donne naissance à une théorie qui est maintenant bien connue. L'auteur montre comment on peut la traiter en employant les quaternions, qui s'y appliquent avec élégance.

Leudersdorf (C.). — Sur certaines extensions du théorème de Frullani. (118-122).

Ce travail se rapporte à des généralisations de la formule intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(ax) - \varphi(bx)}{x}\,dx = l\frac{a}{b}\,[\varphi(\infty) - \varphi(0)].$$

Si l'on pose

$$(a) = \int_0^\infty \frac{\varphi(ax)\,dx}{x}, \quad (ab) = \int_0^\infty\int_0^\infty S(ax, by)\,\frac{dx\,dy}{xy}, \quad \dots,$$

$S(p, q, \dots)$ désignant une fonction symétrique des lettres p, q, ..., qui ne devient jamais infinie pour des valeurs positives de ces lettres, les propositions

de l'auteur se rapportent à la différence

$$(a_1 a_2 \ldots a_n) - (a'_1 a'_2 \ldots a'_n).$$

Klein (F.). — Sur la transformation des fonctions elliptiques. (123-126).

Aperçu des recherches de l'auteur, qui sont bien connues des lecteurs du *Bulletin.*

Cayley (A.). — Sur la théorie des groupes. (126-133).

Si l'on désigne toutes les substitutions d'un groupe par des lettres différentes, on peut construire une Table à double entrée qui donne le produit de deux substitutions quelconques du groupe. On forme ainsi un carré dans lequel les substitutions qui font dériver une ligne quelconque de la première forment un groupe isomorphe au groupe donné. M. Cayley étudie les relations entre ces deux groupes, en considérant plus spécialement le cas où les substitutions sont régulières. Il emploie, notamment, dans ce but, une suite de polygones diversement colorés et dont les côtés sont parcourus dans un ordre déterminé.

Kempe (A.-B.). — Sur les systèmes articulés à quatre pièces. (133-149).

Nous avons déjà donné, dans le *Bulletin,* des indications sur le problème traité par M. Kempe. C'est celui qui a été étudié par M. Darboux.

Halphen (G.). — Sur la théorie des caractéristiques pour les coniques. (149-170).

M. Halphen se propose de donner ici un aperçu des recherches qu'il a publiées sur cet intéressant sujet (*Comptes rendus,* t. LXXXIII, p. 537 et 886). Les recherches relatives aux caractéristiques reposaient, comme on sait, sur le théorème suivant : *Le nombre des coniques d'un système* $\Sigma(\mu, \nu)$ *qui satisfont à une condition simple donnée* Z *est toujours de la forme* $\alpha\mu + \beta\nu$.

Les travaux de M. Halphen ont montré que cette proposition n'est pas toujours exacte. M. Chasles n'avait considéré que deux espèces de coniques dégénérées, la conique réduite à deux droites distinctes et celle qui se réduit à deux points distincts. La première est coupée en deux points distincts par une droite quelconque, la seconde admet deux tangentes distinctes passant par un point. M. Halphen montre qu'il y a lieu de considérer une troisième conique dégénérée, formée de deux points confondus sur une droite double. Toutes les fois qu'un système présentera de telles coniques, le théorème énoncé plus haut pourra être en défaut.

Les recherches de M. Halphen reposent sur la considération de deux courbes, l'une attachée au système et l'autre attachée à la considération. Elles ont été publiées *in extenso* dans le *Journal de l'École Polytechnique* (XLVe Cahier).

Monro (C.-J.). — Sur la flexion des espaces. (171-177).

L'auteur démontre le théorème suivant : *Désignons par flexion toute transformation de l'espace dans laquelle la plus courte distance de deux points*

demeure invariable : un espace à n dimensions peut subir en général une flexion dans un espace à $n+n'$ dimensions, pourvu que l'on ait $n' > \frac{1}{6}n(n-1)$.

McColl (*H.*). — Sur le calcul des propositions équivalentes (second Mémoire). (177-187).

Addition au travail dont nous avons rendu compte plus haut. L'auteur définit le symbole A:B et ajoute plusieurs règles à celles qu'il a fait connaître. Il donne, en particulier, une interprétation géométrique.

Roberts (*S.*). — Sur la décomposition de certains nombres en une somme de deux carrés par l'emploi des fractions continues. (187-196).

Si l'on a

$$D = (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2), \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1,$$

et que l'on prenne

$$P = E\left(\frac{2\beta\delta}{\beta^2+\delta^2}E\sqrt{D}\right) + 1,$$

$$Q = E\left(\frac{\beta^2-\delta^2}{\beta^2+\delta^2}E\sqrt{D}\right) + 1,$$

on aura soit

$$D = P^2 + Q^2,$$

soit

$$D = P^2 + (Q-1)^2.$$

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Forme généralisée de certaines séries. (197-202).

L'auteur fait connaître plusieurs conséquences de l'équation identique

$$\left[1 + \frac{p}{p}x + \frac{p(p+2)}{p(p+1)}\frac{x^2}{2!} + \frac{p(p+2)(p+4)}{p(p+1)(p+2)}\frac{x^3}{3!} + \ldots\right]e^{-x}$$
$$= 1 + \frac{1}{p+1}\frac{x}{2} + \frac{1}{(p+1)(p+3)}\frac{x^4}{2^2.2!} + \frac{1}{(p+1)(p+3)(p+5)}\frac{x^6}{2^3.3!} + \ldots.$$

Rawson (*R.*). — Sur une nouvelle méthode de détermination des différentielles résolvantes des équations algébriques. (202-221.)

On désigne sous le nom de *différentielle résolvante* de l'équation $\varphi(x,y) = 0$ l'équation différentielle linéaire qui détermine une racine quelconque y de l'équation algébrique considérée comme fonction de x. Cette théorie a d'abord été considérée par M. J. Cockle dans un article publié en 1860 dans le *Philosophical Magazine;* elle a été beaucoup accrue par les travaux de M. R. Harley, publiés dans les *Proceedings of Manchester,* t. II, p. 181-184, 199-203, 237-241. L'auteur auquel nous empruntons ces indications cite encore les travaux suivants sur le même sujet, publiés dans le même Recueil :

Cayley (*A.*). — Note sur une équation différentielle.

Spottiswoode (*W.*). — Note sur les différentielles résolvantes.

Harley (*R.*). — Sur une certaine classe d'équations différentielles linéaires.

Russel (*W.-H.-L.*). — Sur la solution de la différentielle résolvante.

L'auteur cite encore différents travaux publiés dans d'autres Recueils. Puis, en se servant du théorème de Murphy, il fait connaître une nouvelle méthode de former la résolvante différentielle. Soient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ les racines de l'équation

$$\varphi(x, y) = 0,$$

supposée du degré m en y; si l'on développe suivant les puissances descendantes de y

$$\log \frac{\varphi}{y^s} = \sum \frac{u_n}{y^n},$$

on aura, d'après le théorème de Murphy,

$$u_n = -\frac{1}{n}(\beta_1^n + \beta_2^n + \ldots + \beta_s^n),$$

$\beta_1, \ldots, \beta_s$ désignant s racines de l'équation.

Cette formule est appliquée à l'équation particulière

$$\varphi = y^m + ay^r + bx = 0.$$

Par des différentiations l'auteur parvient, dans ce cas, aux deux relations suivantes :

$$u'_{n+r} = -\frac{bm}{a(m-r)}\left(xu'_m - \frac{n}{m}u_n\right),$$

$$u'_{n+m} = \frac{br}{m-r}\left(xu'_n - \frac{n}{r}u_n\right),$$

et l'on voit facilement que l'on pourra déduire de là une équation différentielle pour u_n, équation qui sera absolument indépendante de s, et, par conséquent, à laquelle satisferont les $n^{\text{ièmes}}$ puissances de toutes les racines. Si l'on pose $n = 1$, on a la résolvante cherchée. L'auteur effectue le calcul de cette résolvante pour certains cas particuliers.

Le travail est suivi d'une Note rédigée par M. Harley où les mêmes résultats sont établis par une méthode qui n'emploie pas le théorème de Murphy et dont le principe est dû à M. Cayley. De plus, M. Harley donne, par l'emploi du calcul symbolique, le développement de la résolvante différentielle de l'équation considérée par M. Rawson, quelles que soient les valeurs de m et de r.

Kennedy (*A.-B.-W.*). — Note sur la solution géométrique de plusieurs problèmes de Statique qui se présentent dans la théorie des mécanismes. (221-225).

L'auteur se propose le problème suivant : *Étant donné un système plan*

articulé, une force agit sur une des tiges : trouver la construction d'une force agissant sur une autre tige et dans une direction déterminée, et qui maintienne le mécanisme en équilibre. L'auteur considère d'abord le cas simple d'un système formé de quatre tiges. Il montre que l'on peut toujours remplacer ce système par un autre qu'il propose d'appeler « mécanisme virtuel », et qui conduit à une solution géométrique simple de la question proposée.

Walker (*J.-J.*). — D'une méthode générale dans l'analyse des courbes planes. (226-242).

L'auteur étudie un opérateur ternaire qui se présente dans l'étude de différentes questions relatives à l'intersection d'une courbe et de plusieurs droites, et il applique sa méthode à l'étude d'un problème relatif aux courbes du quatrième ordre, à savoir la détermination des points où la courbe est coupée par ses tangentes d'inflexion.

Smith (*H.-J.-S.*). — Sur les singularités des équations et des courbes modulaires. (242-272).

L'objet de cet important travail est la recherche des singularités caractéristiques de l'équation modulaire

$$F(p, q, 1) = 0,$$

où q est le carré du module d'une fonction elliptique donnée, p le carré du module transformé pour une transformation primaire de degré impair N, et l'étude de la courbe modulaire C qu'on obtient en remplaçant p, q par $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$ dans l'équation précédente, ce qui donne l'équation homogène

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Désignons par P, Q, R les sommets du triangle $\alpha\beta\gamma$, par S le point $\alpha = \beta = \gamma$.

La méthode de recherche suivie par l'auteur a été déjà donnée dans ses travaux antérieurs, par exemple, dans une Note « Sur les équations modulaires », communiquée à l'Institut et imprimée en 1877 dans les *Atti d. Acc. d. Lincei.*

M. Smith considère d'abord le cas où N ne contient aucun diviseur carré, puis il considère le cas opposé. Voici un aperçu général des résultats :

Soient g, g' deux diviseurs conjugués de N, h^2 le plus grand carré contenu dans N; η le plus grand commun diviseur de g et de g', $f(\eta)$ le nombre des entiers égaux ou inférieurs à η et premiers à η; soient, en outre, $f'(g)$, $f'(g')$ définies par les équations

$$\frac{f'(g)}{g} = \frac{f(\eta)}{\eta} = \frac{f'(g')}{g'},$$

$$2\nu = \Sigma f(\eta), \qquad A + B = \Sigma f'(g), \qquad A_2 + B_2 = (A + B)^2,$$

la somme Σ s'étendant à tous les diviseurs de N, et A étant la somme des quantités $f'(g)$ pour lesquelles $g > \sqrt{N}$ [et, en même temps, si $N = \theta^2$, de $\frac{1}{2}f'(\theta)$], et A_2 contenant tous les termes du produit $\Sigma f'(g_1)$, $f'(g_2)$ pour lesquels $g_1 g_2 > N$ et la moitié de tous les termes pour lesquels $g_1 g_2 = N$. Désignons par m, n, K, J, D, T, H l'ordre, la classe, le nombre des points de rebroussement, d'inflexion, l'ordre et la classe du discriminant, et le genre de

la courbe. Ces caractéristiques satisfont aux équations

$$
\begin{aligned}
m &= 2\,\mathrm{A},\\
n &= 3\,\mathrm{A} - \mathrm{B} - \theta',\\
\mathrm{H} &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{A} + \mathrm{B}) - 3\nu + 1,\\
\mathrm{K} &= 2(\mathrm{A} + \mathrm{B}) - 6\nu + \theta',\\
\mathrm{J} &= 5\,\mathrm{A} - \mathrm{B} - 6\nu - 2\theta',\\
\mathrm{J} - \mathrm{K} &= 3\,\mathrm{A} - 3\,\mathrm{B} - 3\theta',\\
\mathrm{D} &= 4\,\mathrm{A}^2 - 5\,\mathrm{A} + \mathrm{B} + \theta',\\
\mathrm{T} &= (3\,\mathrm{A} - \mathrm{B} - \theta')^2 - 5\,\mathrm{A} + \mathrm{B} + \theta,\\
\mathrm{T} - \mathrm{D} &= (2\,\mathrm{A} - \mathrm{B} - \theta')^2 - 4\,\mathrm{A}^2.
\end{aligned}
$$

Nous renverrons, pour les autres résultats qui concernent la nature des branches passant aux sommets du triangle de référence, au Mémoire de l'auteur.

Tome X; 1878-1879.

Rayleigh (*Lord*). — Sur l'instabilité des jets. (4-13).

L'auteur recherche quels sont les écarts à partir de la position d'équilibre qui se produisent dans un jet de fluide sous l'influence d'une perturbation donnée. Dans la première Partie il considère le cas où les forces perturbatrices sont de nature statique comme la capillarité et où l'on peut, par conséquent, faire abstraction de la translation de la masse entière du fluide. Dans la deuxième, il considère les perturbations qui se produisent dans les mouvements discontinus d'un fluide. Il considère le cas où, à l'intérieur d'un fluide, il existe une surface de séparation plane ou cylindrique telle, que de part et d'autre de cette surface les vitesses soient différentes pendant que la pression est la même. L'auteur étudie le cas où les forces perturbatrices modifient légèrement cette surface de séparation.

Crofton. — Sur les frameworks à six nœuds. (13-17).

L'auteur s'occupe d'une question très intéressante : si l'on considère n points, on sait qu'il faudra les relier par $2n - 3$ barres pour constituer un système solide; si ce système est soumis à l'action de n forces agissant sur les points et se faisant équilibre, en général, les tensions des $2n - 3$ barres seront déterminées. On peut le reconnaître directement; chaque point donne naissance à deux équations d'équilibre : on obtient ainsi $2n$ équations contenant comme inconnues les $2n - 3$ tensions. L'élimination de ces tensions donne en général les trois équations d'équilibre auxquelles doivent satisfaire les forces agissant dans un plan solide, et les équations se réduisent, toutes les fois que ces équations sont satisfaites, à $2n - 3$ équations du premier degré déterminant les tensions. Cela posé, l'auteur signale un cas exceptionnel où les $2n - 3$ équations ne pourraient pas déterminer les tensions et où par conséquent il y aurait plus de trois équations d'équilibre. Il est aisé de reconnaître que ce cas exceptionnel est caractérisé par la propriété que le système demeurerait en équilibre si l'on attribuait des tensions convenables aux barres dont il est composé.

Il est aisé de voir que ce cas exceptionnel ne se présente pas pour un nombre

de points inférieurs à 6. Mais M. Crofton donne deux exemples différents de systèmes à six points dans lesquels il se présente. Dans l'un de ces exemples, les six points doivent être sur une conique; dans l'autre, les droites qui joignent deux à deux, d'une certaine manière, les six points doivent concourir en un même point.

McColl (*H*). — Sur le calcul des propositions équivalentes (troisième Mémoire). (16-28).

Nous avons déjà fait connaître le but des recherches que l'auteur continue à développer dans ce travail.

Roberts (*S.*). — Sur des formes de nombres déterminées par la théorie des fractions continues. (29-41).

Dans sa dissertation inaugurale, *De æquationibus secundi gradus indeterminatis,* Göpel a beaucoup étendu la théorie de Legendre relative aux nombres premiers de la forme $4m+1$, en montrant que la théorie des fractions continues se prête à l'étude de la décomposition des nombres premiers de la forme $8m+3$ ou de leur double en un carré et le double d'un carré, de celle des nombres premiers de la forme $8m+7$ ou de leur double dans la différence entre un carré et le double d'un carré. Dans son Rapport sur la théorie des nombres (*British Association Reports,* 33e meeting), M. Smith a beaucoup généralisé ces théorèmes de Göpel. M. Roberts continue l'étude de ce sujet et indique de très nombreuses applications des considérations qu'il a développées dans le Mémoire paru au tome précédent des *Proceedings.*

Cayley (*A.*). — Théorème relatif aux fonctions elliptiques. (43-48).

Ce théorème est exprimé par l'équation suivante :

Si l'on a

$$u+v+r+s=0,$$

on aura aussi

$$-k'^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s + \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s - \frac{1}{k^2} \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s = -\frac{k'^2}{k^2}.$$

M. Cayley indique comment il y avait été conduit par l'étude des coordonnées elliptiques et il signale en même temps l'équation générale suivante, qui lui a été communiquée par M. Glaisher :

$$\begin{aligned} &-k'^2 \operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\operatorname{sn}(\gamma+\delta)\operatorname{sn}(\gamma-\delta) \\ &+\operatorname{cn}(\alpha+\beta)\operatorname{cn}(\alpha-\beta)\operatorname{cn}(\gamma+\delta)\operatorname{cn}(\gamma-\delta) \\ &-\frac{1}{k^2}\operatorname{dn}(\alpha+\beta)\operatorname{dn}(\alpha-\beta)\operatorname{dn}(\gamma+\delta)\operatorname{dn}(\gamma-\delta) \\ &=-\frac{k'^2}{k^2}-\frac{2k'^2(\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\gamma)(\operatorname{sn}^2\beta-\operatorname{sn}^2\delta)}{(1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\beta)(1-k^2\operatorname{sn}^2\gamma\operatorname{sn}^2\delta)}. \end{aligned}$$

Greenhill (*A.-G.*). — Sur les coefficients d'induction et de capacité de deux sphères électrisées. (48-55).

On considère deux sphères dont l'une est isolée et l'autre en communication avec le sol. L'auteur commence par définir ce qu'il faut entendre par coefficients d'induction et de capacité. Il en donne ensuite différentes expressions où figure le quotient différentiel d'une série hypergéométrique généralisée. Il montre, en terminant, que ses formules peuvent se transformer dans les expressions données par Poisson au moyen d'intégrales définies.

Tanner (H.-W.-Lloyd). — Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre contenant plusieurs fonctions inconnues. (55-74).

Ce travail se rattache à celui qui a été publié par l'auteur dans le volume précédent. Le système le plus simple considéré par l'auteur se compose de l'unique équation

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial z_m}{\partial x_m} = 0,$$

dont l'intégrale générale est donnée par la formule

$$z_i = (-1)^{i+1} \frac{\partial(y_1, \ldots, y_{n-1})}{\partial(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)},$$

où les $y_1, \ldots, y_n$ sont des fonctions entièrement arbitraires. M. Tanner considère ensuite un autre système

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z_{12}}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial(z_{1n})}{\partial x_n} &= 0,\\
\frac{\partial z_{21}}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial z_{2n}}{\partial x_n} &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\
\frac{\partial(z_{n1})}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial z_{n,n-1}}{\partial x_{n-1}} &= 0,
\end{aligned}$$

auquel il faut joindre les relations finies

$$z_{ik} + z_{ki} = 0, \quad z_{ik} z_{lm} + z_{il} z_{mk} + z_{im} z_{kl} = 0,$$

qui ne laissent subsister que $2n - 3$ fonctions inconnues et dont l'intégrale la plus générale est donnée par les formules

$$z_{ik} = (-1)^{i+k+1} \frac{\partial(y_1, \ldots, y_{n-2})}{\partial(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)}.$$

L'auteur considère ensuite des systèmes de même nature que les précédents, mais un peu plus généraux, et il établit des propositions analogues à celles que nous venons de citer.

Halphen (G.). — Sur le nombre des coniques qui, dans un plan, satisfont à cinq conditions projectives et indépendantes entre elles. (76-87).

L'auteur applique ses recherches sur la théorie des caractéristiques à la solution de la question énoncée dans le titre du Mémoire. Il montre d'abord qu'une condition quelconque est équivalente à la somme d'un nombre limité de condi

tions élémentaires; en sorte que le problème est ramené au suivant : Trouver le nombre des coniques qui satisfont à cinq conditions élémentaires.

Toute condition élémentaire, pour la définition de laquelle nous renvoyons au Mémoire de M. Halphen, est caractérisée par deux entiers positifs p et q. Cela posé, voici le théorème qui résume les recherches de l'auteur :

Soient cinq conditions élémentaires (p, q), (p', q'), (p'', q''), $p''', q''')$, $(p^{\text{iv}}, q^{\text{iv}})$, *rangées de telle sorte que l'on ait*

$$\frac{p}{q} < \frac{p'}{q'} < \frac{p''}{q''} < \frac{p'''}{q'''} < \frac{p^{\text{iv}}}{q^{\text{iv}}}.$$

Le nombre des coniques qui satisfont à ces cinq conditions est, dans tous les cas,

$$A = 8(2q+p)(2q'+p')(q''+p'')(q'''+2p''')(q^{\text{iv}}+2p^{\text{iv}}).$$

Smith (H.-J.-S.). — Note sur l'équation modulaire relative à la transformation du troisième ordre. (87-91).

Dans son Mémoire du Volume précédent, M. Smith avait montré que, si l'on pose

$$x = \frac{(1-k^2+k^4)^3}{k^4(1-k^2)^2}, \quad y = \frac{(1-\lambda^2+\lambda^4)^3}{\lambda^4(1-\lambda^2)^2},$$

on a, entre x et y, une équation du troisième ordre dont il avait donné le développement. M. Smith montre ici comment il a été conduit à ce résultat et comment il a calculé les coefficients numériques de l'équation.

Smith (H.-J.-S.). — Note sur la formule relative à la multiplication de quatre fonctions θ. (91-100).

M. Smith, dans le t. I des *Proceedings,* avait écrit cette formule sous la forme suivante. Si l'on pose

$$\theta_{\mu,\mu'}(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{m\mu'} q^{\frac{1}{4}(2m+\mu)^2} e^{i(2m+\mu)x},$$

on aura

$$\begin{aligned} 2\,\theta_{\mu_1,\mu'_1}(x_1)\,\theta_{\mu_2,\mu'_2}(x_2)\,\theta_{\mu_3,\mu'_3}(x_3)\,\theta_{\mu_4,\mu'_4}(x_4) &= \prod_{j=1}^{j=4} \theta_{\sigma-\mu_j,\,\sigma'-\mu'_j}(s-x_j) + \prod_{j=1}^{j=4} \theta_{\sigma-\mu_j,\,\sigma'-\mu'_j+1}(s-x_j) \\ &+ (-1)^{\sigma'} \prod_{j=1}^{j=4} \theta_{\sigma-\mu_j+1,\,\sigma'-\mu'_j}(s-x_j) + \prod_{j=1}^{j=4} \theta_{\sigma-\mu_j+1,\,\sigma'-\mu'_j+1}(s-x_j), \end{aligned}$$

s, σ, σ' désignant les quantités définies par les équations

$$\begin{aligned} 2s &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\ 2\sigma &= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4, \\ 2\sigma' &= \mu'_1 + \mu'_2 + \mu'_3 + \mu'_4. \end{aligned}$$

L'auteur déduit de cette formule générale onze formules particulières. Il les applique ensuite aux fonctions Al.

En terminant, il fait connaître la formule relative aux fonctions θ multiples, qui est analogue à la précédente.

Walker (J.-J.). — Preuve par les quaternions du théorème de Minding. (100-101).

Tait (P.-G.). — Démonstration par les quaternions du même théorème. (101-103).

Il s'agit ici du théorème énoncé en 1835, dans le *Journal de Crelle*, relativement aux faces appliquées à un corps dont l'orientation change.

Cockle (J.). — Sur les équations différentielles, totales et partielles; sur un nouveau cas soluble des premières et un cas exceptionnel des secondes. (105-120).

Ce travail traite de questions très variées. Nous signalerons en particulier la suivante. Si l'on considère l'expression

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

elle admettra trois facteurs différents suivant que l'on supposera x, y ou z constants.

L'auteur étudie les relations entre ces trois facteurs et il est ainsi conduit à deux fonctions qu'il propose de nommer *discriminoïdes*.

Dickson (J.-D.-H.). — Discussion de deux séries doubles servant au calcul du nombre des termes de déterminants d'une certaine forme. (120-122).

Si l'on désigne par $u_{n,r}$ le nombre des termes dans un déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre dont la colonne principale contient r zéros, on aura

$$u_{n,r} = (n-r)\,u_{n-1,r-1} + (r-1)\,u_{n-1,r-2},$$
$$u_{n,r} = u_{n,r+1} - u_{n-1,r}.$$

Ces formules permettent de calculer $u_{n,r}$. Le travail contient les résultats dans une Table à double entrée.

Clifford (W.-K.). — Note sur l'usage des fonctions de nombres alternés pour la détermination des invariants et des covariants des formes homogènes en général. (124-129). — Sur les sommes binaires de variables alternées. (214-221).

Ces deux Mémoires contiennent des propositions tirées par M. Spottiswoode des papiers qu'a laissés le regretté Clifford. Les nombres alternés dont il est question sont ceux qui ont été étudiés par Grassmann, Cauchy, etc., et dont le calcul est régi par les équations suivantes :

$$\alpha_i^2 = 0, \quad \alpha_i\alpha_k + \alpha_k\alpha_i = 0, \quad \alpha_1\alpha_2 \ldots = 1,$$

qui permettent de décomposer tout déterminant en facteurs linéaires.

D'après cela, si l'on considère des formes linéaires par rapport à plusieurs séries de variables, il suffira de les multiplier pour obtenir leurs invariants simultanés, ceux qui correspondent à des substitutions linéaires indépendantes effectuées sur les variables de chaque série.

Hirst (A.). — Note sur les complexes engendrés par deux plans corrélatifs. (131-143).

Ce travail fait suite à celui qui a été inséré dans le t. V des *Proceedings.* L'auteur y étudie le complexe du second degré que l'on obtient si, considérant deux plans corrélatifs, on joint un point A de l'un des plans à un point quelconque de la droite a qui correspond à ce point A dans l'autre plan. On obtient ainsi des droites appartenant à un complexe du second degré; mais à un complexe très particulier dont la surface des singularités se décompose en deux surfaces du second degré dont l'une est formée des deux plans considérés. L'auteur examine complètement toutes les propriétés du complexe dans leurs relations avec les deux plans d'où on l'a déduit.

Cayley (A.). — Sur un théorème relatif aux figures en relation conforme. (143-146).

Quand deux figures planes se correspondent point par point, à un élément ds de l'une des figures correspond un élément ds' de l'autre.

En augmentant ds dans le rapport $\frac{ds'}{ds}$ et en le faisant tourner de l'angle entre ds' et ds, on obtiendrait un élément égal et parallèle à ds'.

M. Cayley cherche dans quel cas l'extension et la rotation à faire subir à l'élément ds seront les mêmes pour tous les éléments ayant leur origine en un point et il trouve que cela a lieu dans le cas où la relation entre les deux points équivaut à une équation

$$f(r, r') = 0,$$

entre deux variables imaginaires

$$z = x + yi, \quad z' = x' + y'i.$$

Routh (E.-J.). — D'une méthode pour construire, par l'analyse, des fonctions X, Y, ... qui possèdent la propriété exprimée par l'équation $\int XY\, d\sigma = 0$, et qui sont telles qu'une fonction donnée peut être développée en une série de la forme

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z + \ldots.$$

(146-167).

L'auteur étudie un problème d'Algèbre qui peut être considéré comme la généralisation de celui que l'on rencontre dans l'étude des surfaces du second degré, quand on cherche à déterminer le système de diamètres conjugués commun à deux surfaces du second degré de même centre.

Soient

$$V = A_1^2 X_1^2 + \ldots + A_n^2 X_n^2,$$

$$V = a_1 X_1^2 + \ldots + b_1 (X_2 - X_1)^2 + b_2 (X_3 - X_2)^2 + \ldots + b_{n-1} (X_n - X_{n-1})^2.$$

deux formes quadratiques; le système d'équations

$$(1) \qquad \frac{\partial U}{\partial X_i} = p \frac{\partial V}{\partial X_i}$$

détermine conjointement avec l'équation

$$V = H^2,$$

où H désigne une constante, n systèmes de valeurs pour $X_1, \ldots, X_n$. Soient $X_1, \ldots, X_n$; $Y_1, \ldots, Y_n$ deux tels systèmes de valeurs. On aura

$$(2) \qquad A_1^2 X_1 Y_1 + \ldots + A_n^2 X_n Y_n = 0.$$

Cela posé, l'équation (1) peut s'écrire

$$a_i X_i + b_{i-1}(X_i - X_{i-1}) - b_i(X_{i-1} - X_i) = p A_i^2 X_i.$$

Si l'on considère maintenant X_m comme la valeur d'une fonction X de x correspondant à $x = m$, l'équation précédente devient une équation aux différences qu'il est aisé de transformer en une équation différentielle du second ordre, et l'équation (2) donne alors la propriété exprimée par l'équation

$$\int_0^l XY A_x^2 \, dx = 0.$$

L'auteur donne plusieurs autres propositions de même nature.

Tanner (H.-W.-L.). — Sur les déterminants à n dimensions. (167-180).

L'auteur fait remarquer que la notation topographique n'est plus applicable ici, et il emploie une notation qui peut être considérée comme la généralisation de la notation *ombrale* de M. Sylvester. Il fait voir comment un terme peut être représenté par un diagramme et comment on peut déterminer son signe. Puis il développe les propositions relatives à l'échange de deux séries d'indices dans chaque élément, propositions pour lesquelles il y a lieu de faire une distinction suivant que le degré du déterminant est pair ou impair. Ainsi un déterminant de degré pair ne change pas de valeur quand on échange deux séries quelconques d'indices dans tous les éléments. Au contraire, un déterminant d'ordre impair acquiert alors n valeurs différentes.

Walker (J.-J.). — Note sur les courbes planes. (180-185).

L'auteur traite successivement de la réduction de l'équation d'une cubique à la forme

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dw^3 = e,$$

de certaines courbes dérivées et de l'enveloppe des diamètres d'une cubique.

Spottiswoode (W.). — Sur les vingt et une coordonnées d'une conique dans l'espace. (185-196).

De même qu'une droite peut être représentée par six coordonnées homogènes entre lesquelles existe une relation quadratique, de même une conique dans l'espace peut être définie par vingt et un nombres entre lesquels existent d'ail-

leurs de nombreuses identités qui laissent indépendantes seulement huit d'entre elles. L'auteur développe la condition pour que deux coniques se coupent et il montre que les coordonnées sont les mineurs d'un certain déterminant du cinquième ordre. Dans une Note à la suite du Mémoire, M. Cayley montre comment on peut écrire la condition pour qu'une droite rencontre la conique en fonction linéaire des vingt et une coordonnées.

Zeuthen (*H.-G.*). — Déduction de différents théorèmes géométriques d'un seul principe algébrique. (196-204).

Le principe algébrique employé par l'auteur est le suivant : soit $f = a_x^2\, \alpha_y^2$ une forme quadratique en x_1, x_2 et y_1, y_2, les deux discriminants par rapport aux x et par rapport aux y sont deux formes du quatrième degré qui ont les mêmes invariants.

M. Zeuthen en déduit un grand nombre de conséquences en considérant les correspondances (2, 2) qui se présentent dans plusieurs questions de Géométrie. Par exemple, si l'on considère les droites se coupant en un point variable d'une cubique et passant l'une et l'autre par un point fixe de la cubique, on a le théorème sur le rapport anharmonique des tangentes menées d'un point à une cubique. Le travail contient des applications plus nouvelles aux surfaces du second ordre d'un faisceau et aux courbes gauches.

Spottiswoode (*W.*). — Sur la représentation graphique employée par Clifford. (204-214).

Il s'agit ici de la représentation graphique des invariants donnée par Clifford pour les invariants, représentation qui est en rapport étroit avec celle qu'adoptent les chimistes pour représenter les combinaisons dans la théorie atomique.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (¹).

Tome XCIV; 1882.

N° 14; 3 avril.

Hermite. — Sur l'intégrale elliptique de troisième espèce. (901).

La formule de Jacobi

$$\int_0^x \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 x}\, dx = x\, \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2} \log \frac{\Theta'(x-a)}{\Theta(x-a)}$$

renferme un logarithme dont les déterminations multiples répondent aux diverses valeurs que prend l'intégrale suivant le chemin décrit par la variable.

(¹) Voir *Bulletin*, VI_2, 73.

M. Hermite, dans le cas des fonctions complètes

$$\Pi(a) = \int_0^{K} \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 x} dx,$$

$$i\Pi'(a) = \int_K^{K+iK'} \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 x} dx,$$

cherche comment on doit lever l'indétermination, quand on suppose les deux intégrales rectilignes.

La formule de Jacobi donne

$$\Pi(a) = K \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \mu i \pi,$$

μ étant un entier qui est nul si a est réel, et si, en posant

$$a = p + iq,$$

q est compris entre $-K'$ et K'. Enfin $\Pi(a)$ est une fonction doublement périodique de la variable a continue entre les parallèles au-dessus et au-dessous de l'axe des abscisses, aux distances

$$K', \quad 3K', \quad \ldots, \quad (2m-1)K'$$

de l'origine et qui change brusquement de valeur, en s'augmentant de la constante $i\pi$, lorsque, en franchissant une de ces droites, on s'élève au-dessus de l'axe des x réels.

Pour la seconde fonction complète de seconde espèce, on a

$$\Pi'(a) = K' \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{\pi a}{2K} + \mu\pi.$$

Si le point a est compris entre les deux parallèles à l'axe des x purement imaginaires situées à la distance K de cet axe, on a

$$\mu = 0,$$

et pour tout point représenté par l'expression $a + 2mK$, a étant toujours compris entre les deux parallèles, on aura

$$\mu = m.$$

Saint-Venant (de). — Des mouvements que prennent les diverses parties d'un liquide dans l'intérieur d'un vase ou réservoir d'où il s'écoule par un orifice. (904).

Darboux. — Sur une classe de courbes unicursales. (930).

Les propositions dont il s'agit ont été données par M. Darboux dans son cours à la Sorbonne en janvier 1880 : elles ont un rapport intime avec quelques-unes des intéressantes propriétés communiquées par M. Laguerre et relatives aux hypercycles.

Soient n droites $d_1, \ldots, d_n$. Si l'on marque sur ces droites des points $O_1, \ldots, O_n$, destinés à servir d'origine aux segments comptés sur ces droites, une droite

variable δ interceptera sur ces droites fixes des segments $O_1A_1, \ldots, O_nA_n$. Si l'on assujettit ces n segments à satisfaire à la relation linéaire

$$\sum \lambda_i O_i A_i = k,$$

la droite δ enveloppera une courbe de $n^{\text{ième}}$ classe au plus, admettant la droite de l'infini pour tangente $n-1^{\text{ple}}$.

Si $n+1$ droites fixes interceptent sur une droite variable n segments entre lesquels a lieu une relation linéaire et homogène, la droite mobile enveloppe une courbe de la même nature.

On énoncera facilement les propositions réciproques.

On aperçoit là des généralisations immédiates de propriétés bien connues de la parabole. En faisant la perspective, on obtient des propositions qui sont les généralisations analogues des propriétés anharmoniques des tangentes à une conique quelconque.

Laguerre. — Sur les hypercycles. (933).

Appell. — Sur les fonctions uniformes doublement périodiques à points singuliers essentiels. (936).

Soit un parallélogramme élémentaire formé avec les périodes ω, ω'; soit C un cercle intérieur à ce parallélogramme et de centre O; soit E la position du parallélogramme extérieur à C; soit $f(x)$ une fonction aux périodes ω, ω' holomorphes dans E; soient x un point de E, C′ une circonférence de cercle de centre a, extérieure à C et assez voisine de C pour que x soit extérieur à C′; soit enfin

$$Z(u) = \frac{d \log \theta_1(u)}{du},$$

la considération de l'intégrale

$$\int f(u)\, Z(u-x)\, du,$$

prise le long du parallélogramme, conduit aux formules

$$f(x) = \frac{A_0}{2\pi i} + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n Z^{(n)}(a-x),$$

$$2\pi i A_n = -\frac{1}{1.2\ldots n}\int_{C'} (u-a)^n f(u)\, du;$$

le coefficient de $Z(a-x)$ est nul.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ des points tous différents situés dans un parallélogramme des périodes et tels que, pour $\nu = \infty$, $\lim a_\nu = a$, $a_\nu = \infty$; soient, en outre, $f_1(x, a_1)$, $f_2(x, a_2)$, ... des fonctions méromorphes doublement périodiques ayant respectivement pour pôles les seuls points $a_1, a_2, \ldots$, il existe une fonction uniforme doublement périodique $F(x)$ admettant le point a pour point singulier essentiel et les points a_ν pour pôles, de telle façon que la différence $F(x) - f_\nu(x, a_\nu)$ soit régulière au point a_ν. C'est une généralisation du théorème de M. Mittag-Leffler sur les fonctions uniformes; M. Appell en déduit une généralisation analogue du théorème de M. Weierstrass sur la décomposition en facteurs primaires.

Mittag-Leffler. — Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. (938).

Tarry. — Relation générale entre sept points quelconques d'une section conique. Conique d'homologie. Propriétés communes à trois figures homographiques. (941).

Conséquences de la proposition suivante :

Étant donnés deux triangles ABC et A'B'C' inscrits dans une conique, si par un point P de cette conique on mène une droite quelconque la coupant en un second point H et que sur cette droite PH on prenne un autre point quelconque D, les deux coniques HDABC et HDA'B'C' qui passent par les deux points H et D se coupent en deux autres points situés sur une droite fixe.

Cette droite fixe est la polaire du point P par rapport à la conique qui a pour triangles conjugués les deux triangles ABC et A'B'C'.

N° 15; 10 avril.

Tisserand. — Sur les déplacements séculaires des plans des orbites de trois planètes. (997).

Dans une Note insérée dans les *Comptes rendus,* t. XCIII, p. 525, l'auteur s'est occupé d'une question traitée par Lagrange, concernant les déplacements séculaires des orbites de trois planètes; il indique aujourd'hui un cas particulier qui conduit à une question curieuse examinée par Le Verrier.

« Il existe entre Jupiter et le Soleil une position telle que, si l'on y plaçait une petite masse dans une orbite d'abord peu inclinée à celle de Jupiter, cette petite masse pourrait sortir de son orbite primitive et atteindre de grandes inclinaisons sur le plan de l'orbite de Jupiter par l'action de cette planète et de Saturne. Il est remarquable que cette position se trouve à très peu près à une distance double de la distance de la Terre au Soleil, c'est-à-dire à la limite inférieure de la zone où l'on a rencontré jusqu'ici les petites planètes... »

Les recherches de M. Tisserand confirment et précisent cette conclusion; en désignant par a le demi-grand axe de l'orbite d'une planète de petite masse m, l'auteur montre que l'inclinaison peut s'élever jusqu'à 25°, mais que, pour a non compris entre 1,98021 et 2,08021, le maximum de l'inclinaison devient égal à 7°.

Saint-Venant (de). — Des mouvements que prennent les diverses parties d'un liquide dans l'intérieur d'un vase ou réservoir d'où il s'écoule par un orifice. (1004).

L'auteur a, dans une Communication antérieure (3 avril), traité ce problème en prenant pour point de départ les recherches de M. Boussinesq (*Savants étrangers,* t. XXIII) et en supposant la masse fluide indéfinie dans tous les sens au-dessus du plan de son fond. Il a indiqué en particulier un procédé graphique pour obtenir les lignes transformées des lignes fluides formées par les molécules dans l'intérieur du réservoir. Il complète ses recherches dans deux Communications (nos 15 et 17). Dans l'un, il substitue à ce procédé graphique, la

continuation des courbes d'après leur équation en coordonnées polaires et fait des diverses formes qu'elles peuvent affecter, soit dans le passé, soit dans l'avenir, une discussion approfondie. Dans l'autre, il montre comment les résultats obtenus s'étendent avec une grande approximation au cas d'un large vase entretenu plein, pourvu que l'on ne considère que les parties du fluide éloignées des parois latérales. Enfin on peut obtenir la loi des vitesses dans des vases ou réservoirs des dimensions horizontales finies; il suffit pour cela de prolonger leurs fonds en les supposant percés, comme un crible, d'une infinité d'ouvertures disposées périodiquement, ou en multipliant à l'infini les orifices fictifs extérieurs au vase et de calculer au moyen de séries doubles les effets composés des appels que tous ces orifices exerceront sur les éléments du fluide donné.

Villarceau (*Y.*). — Essai philosophique sur la méthode nommée par son auteur *Science de l'ordre*. (1008).

A propos du Mémoire inséré dans le tome II des *Annales du Bureau des Longitudes*, où il a vérifié l'exactitude des formules de Wronski, M. Yvon Villarceau montre comment les réflexions les plus simples conduisent naturellement au choix des axes convenables pour l'étude du mouvement d'une masse sollicitée par une force prépondérante venue du Soleil et par des forces perturbatrices, comment on peut obtenir d'une façon rigoureuse l'équation différentielle de la trajectoire et deux intégrales premières du mouvement, en sorte qu'on n'a besoin de recourir à la méthode de la variation des constantes arbitraires que pour effectuer les intégrations restantes (deux intégrations du premier ordre).

Gonnessiat. — Observations de la comète a 1882, faites à l'Observatoire de Lyon. (1030).

Tacchini. — Observations des éruptions solaires en 1881. Spectre de la comète Wells. (1031).

Laguerre. — Sur les hypercycles. (1033).

Soient A, B, C, D les quatre tangentes communes à un hypercycle et à un cycle donné, soient C′ et D′ les tangentes conjuguées de deux quelconques d'entre elles, C et D; les quatre semi-droites A, B, C′ et D′ sont également tangentes à un même cycle. L'auteur examine diverses conséquences de cette proposition et donne en particulier la construction du cercle osculateur en un point quelconque de la courbe; le cas où les semi-droites A, B sont opposées est l'objet d'une étude spéciale. Il montre enfin que tout hypercycle (sauf un cas particulier) est la transformée par semi-droites réciproques d'une parabole. Le cas exceptionnel, examiné par M. Laguerre dans une Communication postérieure (n° 17), où il est impossible de transformer un hypercycle en une parabole, est celui où son paramètre p est nul. La courbe est alors de la troisième classe et est désignée par l'auteur sous le nom d'*hypercycle cubique*: elle peut être définie comme une courbe de troisième classe ayant une tangente double, touchant la droite de l'infini et passant par les ombilics du plan. M. Laguerre indique diverses propriétés intéressantes de ces courbes.

Picard (*E.*). — Sur l'intégration par les fonctions abéliennes de

certaines équations aux dérivées partielles du premier ordre. (1036).

L'auteur s'occupe des équations aux dérivées partielles de la forme

$$f\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

où f est un polynôme, et qui admettent comme intégrales des fonctions abéliennes des deux variables x et y : il montre comment on peut, de cette équation, déduire un système de deux équations différentielles totales, donnant, s'il est possible, les solutions cherchées.

Poincaré. — Sur les fonctions fuchsiennes. (1038).

Soit une équation différentielle linéaire quelconque

$$(1) \qquad \frac{d^n v}{dx^n} + P_{n-2}\frac{d^{n-2} v}{dx^{n-2}} + P_{n-3}\frac{d^{n-3} v}{dx^{n-3}} + \ldots + P_1\frac{dv}{dx} + P_0 v = 0.$$

Dans cette équation $P_0, P_1, \ldots, P_{n-2}$ sont des fonctions rationnelles en x et en y, et y est lié à x par une relation algébrique

$$(2) \qquad f(x, y) = 0.$$

Une ou plusieurs des fonctions P deviendront infinies pour certaines positions du point analytique (x, y); ce seront les points singuliers de l'équation différentielle; à chacun d'eux correspondra une équation déterminante dont les racines pourront être imaginaires ou incommensurables ou bien être toutes des multiples de $\frac{1}{n}$, n étant un entier positif.

Dans ce dernier cas, le point singulier est de la première catégorie; dans le cas contraire, il est de la seconde catégorie.

Il existera en général deux fonctions fuchsiennes $F(z)$ et $F_1(z)$, jouissant des propriétés suivantes :

1° Elles n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental;

2° Si l'on fait

$$x = F(z), \quad y = F_1(z),$$

la relation (2) est vérifiée.

3° Quand z reste intérieur au cercle fondamental, le point analytique (x, y) ne peut passer par aucun point singulier de la seconde catégorie;

4° Si (x, y) passe par un point singulier de la première catégorie, $F(z)$ et $F_1(z)$ ont leurs $n-1$ premières dérivées nulles.

Alors les intégrales de l'équation (1) sont fonctions zétafuchsiennes de z.

L'auteur examine ensuite, dans le cas où il n'y a pas de points singuliers de la première ou de la seconde catégorie, les diverses formes auxquelles on peut amener le polygone qui correspond à ses fonctions fuchsiennes.

Dans le cas de $p = 1$, les fonctions F, F_1 se réduisent à des fonctions doublement périodiques, et l'on retrouve ainsi les résultats obtenus par M. Picard.

La même marche permet de retrouver aussi les résultats connus relativement à l'intégration algébrique des équations linéaires.

Enfin il y a d'autres manières d'exprimer x, y, v par des fonctions uniformes

de z; on peut en particulier exprimer x et y par des fonctions fuchsiennes $F(z)$, $F_1(z)$ existant dans tout le plan.

Dans une Communication postérieure (n° 17), M. Poincaré expose le mode de formation d'une infinité de fonctions fuchsiennes qui sont toutes fonctions rationnelles de l'une d'entre elles $F(z)$, qui existent dans tout le plan, dont les points singuliers, isolés et en nombre infini, sont tous situés sur l'axe des quantités réelles, deviennent infiniment rapprochés dans le voisinage de certains points singuliers du deuxième ordre, lesquels sont eux-mêmes infiniment rapprochés dans le voisinage de certains points singuliers du troisième ordre, etc.

Mittag-Leffler. — Sur la théorie des fonctions uniformes d'une seule variable. (1040).

Dans trois Communications successives (n°s 15, 16, 17), M. Mittag-Leffler complète les beaux résultats concernant la forme des fonctions uniformes, d'après la nature de leurs singularités, dont on a rendu compte précédemment.

Soient données :

1° Une suite infinie de valeurs $a_1, a_2, a_3, \ldots$, toutes intégrables et assujetties à la condition $\lim\limits_{\nu=\infty} \operatorname{mod} a_\nu = R$, où R est une quantité positive quelconque;

2° Une suite de fonctions entières de la variable y, s'annulant toutes pour $y = 0$,

$$G_\nu(y) = C_1^{(\nu)} y + C_2^{(\nu)} y^2 + C_3^{(\nu)} y^3 + \ldots;$$

il est toujours possible de former une fonction analytique $F(x)$ ayant le caractère d'une fonction uniforme de x, tant que l'on a

$$\operatorname{mod} x < R,$$

n'ayant dans ce domaine d'autres points singuliers que $a_1, a_2, a_3, \ldots$, et telle que, dans le voisinage de $x = a_\nu$, $F(x)$ puisse s'exprimer sous la forme

$$G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right) + P(x - a_\nu),$$

où $P(x - a_\nu)$ désigne, selon l'habitude, une série procédant suivant les puissances entières et positives de $x - a_\nu$. C'est toujours par le même procédé que l'on parvient à la formation de la fonction $F(x)$; cette fonction formée, on trouve de suite l'expression générale des fonctions qui jouissent de la même propriété en ajoutant une fonction arbitraire développable en série de Taylor dans le cercle $\operatorname{mod} x < R$.

Voici maintenant d'autres généralisations qui concernent le cas où l'ensemble (P) des valeurs singulières fournit un ensemble fini (P') de points limites.

Supposons d'abord que (P') se réduise à la seule valeur a et soient $a_1, a_2, a_3, \ldots$ l'ensemble (P — P').

Soit donnée une suite infinie de fonctions entières de la variable y

$$G_\nu(y) = c_1^{(\nu)} y + c_2^{(\nu)} y^2 + \ldots;$$

il est toujours possible de former une fonction analytique

$$F(x;\ a_\nu;\ \nu = 1, 2, \ldots)$$

n'ayant d'autres points singuliers que les points (P) et telle que, pour chaque

valeur déterminée de ν, la fonction $F(x)$ ait, dans le voisinage de a_ν la forme

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)+P(x-a_\nu).$$

Supposons maintenant que (P') comprenne m valeurs a; $\nu=1, 2,\ldots,m$, et que l'on ait décomposé les valeurs $(P-P')$ en m groupes $a_{\mu\nu}$; $\mu=1, 2,\ldots$; $\nu=1, 2,\ldots, m$, telles que le groupe $a_{\mu\nu}$, où $\mu=1, 2,\ldots$ et où ν est fixe, ait la seule valeur limite a_ν.

Soit donnée une suite de fonctions entières

$$G_{\mu\nu}(x)=c_1^{(\mu\nu)}y+c_2^{(\mu\nu)}y^2+c_3^{(\mu\nu)}y^3+\ldots,$$
$$(\mu=1,\ 2,\ \ldots;\ \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Si l'on forme les m fonctions

$$F_\nu(x;\ a_{\mu,\nu};\ \mu=1,\ 2,\ \ldots),\ \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

telles que F_ν n'admette pas d'autres points singuliers que a_ν et $a_{\mu\nu}$; $\mu=1, 2\ldots$, et que la différence

$$F_\nu-G_{\mu\nu}\left(\frac{1}{x-a_{\mu\nu}}\right)$$

ait, pour $x=a_{\mu\nu}$, une valeur finie et déterminée, la somme

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=m}F_\nu(x;\ a_{\mu\nu};\ \mu=1,\ 2,\ldots)$$

sera une fonction uniforme et homogène n'ayant d'autres points singuliers que les valeurs (P) et telle que, pour chaque valeur déterminée de $\mu\nu$, on puisse, dans le voisinage de $x=a_{\mu\nu}$, la mettre sous la forme

$$G_{\mu\nu}\left(\frac{1}{x-a_{\mu\nu}}\right)+P_{\mu\nu}(x-a_{\mu\nu}).$$

On en déduit immédiatement la forme la plus générale des fonctions qui ont ce même caractère.

Enfin M. Mittag-Leffler étend le même mode de formation à tous les cas où de l'ensemble des valeurs singulières (P) on peut déduire une suite limitée (P'), (P''),..., (P''), (P') étant l'ensemble des points limites de (P), (P'') l'ensemble des points limites de (P'),..., et (P'') étant nul.

Vaneček. — Sur l'inversion générale. (1042).

Voici la définition du mode d'inversion qu'étudie M. Vaneček. (1042).

Soient C une conique (*fondamentale*), D une droite (*directrice*) dans le plan de la conique et L une figure contenue dans le même plan; la polaire A d'un point a de L rencontrera D en un point a_1 dont la polaire A_1 passe par le pôle d de la droite D et par a.

Le point d'intersection a_2 de ces deux polaires est le transformé du point a.

Enfin on peut généraliser encore ce mode d'inversion en substituant une courbe quelconque à la directrice D.

Boussinesq. — Résistance d'une barre prismatique et homogène.

de longueur supposée infinie, au choc transversal et au choc longitudinal. (1044).

L'auteur montre que ce problème est compris dans celui du mouvement d'une barre qui, s'étendant le long de l'axe des x, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$, porterait à l'origine $x = 0$ une certaine masse étrangère, et y recevrait, après s'être trouvée primitivement en repos, des impulsions successives capables d'imprimer à cette masse étrangère, pour le cas où elle serait seule, des accélérations données $F(t)$: il résout ce dernier problème.

N° 16; 17 avril.

Bigourdan. — Observation des planètes (221), (222), (223), (224) et de la comète *a* 1882 (Wells), faites à l'Observatoire de Paris. (1101).

Bigourdan. — Éléments et éphémérides de la comète *a* 1882 (Wells) (1104).

Coggia. — Observations faites à l'Observatoire de Marseille. (1105).

Mittag-Leffler. — Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. (1105).

Voir plus haut.

Darboux. — Sur une propriété du cercle. (1108).

On sait que, si l'on considère deux tangentes fixes d'un cercle et une tangente variable et si l'on attribue des sens convenables à ces trois droites, le périmètre du triangle qu'elles forment est constant. On peut énoncer cette proposition sous la forme suivante :

Si une courbe est telle que sa tangente forme avec deux droites fixes un triangle de périmètre constant, elle jouit de la même propriété quand on substitue aux deux droites une infinité d'autres systèmes de deux droites fixes.

Cette proposition admet la généralisation suivante :

Si l'on considère n couples de droites et une droite variable qui forme, avec les n couples des triangles dont les périmètres ont une somme constante, cette droite variable enveloppera une courbe unicursale qui conservera la même définition quand on substituera aux couples primitifs n autres couples dépendant de deux paramètres arbitraires.

Les courbes auxquelles on est ainsi conduit peuvent être caractérisées de la manière suivante : elles sont d'une classe quelconque m, elles admettent la droite de l'infini pour tangente multiple d'ordre $m - 2$ et de plus elles coupent cette droite aux points à l'infini sur le cercle. Exceptionnellement elles peuvent admettre la droite de l'infini comme tangente multiple d'ordre $m - 1$ et se réduire à des courbes considérées par l'auteur dans une Communication précédente.

Réciproquement, chacune de ces courbes admettra la génération précédente; il faudra prendre n triangles si la courbe est de la classe $2n$ ou $2n-1$. Pour démontrer cette propriété, on est conduit à étudier la question suivante, qui a été, de la part de M. Stephanos, l'objet de recherches approfondies : Étant donnée une forme binaire homogène de degré pair $2n$, déterminer deux formes de degré $n+1$ dont elle soit la jacobienne. L'auteur indique une généralisation de la définition donnée et termine par l'énoncé de la proposition suivante :

Considérons une courbe unicursale de classe n, admettant la droite de l'infini pour tangente multiple d'ordre $n-2$. En général, cette courbe qui touche en $n-2$ points la droite de l'infini la coupera en outre en deux autres points, distincts des points de contact. Si ces deux points viennent se confondre à la fois avec les points à l'infini sur le cercle et avec deux des $n-2$ points de contact, les $n-3$ segments interceptés sur la tangente variable à la courbe par les $n-2$ tangentes doubles de cette courbe seront liés par une relation linéaire.

Brassinne. — Sur un passage de la *Mécanique analytique* relatif au principe de la moindre action. (1110).

L'auteur déduit de ce passage la proposition suivante :

Un système de corps est en mouvement et chacun d'eux a une vitesse particulière; le principe de la moindre action établit une relation entre la force vive totale développée et le temps nécessaire pour la produire.

Si, dans les mêmes conditions, on fait varier les masses et les vitesses, de telle sorte que la quantité de mouvement de chacun ne change pas, la force vive totale variera en proportion du temps employé à la produire.

N° 17; 24 avril.

Saint-Venant (de). — Des mouvements que prennent les diverses parties d'un liquide dans l'intérieur d'un vase ou réservoir d'où il s'écoule par un orifice. (1139).

Voir plus haut.

Laguerre. — Sur les hypercycles. (1160).

Voir plus haut.

Mittag-Leffler. — Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. (1163).

Voir plus haut.

Poincaré. — Sur les fonctions fuchsiennes. (1166).

Voir plus haut.

Méray (C.). — Solution du problème général de l'analyse indéterminée du premier degré. (1167).

Étant donné un système quelconque de m équations du premier degré à coef

ficients entiers (positifs, nuls ou négatifs) entre les $n\,(>m)$ inconnues $x, y, z, \ldots, s, t, \ldots, u, v$:

$$(1)\quad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + g_1 s + h_1 t + \ldots + i_1 u + j_1 v + k_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m x + b_m y + c_m z + \ldots + g_m s + h_m t + \ldots + i_m u + j_m v + k_m = 0, \end{cases}$$

assigner, quand ils existent, tous ses systèmes de solutions entières.

On suppose que les déterminants d'ordre m tirés du tableau des coefficients ne soient pas tous nuls.

Nommons indéfiniment (h) les $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ déterminants formés par l'association de m quelconques des n premières lignes du tableau des coefficients et k les $\frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!}$ déterminants de même ordre formés par l'association de la dernière colonne de ce tableau avec $m-1$ quelconques des n premières.

Pour que le système (1) admette quelques systèmes de solutions entières, il est nécessaire et suffisant que le plus grand entier positif d qui divise tous les déterminants (h) divise aussi tous les déterminants (k). Cette condition étant remplie, tous les systèmes de solutions sont donnés, chacun une seule fois, par des formules

$$\begin{gathered} x = \xi + x_1\theta_1 + x_2\theta_2 + \ldots + x_{n-m}\theta_{n-m}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ v = \varphi + v_1\theta_1 + v_2\theta_2 + \ldots + v_{n-m}\theta_{n-m}, \end{gathered}$$

dans lesquelles toutes les lettres désignent des entiers précisant les propriétés suivantes : 1° les $n-m$ nombres θ sont absolument indéterminés; 2° le déterminant de $n-m$ colonnes quelconques du tableau

$$\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 & \ldots v_1, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n-m} & y_{n-m} & z_{n-m} & \ldots v_{n-m}, \end{matrix}$$

est égal au quotient par d de celui des déterminants (k) dont les éléments ne servent pas de coefficients aux inconnues désignées par les lettres qui figurent dans les $n-m$ colonnes en question; par suite, tous les déterminants d'ordre $n-m$ ont 1 pour plus grand commun diviseur.

N° 18; 1er mai.

Jordan. — Rapport sur un Mémoire de M. Stephanos intitulé : *Mémoire sur les faisceaux de formes binaires ayant une même jacobienne.* (1230).

Nous extrayons ce qui suit de ce Rapport :

« .... Dans la première Partie de son Mémoire, M. Stephanos prend pour point de départ la définition suivante, introduite par M. Rosanes :

Deux formes f et f_1, d'ordre $m+1$, sont dites *conjuguées* si l'invariant simultané linéaire par rapport aux coefficients des deux formes est égal à zéro.

Les formes conjuguées à une même forme f constituent un réseau à m paramètres

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_{m+1} f_{m+1},$$

dont l'auteur donne l'expression générale en fonction des racines, égales ou inégales, de l'équation $f = 0$.

Soit plus généralement

$$(1) \qquad af + a_1 f_1 + \ldots + a_k f_k$$

un réseau de formes à k paramètres.

Les formes conjuguées à toutes celles de ce réseau constituent un second réseau à $m - k$ paramètres

$$(2) \qquad a_{k+1} f_{k+1} + \ldots + a_{m+1} f_{k+1}.$$

Ces deux réseaux ont les mêmes covariants. Cette proposition importante, que M. Stephanos établit d'une manière aussi simple qu'ingénieuse, doit être considérée comme la clef de son analyse.

M. Gordan avait en effet montré que les covariants du faisceau (1) (combinant des formes $f, f_1, \ldots, f_k$) coïncident avec les covariants d'une forme unique à $k + 1$ séries de variables. M. Stephanos substitue à cette forme la forme équivalente relative au réseau conjugué. Cette expression contient encore un facteur superflu qu'il supprime. Il remplace enfin, à l'exemple de M. Gordan, cette forme unique à plusieurs séries de variables par un système équivalent de covariants élémentaires à une seule série de variables.

Appliquant ces considérations générales au cas particulier d'un faisceau de formes

$$af + a_1 f_1,$$

M. Stephanos en tire une série de relations entre les covariants élémentaires de M. Gordan relatifs à ce faisceau, ainsi que entre ces covariants et une forme quelconque du faisceau; il en déduit en particulier :

1° L'expression générale des jacobiennes des faisceaux qui contiennent une forme donnée;

2° La condition pour qu'une forme f divise la jacobienne d'un faisceau contenant une autre forme φ. Il est remarquable que cette condition soit symétrique par rapport aux deux formes f et φ.

Nous citerons encore la proposition suivante :

Si deux faisceaux

$$af + a_1 f_1 \quad \text{et} \quad a_2 f_2 + a_3 f_3$$

ont la même jacobienne, à tout faisceau contenu dans le réseau

$$af + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3$$

correspondra un faisceau complémentaire ayant la même jacobienne.

Dans la seconde partie de son Mémoire, M. Stephanos résout dans tous ses détails le problème suivant :

« Déterminer les faisceaux de formes biquadratiques qui ont pour jacobienne une forme donnée du sixième ordre. »

Ces faisceaux ont, en outre de α, un second covariant élémentaire θ du second ordre; ils seraient complètement déterminés si θ était connu.

Mais θ peut lui-même être déterminé au moyen de la relation qui le lie à α et qui a été donnée dans la première Partie du Mémoire. En discutant cette condi-

tion, on trouve que la fonction inconnue θ s'exprime au moyen des covariants de α et d'un invariant irrationnel I, dépendant d'une équation du cinquième degré. Le problème comporte donc cinq solutions.

Soient $I_1, \ldots, I_5$ les racines de l'équation en I, $\theta_1, \ldots, \theta_5$ les valeurs correspondantes de θ. Si nous posons, pour abréger,

$$i = (\alpha, \alpha)_4, \quad A = (\alpha, \alpha)_6,$$

$$\Theta_{rs} = (\theta_r, \theta_s)_2, \quad G_k = -\frac{15\lambda}{2A + 15 I_k},$$

λ désignant une constante, on aura

$$(2) \quad \begin{cases} \Sigma G_k = 0, \quad \Sigma \theta_k = 0, \quad \Sigma G_k \theta_k = 0, \quad \Sigma G_k \theta_k^2 = 0, \\ i = \frac{1}{5} \Sigma \theta_k^2, \quad \alpha = \frac{1}{5\lambda} \Sigma G_k \theta_k^3, \end{cases}$$

Réciproquement, si l'on a cinq formes quadratiques θ_k et cinq constantes G_k différentes de zéro liées par des relations telles que (3), les formes θ_k seront les covariants quadratiques de cinq faisceaux ayant pour jacobienne la fonction

$$\alpha = \frac{1}{5\lambda} \Sigma G_k \theta_k^3.$$

Deux des formes θ deviennent égales si l'équation en I admet la racine $-\frac{2A}{15}$; elles restent distinctes, bien que l'équation en I admette des racines égales, lorsque l'invariant gauche de α est nul.

M. Stephanos cherche ensuite à déterminer des formes quadratiques y et n définies par la relation

$$(\alpha, n)_2 + yn = 0.$$

Ce problème comporte une infinité de solutions si α est un cube parfait. Dans le cas contraire, il n'en existe que dix, qu'on obtient généralement en posant

$$y_{rs} = \theta_r + \theta_s, \quad n_{rs} = \lambda(\theta_r - \theta_s),$$

λ désignant un facteur constant.

La forme n_{rs} jouit de cette propriété remarquable, que son carré est conjugué aux formes des faisceaux correspondants à θ_r et à θ_s.

M. Stephanos déduit de cette proposition une construction géométrique très élégante des cinq faisceaux cherchés...

Barnaud et *Leygne*. — Détermination de la différence de longitude entre Paris et Besançon. (1234).

Appell. — Développements en série d'une fonction holomorphe dans une aire limitée par des arcs de cercle. (1238).

Les cercles qui limitent l'aire S considérée par l'auteur tournent tous leur convexité vers l'intérieur de S : si α_k est le centre du cercle C_k, on aura

$$\text{Nord} \left| \frac{z - \alpha_k}{x - \alpha_k} \right| < 1;$$

z étant un point du contour, x un point de S_i, on aura donc

$$\frac{1}{z-x} = -\frac{1}{x-\alpha_k}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\left(\frac{z-\alpha_k}{x-\alpha_k}\right)^\nu;$$

en substituant cette série à la place de $\frac{1}{z-x}$ dans la portion de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

qui correspond au cercle C_k et procédant de même pour les autres arcs de cercle, on mettra $f(x)$ sous forme d'une série de fractions rationnelles; cette série représentera zéro dans l'aire extérieure à tous les cercles auxquels appartiennent les arcs tels que C_k.

En supposant la même aire située à l'intérieur d'un parallélogramme de côtés ω, ω', en supposant en outre que les aires S', S'', ..., homologues à S dans les parallélogrammes du réseau défini par le premier parallélogramme n'empiètent sur aucun des cercles auxquels appartiennent les arcs C_k, en prenant enfin pour point de départ l'intégrale

$$\int f(z)\,Z(z-x)\,dx,$$

l'auteur parvient à un développement analogue en série de fonctions doublement périodiques.

Picard (E.). — Sur certaines formes quadratiques ternaires. (1241).

La considération du groupe de substitutions linéaires considérées par M. Picard dans les Communications antérieures (février et mars 1882) le conduit à isoler des formes quadratiques ternaires générales certaines formes particulières dont il développe les propriétés.

Draper. — Sur des photographies du spectre de la nébuleuse d'Orion. (1243).

N° 19; 8 mai.

Darboux. — Sur la représentation sphérique des surfaces. (1290).

Dans une Communication antérieure, M. Darboux a établi la proposition suivante :

Considérons une équation aux dérivées partielles

$$(1)\qquad \frac{d^2 z}{d\rho\, d\rho_1} = A\frac{dz}{d\rho} + B\frac{dz}{d\rho_1} + Cz,$$

où A, B, C sont des fonctions de ρ et ρ_1.

Supposons que l'on connaisse quatre solutions particulières de cette équation,

liées par une relation homogène du second degré. On pourra toujours, en combinant linéairement ces solutions, ramener cette relation à la forme

(2) $$u^2 + v^2 + w^2 = p^2.$$

Cela posé, les équations

$$x = \frac{u}{p}, \quad y = \frac{v}{p}, \quad z = \frac{w}{p}$$

définissent toujours un système orthogonal (A), formé des lignes

$$\rho = \mathrm{C}, \quad \rho_1 = \mathrm{C}_1.$$

De plus, si θ désigne une solution nouvelle quelconque de l'équation aux dérivées partielles, le plan

$$u\mathrm{X} + v\mathrm{Y} + w\mathrm{Z} + \theta = 0$$

enveloppera, quand ρ et ρ_1 prendront toutes les valeurs possibles, une surface dont les lignes de courbure auront pour image sphérique les courbes du système orthogonal (A).

Voici maintenant des conséquences de ce théorème :

Supposons que l'équation aux dérivées partielles appartiennent à la classe de celles qui admettent quatre solutions particulières de la forme

$$z_1 = \mathrm{A}_1\mathrm{B}_1, \quad z_2 = \mathrm{A}_1\mathrm{B}_2, \quad z_3 = \mathrm{A}_2\mathrm{B}_1, \quad z_4 = \mathrm{A}_2\mathrm{B}_1,$$

où A_1, A_2 sont des fonctions d'une seule variable, solutions particulières d'une même équation linéaire du second ordre, et B_1, B_2 des fonctions d'une autre variable, définies également par une équation linéaire du second ordre; il est clair que les quatre solutions particulières précédentes sont liées par la relation du second degré

$$z_1 z_4 = z_2 z_3,$$

et l'on pourra appliquer le théorème fondamental.

En particulier, l'équation

(3) $$\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = i[f(\alpha + i\beta) - \varphi(\alpha - i\beta)]z$$

admet comme solution particulière le produit d'une fonction P de $\alpha + i\beta$ par une fonction Q de $\alpha - i\beta$, et si l'on prend par P_1, P_2 les intégrales de l'équation

(4) $$\mathrm{P}'' = \mathrm{P}[f(\alpha + i\beta) + m]$$

où m est une constante et pour Q_1, Q_2 celles de l'équation

$$\mathrm{Q}'' = \mathrm{Q}[\varphi(\alpha - i\beta) + m]$$

on verra facilement que les quatre solutions de l'équation aux dérivées partielles (3)

$$u = \mathrm{P}_1\mathrm{Q}_2 + \mathrm{P}_2\mathrm{Q}_1, \qquad w = \mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1 + \mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2,$$
$$v = i(\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_1 + \mathrm{P}_1\mathrm{Q}_2), \quad p = \mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1 + \mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2,$$

vérifient la relation (2), et, par suite, définissent un système sphérique orthogonal. Si les fonctions f et φ sont imaginaires conjuguées, et si Q_1 et Q_2 sont les solutions respectivement conjuguées à P_1, P_2, ce système sera réel, et il est aisé de voir qu'il sera isotherme. Ce système et ceux qui s'en déduisent en rem-

plaçant P_1 et P_2 par d'autres solutions de l'équation (4) sont dits *correspondants* à l'équation

$$y'' = y[f(x) + m].$$

On peut ramener à la forme (3) l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\rho_1\,\partial\rho_2} = -\frac{m(m+1)}{(\rho-\rho_1)^2}\,z,$$

étudiée par Euler et par Poisson; en cherchant à ramener à la même forme l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = -\frac{m(m+1)\,A'B'}{(A-B)^2},$$

où A est une fonction de α, B une fonction de β, équation qui se déduit d'ailleurs de la précédente, M. Darboux parvient à la conclusion suivante :

On saura trouver toutes les surfaces ayant pour représentation sphérique les systèmes isothermes correspondant aux trois équations

$$y'' = y\left[\frac{m(m+1)}{x^2} - h^2\right],$$

$$y'' = y\left[\frac{m(m+1)}{\sin^2 x} - h^2\right],$$

$$y'' = y\,[m(m+1)k^2\,\mathrm{sn}^2 x + h].$$

Les formules d'intégration définissant la surface ne contiendront les fonctions arbitraires sous aucun signe d'intégration définie, tant que m sera entier.

Cette proposition comprend tout ce que l'on sait relativement aux surfaces à lignes de courbures planes, à celles dont la représentation est formée d'ellipses sphériques orthogonales, etc. On trouve une infinité de surfaces algébriques dont les lignes de courbure sont algébriques.

Dans une autre Communication sur le même sujet, M. Darboux montre comment on peut étendre les résultats précédents à des systèmes isothermes, contenant des constantes dont le nombre croîtra indéfiniment.

On doit à M. Moutard la proposition suivante : Toutes les fois que l'on sait intégrer l'équation

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \lambda z,$$

on sait aussi trouver l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \omega\,\frac{\partial^2\left(\frac{1}{\omega}\right)}{\partial\alpha\,\partial\beta}\,z,$$

où ω désigne une solution particulière de l'équation (4).

En appliquant ce résultat aux équations de la forme (3) et en choisissant pour ω une solution de la forme $\omega = \theta(\alpha + i\beta)\,\sigma(\alpha - i\beta)$, on sera conduit à l'équation

$$(5)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = i\left[\theta\left(\frac{1}{\theta}\right)'' - \sigma\left(\frac{1}{\sigma}\right)''\right]z,$$

qui est de même forme que l'équation (3); donc :

Toutes les fois que l'on saura résoudre le problème de la représentation sphérique pour les systèmes orthogonaux correspondant à l'équation

$$y'' = yf(x), \tag{6}$$

on saura aussi la résoudre pour les systèmes correspondant à l'équation

$$y'' = y\left[\theta\left(\frac{1}{\theta}\right)'' + m\right], \tag{7}$$

où θ *désigne une solution de l'équation* (6). *Plus généralement, chaque solution particulière du premier problème donnera, par une quadrature, une solution du second.*

Cette proposition se trouve, en quelque sorte, complétée par le curieux théorème que voici :

Toutes les fois que l'on saura intégrer, pour toutes les valeurs de la constante m, l'équation linéaire

$$y'' = y[f(x) + m], \tag{8}$$

on pourra aussi intégrer l'équation

$$y'' = y\left[\theta\left(\frac{1}{\theta}\right)'' + m\right], \tag{9}$$

θ *désignant une intégrale particulière de l'équation* (8), *où l'on a fait* $m = \nu$; *l'intégrale de l'équation précédente sera*

$$y = u' - u\frac{\theta'}{\theta},$$

u désignant l'intégrale générale de l'équation (8).

Bouquet de la Grye. — Sur les marées de l'île Campbell. (1293).

N° 20; 15 mai.

Mouchez. — Observations des petites planètes, faites au grand instrument méridien de l'Observatoire de Paris, pendant le premier trimestre de l'année 1882. (1327).

Haton de la Goupillière. — Tambours spiraloïdes pour les câbles d'égale résistance. (1338).

Darboux. — Sur la représentation sphérique des surfaces. (1343).

Voir plus haut.

Resal. — Note sur l'application d'un théorème de Poncelet au calcul approximatif des arcs des courbes planes.

Le théorème dont il s'agit concerne l'approximation avec laquelle on peut substituer une expression linéaire de la forme $\alpha u + \beta v$ à un radical de la forme $\sqrt{u^2 + v^2}$. M. Resal substitue d'après cette règle l'expression

$$ds = \beta dx + \alpha dy$$

à l'expression exacte

$$ds = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\, dx.$$

Janssen. — Observations faites pendant l'éclipse du 17 mai. (1388).

Cruls. — Sur les observations de la comète télescopique à l'Observatoire impérial de Rio de Janeiro. (1400).

André (Ch.). — Sur un nouveau cas de formation du ligament noir et de son utilité pour l'observation du passage de Vénus. (1401).

Poincaré. — Sur une classe d'invariants relatifs aux équations linéaires. (1402).

Considérons deux équations différentielles linéaires

$$\frac{d^m y}{dx^m} + P_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + P_1 \frac{dy}{dx} + P_0 y = 0,$$

$$\frac{d^m y}{dx^m} + P'_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + P'_1 \frac{dy}{dx} + P'_0 y = 0,$$

où les P et les P′ sont des fonctions rationnelles en x et en z, z étant défini en fonction de x par une relation algébrique

$$f(x, z) = 0.$$

M. Poincaré dit que les deux équations sont de la même *famille* si l'intégrale générale de la seconde peut se mettre sous la forme

$$\Lambda \left(Q_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + Q_{m-2} \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + Q_0 y \right),$$

y étant l'intégrale générale de la première, les Q étant des fonctions rationnelles de x et de z et Λ une fonction quelconque de ces variables. Si les fonctions P et P′ sont de degré déterminé, il y aura certaines fonctions de leurs coefficients qui auront la même valeur pour toutes les équations d'une même famille; ce sont les *invariants de famille.*

L'auteur montre comment on peut déterminer et étudier les invariants de famille, sur les équations de la forme

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \theta y = 0,$$

où θ est une fonction rationnelle de x seulement

Picard (*E.*). — Sur les fonctions uniformes affectées de coupures. (1405).

En supposant que, pour une telle fonction, les coupures soient rectilignes et en nombre fini n, M. Picard montre que la fonction considérée $f(z)$ peut se mettre sous la forme

$$f(z) = \sum_{k=1}^{k=n} \varphi_k(z),$$

où la fonction $\varphi_k(z)$ est continue et uniforme, sauf pour la $k^{\text{ième}}$ coupure.

Il établit aussi, pour les fonctions de cette nature, un théorème sur la possibilité de leur décomposition en facteurs primaires.

N° 22; 29 mai.

Ledieu. — Du cycle de raisonnement. Son emploi pour valider les hypothèses et les propositions fondamentales de toute science. Application à la Mécanique. (1441).

D'Abbadie et *Tisserand.* — Rapport sur un Mémoire de M. *Bouquet de la Grye* intitulé « Étude sur les ondes à longues périodes dans les phénomènes des marées ». (1446).

Darboux. — Sur une proposition relative aux équations linéaires. (1456).

Cette proposition a été énoncée à la fin de l'analyse des Communications de M. Darboux sur la représentation sphérique des surfaces. L'auteur en donne la démonstration.

Bouniakowski. — Démonstration d'un théorème relatif à la fonction E(x). (1459).

Soit p un nombre premier de la forme $4n+1$, on a

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{p-5}{4}} E(\sqrt{\mu p}) = \frac{(p-1)(p-5)}{12}.$$

Barbier (*E.*). — Deux moyens d'avoir π au jeu de pile ou face. (1461).

Vaneček. — Sur un mode de transformation des figures dans l'espace. (1463).

Voici en quoi consiste ce mode de transformation.

Considérons une surface F du second ordre, puis une courbe L du $l^{\text{ième}}$ ordre, une courbe M de l'ordre m et une surface P de l'ordre p.

La courbe L doit être transformée par rapport à la surface fondamentale, à la courbe M et à la surface P.

Un point l de la courbe L a un plan polaire λ par rapport à la surface fondamentale F. Ce plan λ coupe la courbe M en divers points, le plan polaire μ de l'un d'eux m détermine avec λ une droite $\lambda\mu$ qui perce la surface P en p points. Considérons entre eux un seul point p, dont le plan polaire π coupe la droite $\lambda\mu$ en un point r; le point r est le transformé du point l.

Boussinesq. — Sur un potentiel à quatre variables, qui rend presque intuitive l'intégration de l'équation du son et la démonstration de la formule de Poisson concernant le potentiel inverse à trois variables. (1465).

Soient m une masse quelconque fixe, dans un espace rapporté à trois axes de coordonnées rectangles x, y, z et ρ, ou $\rho(x_1, y_1, z_1)$ la densité de la partie $dm = \rho\, d\varpi$ de cette masse qui remplit l'élément de volume $d\varpi$ occupant la situation (x_1, y_1, z_1). Imaginons qu'on décrive, d'un point donné (x, y, z) comme centre et avec un rayon donné r, une sphère dont $\sigma = 4\pi r^2$ désignera la surface, puis qu'on évalue, pour chacun des éléments $d\sigma$ de cette surface, ayant les coordonnées x_1, y_1, z_1, l'expression $\frac{\rho\, d\sigma}{r}$, et qu'on fasse la somme des valeurs qu'elle prend sur tous les éléments de σ. On obtiendra ainsi l'intégrale double $\varphi = \int \frac{\rho\, d\sigma}{r}$, fonction des quatre paramètres x, y, z, r définissant la sphère; c'est cette fonction que l'auteur appelle potentiel à quatre variables, ou sphérique.

Cette fonction et sa dérivée par rapport à r vérifient l'équation

$$(1)\qquad \Delta_2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2};$$

à la limite $r = 0$, la fonction φ s'annule, sa dérivée par rapport à r est égale à $4\pi\rho(x, y, z)$, la dérivée seconde par rapport à r est nulle : il suffira donc de superposer ces deux solutions en y prenant les deux fonctions arbitraires $4\pi\rho(x, y, z)$ différentes, pour avoir l'intégrale générale de (1) avec les deux fonctions arbitraires de x, y, z auxquelles on voudra que se réduisent, pour $r = 0$, φ et $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$.

L'auteur applique l'équation (3) aux mouvements produits dans un fluide élastique indéfini par de petites dilatations ou ramifications primitives données.

N° 23 : 5 juin.

Wolf (C.). — Histoire des étalons du mètre. (1503).

Dans le travail communiqué à l'Académie le 8 août 1881 et qui a paru en entier dans les *Annales de Chimie et de Physique*, M. Wolf n'avait pu suivre l'histoire des deux mètres de l'Observatoire et du Conservatoire qu'à partir du

16 ventôse an VIII, date de leur échelonnage définitif par Lefèvre-Gineau, Coulomb, Delambre et Méchain. Une facture de Lenoir, faisant partie des Archives de l'Académie, permet à M. Wolf de remonter un peu plus haut et d'ajouter quelques détails intéressants à ceux que nous a laissés Delambre sur la fabrication du mètre définitif.

Boussinesq (*J.*). — Sur les ondes produites par l'émersion d'un solide à la surface d'une eau tranquille, quand il y a lieu de tenir compte des deux coordonnées horizontales. (1505).

N° 24; 12 juin.

Resal (*H.*). — Sur un point de la théorie mathématique du jeu de billard. (1548).

L'auteur traite du choc d'une bille assujettie à se mouvoir sur un plan (S) contre un autre plan (S') perpendiculaire au précédent. Il montre comment on peut tenir compte du frottement et déterminer le mouvement de la bille à la fin du choc.

Lœwy (*M.*). — Programme des travaux astronomiques à effectuer par l'expédition scientifique envoyée au pôle sud. (1561).

Mouchez. — Observation du passage de Vénus au cap Horn. (1563).

Vaneček (*J.-S.*). — Sur un mode de transformation des figures dans l'espace. (583).

L'auteur étend aux surfaces le mode de transformation qu'il a déjà appliqué aux courbes dans sa précédente Communication.

Deprez (*M.*). — Sur la loi suivant laquelle varie la force électromotrice d'une machine magnéto-électrique en fonction de la résistance du circuit extérieur. (1586).

N° 25; 19 juin.

Thollon. — Éclipse totale du Soleil observée à Souhag (haute Égypte) le 17 mai (temps civil) 1882. (1630).

Trépied. — Observation de l'éclipse totale du 17 mai. (1636).

Puiseux (*A.*). — Sur l'éclipse du 17 mai. (1643).

Darboux (*G.*). — Sur une équation linéaire. (1645).

L'auteur considère l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[\frac{\mu(\mu+1)}{\mathrm{sn}^2x} + \frac{\mu'(\mu'+1)\,\mathrm{dn}^2x}{\mathrm{cn}^2x} + \frac{\mu''(\mu''+1)\,k^2\mathrm{cn}^2x}{\mathrm{dn}^2x} - n(n+1)\,k^2\mathrm{sn}^2x + h\right],$$

et montre qu'on peut lui appliquer les méthodes que M. Hermite a fait connaître pour l'équation de Lamé.

Boussinesq (*J.*). — Les déplacements qu'entraînent de petites dilatations ou condensations quelconques produites dans tout milieu homogène et isotrope indéfini sont calculables à la manière d'une attraction newtonienne. (1648).

N° 26; 26 juin.

Gyldén (*H.*). — Sur la seconde comète de l'année 1784. (1686).

Tannery (*J.*). — Sur les intégrales eulériennes. (1698).

On sait que M. Prym a montré que la fonction $\Gamma(x)$ peut se mettre sous la forme $\Gamma(x) = \mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}(x)$, où l'on a

$$\mathrm{P}(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{1.2}\,\frac{1}{x+2} - \ldots,$$

et où $\mathrm{Q}(x)$ est une fonction transcendante entière. On obtient aisément le coefficient de x^n dans le développement en série de $\mathrm{Q}(x)$ sous forme d'une intégrale définie; mais la complication de cette intégrale définie fait désirer la connaissance d'un autre développement plus simple. M. Tannery est parvenu, dans le cas où la variable x est réelle, à l'expression suivante :

$$e\mathrm{Q}(x) = \cfrac{1}{2 - x - \cfrac{1(1-x)}{4 - x - \cfrac{2(2-x)}{6 - x - \cfrac{3(3-x)}{8 - x - \ldots}}}},$$

dont il donne la démonstration.

Appell. — Sur les fonctions abéliennes. (1702).

Généralisation des théorèmes sur le nombre des zéros et des infinis d'une fonction doublement périodique compris dans un même parallélogramme élémentaire.

Considérons les p fonctions abéliennes

$$\begin{aligned} x_1 + \ldots + x_p &= f_1(u_1, \ldots, u_p) = s_1,\\ x_1x_2 + \ldots &= f_2(u_1, \ldots, u_p) = s_2,\\ x_1 \ldots x_p &= f_p(u_1, \ldots, u_p) = s_p.\end{aligned}$$

Si l'on donne à $s_1, \ldots, s_p$ des valeurs déterminées, les équations précédentes

donneront pour $u_1, \ldots, u_p$ une infinité de systèmes de valeurs; imaginons ces systèmes partagés en groupes de telle façon que deux systèmes de valeurs

$$u'_1, \ldots, u'_p \quad \text{et} \quad u''_1 - u''_p$$

se trouvent dans des groupes différents ou dans le même groupe suivant que les différences

$$u'_1 - u''_1, \ldots, u'_p - u''_p$$

forment ou non un système de périodes. M. Appell démontre les deux théorèmes suivants :

1° Le nombre des systèmes appartenant à un même groupe est m^p, quels que soient $s_1, s_2, \ldots, s_p$;

2° Les m^p systèmes de valeurs formant un même groupe se partagent de plusieurs façons en m^{p-1} sous-groupes formés chacun de m systèmes tels que, si l'on désigne par

$$\begin{array}{lll} u_1, & \ldots, & u_p, \\ u'_1, & \ldots, & u'_p, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ u_1^{(m-1)}, & \ldots, & u_p^{(m-1)} \end{array}$$

les m systèmes de l'un de ces sous-groupes, on ait les relations

$$u_i + u'_i + \ldots + u_i^{(m-1)} = C_i,$$

dans lesquelles les C_i sont des constantes indépendantes des valeurs attribuées à $s_1, \ldots, s_p$.

Picard (*E.*). — Sur la réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques. (1704).

Complément à une Communication du 9 mars 1881, où l'auteur a examiné des cas de réduction des intégrales hyperelliptiques du premier genre aux fonctions elliptiques. Après avoir rappelé ses premiers résultats, M. Picard s'attache à montrer comment on obtiendra la substitution analytique qui transforme l'intégrale abélienne en une intégrale elliptique.

MONATSBERICHTE der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1).

Année 1878.

Kummer. — Sur les surfaces qui sont de même ordre et ont les mêmes singularités que leurs surfaces polaires réciproques. (25-36).

---

(1) Voir *Bulletin*, II_2, 184.

De telles surfaces s'obtiennent, en général, par la considération de congruences de droites pour lesquelles l'ordre et la classe sont des nombres égaux, si la congruence considérée est de même nature que la congruence polaire réciproque; la surface focale est alors, en général, de même ordre que la surface polaire réciproque et présente les mêmes singularités; c'est la voie qui a conduit M. Kummer à la surface du quatrième ordre à laquelle son nom est resté attaché. Il donne aujourd'hui un nouvel exemple de la fécondité de cette méthode, en considérant une congruence du troisième ordre et de la troisième classe.

Les congruences de cette nature se divisent en deux espèces d'égale généralité : pour les unes les trois droites qui passent par un même point sont toujours dans un même plan; pour les autres il n'en est pas ainsi; c'est de cette deuxième espèce que traite M. Kummer.

En désignant par x, y, z les coordonnées d'un point d'un rayon, par ξ, η, ζ ses cosinus directeurs, en posant

$$u = y\zeta - z\eta, \quad v = z\xi - x\zeta, \quad w = x\eta - y\xi,$$

en désignant enfin par K, L, M, K′, L′, M′ six fonctions linéaires à coefficients constants des quantités $u, v, w, \xi, \eta, \zeta$, il est clair que les deux équations du second degré

$$LM' - L'M = 0, \quad MK' - M'K = 0$$

déterminent une congruence du quatrième ordre et de la quatrième classe; mais, ces deux équations étant satisfaites par les deux équations

$$M = 0, \quad M' = 0,$$

qui déterminent une congruence du premier ordre et de première classe, on voit que, en supprimant les rayons qui appartiennent à cette congruence, il reste une congruence du troisième ordre et de la troisième classe : celle-ci pourra être définie par les trois équations

$$K - \lambda K' = 0, \quad L - \lambda L' = 0, \quad M - \lambda M' = 0,$$

qui contiennent le paramètre variable λ.

Ces trois équations, ordonnées par rapport à ξ, η, ζ, prennent la forme

$$\begin{aligned}
(p - \lambda p')\xi + (p_1 - \lambda p'_1)\eta + (p_2 - \lambda p'_2)\zeta = 0,\\
(q - \lambda q')\xi + (q_1 - \lambda q'_1)\eta + (q_2 - \lambda q'_2)\zeta = 0,\\
(r - \lambda r')\xi + (r_1 - \lambda r'_1)\eta + (r_2 - \lambda r'_2)\zeta = 0.
\end{aligned}$$

En éliminant ξ, η, ζ, on trouve une équation du troisième degré en λ dont les coefficients sont du deuxième degré en x, y, z; les trois racines de cette équation correspondent aux trois droites qui passent par le point (x, y, z); en écrivant que cette équation a une racine double, on obtient la surface focale de la congruence, que l'on peut aussi regarder comme l'enveloppe d'une surface du deuxième degré; elle est du huitième ordre. C'est la surface F qu'étudie M. Kummer.

Elle est du même ordre que la surface polaire réciproque et présente les mêmes singularités; en effet, la congruence polaire réciproque se déduit de la congruence précédente par l'échange, dans les fonctions K, ..., M′, des coefficients de u, v, w et de ξ, η, ζ : on voit que les surfaces focales de la congruence don

née et de la congruence polaire réciproque ne diffèrent que par les valeurs des constantes.

La courbe d'inflexion de la surface F, obtenue en écrivant que les trois racines de l'équation en λ sont égales, est du douzième ordre.

La surface F a douze plans tangents singuliers qui la touchent suivant des courbes courbées du second degré.

Elle a douze points singuliers pour lesquels les cônes des tangentes sont du second degré.

Les douze points singuliers se rangent en six couples, dont chacun est situé sur l'une des six droites suivant lesquelles se coupent les plans tangents singuliers correspondants.

Chaque plan tangent singulier est quatre fois osculateur de la courbe d'inflexion. Les quatre points d'osculation appartiennent à la conique suivant laquelle le plan touche la surface F.

Les génératrices rectilignes d'un même système d'une des surfaces du second degré qui correspond à une valeur particulière de λ sont toutes des rayons de la congruence considérée; en faisant varier λ, ces génératrices engendrent tous les rayons de la congruence considérée; en prenant les génératrices de l'autre système, on obtient une autre congruence ayant la même surface *focale*, qui, ainsi, peut être engendrée de deux manières distinctes.

Kronecker. — Sur les séries de puissances. (53-58).

L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int e^{z}\, d\log z,$$

où $z = x + yi$, est égale à $+1$ ou à zéro suivant que x est positif ou négatif, lorsqu'on prend l'axe des y pour chemin d'intégration depuis $y = -\infty$ jusqu'à $y = -\infty$.

Ceci posé, soit la série régulièrement (*gleichmässig*) convergente

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n e^{-\lambda_n \zeta},$$

où $\zeta = \xi + i\eta$, et où les quantités réelles λ croissent avec l'indice n; la remarque précédente fournit le résultat suivant :

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(z)\, e^{wz}\, d\log z = \sum_{k=0}^{k=n} c_k,$$

où l'on suppose que x est positif, que le chemin d'intégration va sur l'axe des y, de $-\infty$ à $+\infty$ et où w est une quantité comprise entre λ_n et λ_{n+1}. Cette égalité donne, non seulement la détermination des coefficients e_n, mais encore des quantités λ_n qui sont les valeurs qui rendent discontinue la fonction de w définie par l'intégrale

$$\int f(z)\, e^{wz}\, d\log z,$$

laquelle reste constante entre deux valeurs consécutives de λ. En multipliant cette équation par

$$\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \Phi(w)\, dw,$$

faisant une sommation depuis $n = 0$ jusqu'à $n = r$, et posant enfin

$$f(z) = z\,\mathrm{F}(z),$$

on obtient

$$\frac{1}{2\pi i}\int\!\!\int \mathrm{F}(z)\,\Phi(w)\,e^{wz}\,dw\,dz = \sum_{n=0}^{n=r-1} c_n \int_{\lambda_n}^{\lambda_r} \Phi(w)\,dw\,;$$

dans le premier membre, l'intégration par rapport à w doit être effectuée depuis une valeur égale ou inférieure à λ_0, jusqu'à λ_r.

En prenant

$$\Phi(w) = \zeta e^{-w\zeta} \quad (x < \xi)$$

et en supposant r infini, on obtient la formule remarquable

$$\frac{1}{2\pi i}\int\!\!\int \mathrm{F}(z)\,e^{w(z-\zeta)}\,dw\,dz = \mathrm{F}(\zeta).$$

En effectuant d'abord l'intégration par rapport à w, on tombe sur la formule de Cauchy ; en effectuant l'intégration par rapport à z, on retrouve le développement en série de

$$\mathrm{F}(\zeta) = \frac{1}{\zeta}\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n e^{-\lambda_n \zeta}.$$

L'intégrale dont on est parti est égale à 1 pour $x = 0$; ainsi

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin y \, d\log y = 1,$$

et, par suite, la valeur de

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\alpha v \cos\beta v \, d\log v$$

est égale à 1 ou zéro, selon que la valeur absolue de α est égale ou inférieure à β.

Cette remarque permet de déterminer, dans les séries supposées uniformément convergentes,

$$\varphi(v) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \cos\mu_n v,$$

$$\psi(v) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b_n \sin\nu_n v,$$

où les quantités positives μ_n et ν_n vont en croissant avec l'indice n, d'une part, les coefficients a, b de l'autre, les quantités μ, ν elles-mêmes, ainsi qu'il résulte des égalités

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v)\sin vw \, d\log v = \sum_{k=0}^{k=n} a_k, \quad \mu_n < w < \mu_{n+1},$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(v)\cos vw \, d\log v = \sum_{k=n}^{k=\infty} b_k, \quad \nu_{n-1} < w < \nu_n.$$

Enfin un calcul tout semblable à celui qui a été décrit précédemment conduit aux équations suivantes, où $\Phi(v)$ et $\Psi(v)$ sont mis à la place de $\frac{1}{v}\varphi(v)$, $\frac{1}{v}\psi(v)$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_0^{\mu_r} \Phi(v)\Phi_1(w)\sin vw\, dw = \sum_{n=0}^{n=r} a_n \int_{\mu_n}^{\mu_r} \Phi_1(w)\, dw,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_0^{\nu_r} \Psi(v)\Psi_1(w)\cos vw\, dw = \sum_{n=0}^{n=r} b_n \int_0^{\nu_r} \Psi_1(w)\, dw.$$

Et en particulier, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(v)\sin uw \sin vw\, dv\, dw = 2\pi\,\Phi(u),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(v)\cos uw \cos vw\, dv\, dw = 2\pi\,\Psi(u),$$

égalités qui conduisent immédiatement à la série de Fourier.

Kronecker. — Sur les fonctions de Sturm (95-121).

Kronecker. — Sur la caractéristique d'un système de fonctions (145-152).

Ces Communications de l'illustre algébriste se rapportent à un ordre d'idées dont l'origine se trouve dans les Mémoires de l'auteur, insérés dans les *Monatsberichte* de l'année 1869. L'ensemble des publications de M. Kronecker sur ce sujet sera analysé ultérieurement.

Wangerin. — Sur la réduction de l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

à des équations différentielles ordinaires. (152-166).

Étant donné un corps à l'intérieur ou à l'extérieur duquel cette équation doit être vérifiée, le procédé que l'on suit ordinairement consiste à trouver un système triple orthogonal ρ, ρ', ρ'', tel que la surface qui limite le corps soit contenue dans l'un des faisceaux, le faisceau ρ par exemple : on cherche ensuite à satisfaire à l'équation aux dérivées partielles, où les variables ρ, ρ', ρ'' remplacent les variables x, y, z par des expressions de la forme

$$V = \lambda R R' R'',$$

où R est fonction de ρ seulement, etc., et où chacune des fonctions R, R', R'' contient, outre la coordonnée qui y figure, deux paramètres arbitraires. La solution générale est donnée par la somme de toutes les solutions particulières. Les corps pour lesquels cette méthode réussit sont : la sphère, l'ellipsoïde, le volume compris entre deux sphères excentriques, le tore circulaire, enfin les corps limi-

tés par une surface dont l'équation est de la forme

$$(x^2 + y^2 + z^2) + Ax^2 + By^2 + Cz^2 = \pm D^2.$$

M. Wangerin traite le cas des corps de révolution et montre que le nombre des corps pour lesquels la méthode précédente réussit est limité. Elle ne s'applique qu'aux corps précédemment cités et à celui dont la courbe méridienne se déduit de la courbe

$$(x^2 + y^2)^2 + Ax^2 + By^2 = \pm D^2,$$

par la substitution

$$x + iy = \frac{\alpha + \beta(\xi - i\eta)}{\gamma - \delta(\xi - i\eta)}.$$

Chwolson. — Sur le magnétisme induit dans deux sphères par des forces qui agissent symétriquement par rapport à la ligne des centres. (269-276).

Cayley. — Sur une surface réciproque à elle-même. (309-313).

M. Cayley s'était déjà occupé en 1868 de la recherche des surfaces qui sont de même ordre et présentent les mêmes singularités que leurs polaires réciproques. (*Proc. London Math. Soc.*, t. II, p. 61-63).

Il avait remarqué que, si une surface est regardée comme l'enveloppe d'une surface quadrique satisfaisant à certaines conditions, la surface polaire réciproque est donnée comme l'enveloppe d'une quadrique satisfaisant aux conditions réciproques; or, si les conditions sont réciproques à elles-mêmes, il en résulte que la surface est réciproque à elle-même.

La surface du huitième ordre signalée par M. Kummer rentre dans la théorie. Voici comment M. Cayley parvient à cette surface : considérant une droite L dont les six coordonnées

$$a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h$$

vérifient les trois relations linéaires

$$f_i a + g_i b + h_i c + a_i f + b_i g + c_i h = 0, \quad (i = 1, 2, 3),$$

le lieu de cette droite sera une surface T du second degré dont les coefficients sont des déterminants du troisième ordre formés au moyen des quantités $a_i, \ldots, h_i$; l'équation en coordonnées-plan de la surface polaire réciproque par rapport à la quadrique

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2 = 0$$

se déduira de l'équation de la surface T par l'échange des quantités a_i, b_i, c_i; f_i, g_i, h_i : si maintenant on regarde $a_i, \ldots, h_i$ comme des fonctions linéaires du paramètre λ, la surface T aura pour enveloppe la surface du huitième ordre de M. Kummer.

Helmholtz. — Sur le téléphone (488-500).

Oppolzer. — Nouvelle méthode pour la détermination des éléments de l'orbite d'une petite planète au moyen des observations d'une seule apparition. (583-602).

Kummer. — Nouvelle preuve élémentaire de ce théorème : la suite des nombres premiers est illimitée. (777-778).

Si cette suite était limitée, en désignant par P le produit de tous les nombres premiers, le nombre $\varphi(P)$ des nombres premiers et inférieurs à P serait égal à 1, ce qui est en contradiction avec la règle connue pour la formation de ce nombre.

Oppolzer. — Développement des dérivées par rapport à l'excentricité de l'anomalie vraie et du rayon vecteur dans les orbites presque paraboliques. (852-859).

Année 1879.

Kronecker. — Sur la théorie des équations algébriques. (205-239).

I. Simplification de la démonstration d'Abel touchant l'impossibilité de résoudre algébriquement les équations de degré supérieur à 4.

II. Sur la résolution des équations dont le degré est un nombre premier.

III. Sur la classe des équations dont dépend la division des fonctions elliptiques.

Kirchhoff. — Sur les oscillations permanentes d'un liquide pesant. (395-410).

Weierstrass. — Addition au Mémoire inséré dans les *Monatsberichte* de 1858 (p. 207-220). « Sur un théorème concernant les formes homogènes du second degré. » (430-445).

La Communication de M. Weierstrass contient d'abord une démonstration remarquablement simple de cette proposition bien connue : Si $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont deux formes quadratiques à coefficients réels et si la forme $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est positive pour tout système de valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pourvu que ces valeurs ne soient pas toutes nulles, l'équation obtenue en éliminant $x_1, \ldots, x_n$ entre les équations

$$\begin{gathered}
S\varphi(x_1, \ldots, x_n)_1 - \psi(x_1, \ldots, x_n)_1 = 0,\\
S\varphi(x_1, \ldots, x_n)_2 - \psi(x_1, \ldots, x_n)_2 = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
S\varphi(x_1, \ldots, x_n)_n - \psi(x_1, \ldots, x_n)_n = 0
\end{gathered}$$

a toutes ses racines réelles; le symbole

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n)_h$$

a le sens $\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_h}$.

L'existence d'une racine $K + li$ entraînerait en effet l'existence d'un système de valeurs $\xi_1 + \eta_1 i, \ldots, \xi_n + \eta_n i$ non nulles à la fois qui vérifieraient les équations précédentes.

On en conclurait

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{K}\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)_h - \psi(\xi_1, \ldots, \xi_n)_h - l\varphi(\eta_1, \ldots, \eta_n)_h = 0 \\ \mathrm{K}\varphi(\eta_1, \ldots, \eta_n)_h - \psi(\eta_1, \ldots, \eta_n)_h - l\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)_h = 0 \end{array}\right\} h = (1, 2, \ldots, n),$$

et l'on déduirait de là bien aisément

$$l[\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n] - \varphi[(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)] = 0,$$

égalité manifestement contradictoire avec l'hypothèse.

L'auteur traite ensuite de l'intégration des équations linéaires à coefficients constants

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \frac{\partial \mathrm{G}(x_1, \ldots, x_{2n})}{\partial x_{n+\alpha}},$$

$$\frac{dx_{n+\alpha}}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{G}(x_1, \ldots, x_{2n})}{\partial x_\alpha},$$

où G est une forme quadratique essentiellement positive, sauf pour

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

En posant

$$\mathrm{S}_{n+\alpha} + \frac{\partial \mathrm{G}(x_1, \ldots, x_{3n})}{\partial x_\alpha} = y_\alpha$$

$$-\mathrm{S}\, x_\alpha + \frac{\partial \mathrm{G}(x_1, \ldots, x_{2n})}{\partial x_{n+\alpha}} = y_{n+\alpha}.$$

on obtiendra, en résolvant par rapport aux x,

$$x_\alpha = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=2n} \frac{f(\mathrm{S})_{\lambda,\mu}}{f(\mathrm{S})} y_\lambda,$$

où $f(\mathrm{S})$ est le déterminant des équations précédentes et $f(\mathrm{S})_{\lambda,\mu}$ un mineur de ce déternrinant.

M. Weierstrass établit, relativement à l'équation

$$f(\mathrm{S}) = 0,$$

qu'elle n'a que des racines purement imaginaires et que, si elle admet p fois la racine $\mathrm{S}_1 i$, $f(\mathrm{S})_{\lambda,\mu}$ est divisible par $(\mathrm{S} - \mathrm{S}_1 i)^{p-1}$. Si maintenant l'on désigne par $\pm \mathrm{S}_1 i, \ldots, \pm \mathrm{S}_r i$ les racines distinctes de l'équation $f(\mathrm{S}) = 0$ et que l'on représente par le symbole

$$(\lambda, \mu)_\rho - i(\lambda, \mu)'_\rho$$

le coefficient de $(\mathrm{S} - \mathrm{S}_1 i)^{-1}$ dans le développement de

$$\frac{f(\mathrm{S})_{\lambda,\mu}}{f(\mathrm{S})},$$

suivant les puissances de $\mathrm{S} - \mathrm{S}_1 i$; si l'on pose en outre

$$\varphi(t)_{\lambda,\mu} = 2\sum_{\rho=1}^{r} [(\lambda, \mu)_\rho \cos \mathrm{S}_\rho (t - t_0) - (\lambda, \mu)'_\rho \sin \mathrm{S}_\rho (t - t_0)],$$

on aura pour la solution la plus générale des équations proposées

$$x_\mu = \sum_{\alpha=1}^{n} [x^0_{n+\alpha}\varphi(t)_{\alpha,\mu}\, x^0_\alpha\varphi(t)_{n+\alpha,\mu}],$$

le symbole x^0_α désignant la valeur de x_α pour $t = t_0$.

Kirchhoff. — Sur les oscillations transversales d'une barre de section quelconque. (815-828).

Ketteler. — Théorie des milieux absorbants non isotropes. (879-920).

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES, publié sous la direction de M. BOURGET.

Tome I; 1877.

Le *Journal de Mathématiques élémentaires*, dont la publication remonte déjà à cinq années, a été créé par M. Bourget, directeur des études à Sainte-Barbe, dans le but de combler une lacune qu'avait jusqu'à ce jour présentée la série française des publications périodiques destinées aux étudiants en Mathématiques des divers degrés, ainsi qu'aux professeurs chargés de la délicate mission de les instruire.

Imaginé sur un plan analogue à celui des *Nouvelles Annales* de M. Gerono, dont les preuves étaient faites depuis longtemps, le nouveau Journal s'est proposé de rendre aux Cours élémentaires le même service que celles-ci aux Cours de Mathématiques spéciales, qui ont certainement dû à ce recueil, aussi intéressant qu'instructif, une bonne part de leurs perfectionnements successifs.

Les matières qui trouvent place dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* peuvent se ranger dans les cinq catégories suivantes :

1° Exposés didactiques de théories classiques;

2° Critiques et discussions de questions d'enseignement;

3° Mélanges historiques;

4° Comptes rendus d'examens français ou étrangers;

5° Questions diverses et solutions des questions proposées.

Pour les trois premières catégories, les rédacteurs font appel au concours de correspondants, principalement aux professeurs le mieux à même de donner leur note dans le grand concert universitaire, et d'en adoucir l'harmonie, parfois un peu criarde. Les solutions des questions proposées doivent au contraire, pour obtenir l'insertion, émaner uniquement d'élèves, mesure des plus sages, qui, stimulant les jeunes intelligences par une sorte de concours constamment ouvert, ne contribue pas peu à développer les talents en germe, et à entretenir ce « *feu sacré* » qui seul, en Mathématiques comme dans toute production humaine, peut opérer la transformation de « l'ouvrier en artiste, c'est-à-dire en créateur ».

Nous ne pourrions, sans excéder les limites imposées à un compte rendu, mentionner toutes les questions posées et résolues dans le Journal, qui intéresseraient d'ailleurs médiocrement les lecteurs du *Bulletin;* nous nous bornerons aux plus importantes.

Bourget (*J.*). — Principes élémentaires sur les déterminants. (5-11; 33-37; 65-68; 97-102; 129-131; 193-194).

Exposition classique des définitions, propriétés, calcul, transformation des déterminants des quatre premiers ordres. Application de la théorie des déterminants à la résolution des équations du premier degré à deux et à trois inconnues; de m équations homogènes à $m+1$ inconnues. Produit de deux déterminants.

Morel (*A*). — Projection stéréographique. (12).

Lidy. — Note sur les polygones étoilés. Surfaces et contours. (13-14).

Bourget (*J.*). — Sur quelques perfectionnements à apporter dans l'enseignement de la Géométrie élémentaire. (15-20).

Le principe de la ligne droite, plus court chemin d'un point à un autre, n'est pas irréductible. — Théorèmes d'égalité de triangles.

Suter (*H.*), traduit par M. Melon. — Histoire des Mathématiques. (27-30; 56-59; 84-88; 346-348; 368-378).

Introduction. — Pénurie des traités historiques sur la question. Montucla, Chasles, Libri, Quetelet, R. Wolf. Premières origines de la Science chez les peuples les plus anciens du monde historique. Arithmétique chez les Phéniciens, Grecs, Chinois; l'abaque chez les Orientaux et les Romains. Symboles de numération: deux systèmes principaux suivant que la position du chiffre modifie ou non sa valeur absolue.

Chapitre II. — L'Astronomie fut la première Science. Division du temps; cycle; périodes lunisolaires; Saros des Chaldéens; 223 lunaisons après lesquelles le Soleil et la Lune reprennent leur même position relative. Observation des éclipses par les Égyptiens. Zodiaque. Période de Sothis, ou caniculaire. 1460 ans. Astronomie des Chinois, et année de $365^j 5^h 49^m 12^s$. L'Astronomie reste sans faire de progrès jusqu'à la chute de la dynastie de Dschengiskhan. Astronomie indienne peu connue; cycle chinois de 19 ans = 235 mois lunaires.

Bourget (*J.*). — Notions sur les méthodes de démonstration usitées en Mathématiques. (37-40).

Extraites la Géométrie de Vincent.

Dellac (*H.*). — Problème du Myosotis. (40-45).

Nous nous permettrons, à ce sujet, une légère critique. La question est développée par l'auteur, ainsi qu'elle pourrait l'être au *tableau*, en conférence, à une classe d'élèves de toutes forces. Les détails par trop développés, et un peu *terre à terre*, parfois nécessaires dans un cours oral, deviennent des *longueurs* dans un article écrit, que les élèves à conception lente pourront travailler à loisir. La concision et l'élégance sont deux qualités qu'il ne faut jamais perdre de vue dans un article de Revue scientifique de la nature du journal, qui doit toujours être conçu comme s'il avait pour but de servir de modèle à l'étudiant.

Morel. — Détermination de la sensibilité d'une balance ordinaire. (45-49).

Déduite de la composition des forces parallèles. *Voir* (107) une note de M. Colot sur la démonstration de la formule générale.

Hoüel. — Correspondance. (63-64).

Démonstration, d'après Héron, de la vingtième proposition du premier Livre d'Euclide.

Bourget (*J.*). — Réflexions sur les calculs numériques imposés aux candidats dans les concours. Dispositions à donner aux calculs par logarithmes. (68-72).

On oublie trop fréquemment que l'approximation d'un résultat ne saurait être supérieure à celle des données.

Rebout (*Eugène*). — Des cubes égaux à la somme de trois ou quatre cubes entiers. (73-74).

Cochez. — Études de maxima et minima. (74-79; 232-238; 261-265; 296-300).

Méthode de Fermat; applications géométriques. Problème de Frenet : quel est, entre deux sphères, le point de la ligne des centres d'où la somme des surfaces des zones aperçues est maximum. Problème de Haddon. Point analogue sur la circonférence décrite sur la ligne des centres.

Morel. — Duplication du cube. Problème de Pappus. (80-81).

Cochez. — Problème des courses de chevaux. (110-112).

Buguet. — Autre solution du problème des courses. (112-114).

Hoüel (J.). — Du rôle de l'expérience dans les sciences exactes. (118-121; 152-154; 187-189; 213-215).

La partie de la Science qui consiste à rassembler les faits et à en conclure les lois et principes de la Science appartient essentiellement à l'observation. L'exactitude des résultats n'est jamais qu'approchée. L'étude logique des conséquences sert de critérium à leur exactitude.

Des grandeurs discrètes ou numériques et concrètes ou continues. L'expérience est quasi étrangère à l'Arithmétique.

Toute science abstraite est absolument vraie au point de vue théorique; mais elle peut bien n'être pas applicable au monde réel, être fausse au point de vue des phénomènes physiques, si les hypothèses qui lui ont donné naissance sont erronées, ou seulement si elles ont été l'objet d'illégitimes simplifications. La Géométrie est fondée sur l'hypothèse, conforme à l'expérience, de la possibilité du déplacement de figures invariables dans un espace immobile et indéfini. Les premières notions sont celle de la droite, ligne des points immobiles dans la rotation d'un corps dont on fixe deux points : celle de l'immobilité du corps dont trois points sont fixés; celle du plan, ou surface superposable sur elle-même par retournement. Ces hypothèses suffisent à l'établissement de la géométrie de Bolyai et Lobatchefski, dont la Géométrie ordinaire est un cas particulier, conforme aux propriétés constatées de l'étendue, et pour laquelle un certain paramètre, indéterminé dans la Géométrie « générale », a zéro pour valeur. Cette hypothèse correspond à l'idée de direction unique pour le parallélisme, admise comme « évidente ». M. Hoüel fait observer que l'évidence n'est en somme que l'accord constant d'expériences innombrables. C'est un point trop oublié, à notre avis, et que l'étude philosophique de la probabilité, ou « vérité pratique », malheureusement trop négligée des mathématiciens, mettrait en « évidence ».

En résumé, dans la Géométrie, il faut reconnaître deux parts : 1° une physique, justifiant les hypothèses admises; 2° une théorique, en développant les conséquences. Cette dernière seule est une science exacte, à laquelle appartient véritablement la certitude mathématique.

Bourget (J.). — Relations entre les éléments d'un triangle. (128).

Rouché (E.). — Une équation du $m^{\text{ième}}$ degré ayant $m+1$ racines est identique (131-132).

Vazeille. — De l'involution. (132-134; 161-165).

Définition : représentation de la fonction rationnelle du second degré en ses deux termes.

La distinction de l'involution en deux espèces, selon que les points doubles sont réels ou imaginaires, nous paraît une complication regrettable.

Dostor (J.). — Propriétés nouvelles des polyèdres réguliers

convexes. Expressions diverses du volume. (134-138; 167-170; 229-232).

André (*Désiré*). — Nombre des arrangements avec répétition de trois lettres distinctes, p à p, commençant par une même lettre, et contenant les trois lettres. (165-166).

$$x_p = 3^{p-1} - 2^p + 1.$$

Laudi. — Inscription du triangle de périmètre minimum dans un triangle acutangle. (170).

Bourget (*J.*). — Extraction abrégée de la racine carrée. (194-199).

Bezier. — Construction du centre de gravité du trapèze. (204).

Cochez. — Théorie de l'inversion. (225-229; 257-261; 321-323; 353-357.

Le système articulé de Peaucellier, transformant rigoureusement l'un dans l'autre un mouvement rectiligne et un mouvement circulaire, en est une application industrielle pratique. Principes généraux; transformation des droites en cercles passant au pôle, des plans en sphères passant au pôle. Le changement de module produit des figures homothétiques. Des figures anallagmatiques, ou leur propre réciproque.

Inversion d'une circonférence. Inverseur Peaucellier : deux angles d'articulation d'un losange articulé sont également angles d'articulation d'un triangle isoscèle articulé dont le sommet est fixe. Les deux angles libres du losange décrivent des figures inverses. Parallélogramme de Watt-Peaucellier. Inverseur de Hart, quadrilatère articulé à côtés opposés égaux. Si un point est fixe, les points divisant les deux autres côtés égaux proportionnellement au côté tournant décrivent des figures inverses.

Du cercle d'inversion; identité de la polaire réciproque par rapport au cercle d'inversion et de l'inverse de la podaire. Les figures à axes de symétrie sont des anallagmatiques.

Quelques théorèmes. Valeur du rayon R d'une circonférence tangente à trois circonférences tangentes entre elles, de rayons respectifs α, β, γ :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \pm 2\sqrt{\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}}.$$

Dostor (*Georges*). — Évaluation des surfaces des polygones égrédients et étoilés. (289-295; 324-331).

Le polygone égrédient est un polygone plan dont les côtés sont deux à deux en ligne droite; on ne considère que les sommets saillants et les côtés sont formés des deux parties en ligne droite. Soient n le nombre des côtés, p celui des

sommets à droite, et q des sommets à gauche de chaque côté, on a

$$n = p + q + 2.$$

L'espèce du polygone est le plus petit des deux nombres $p + 1$ et $q + 1$.

Les polygones convexes sont de première espèce. Génération des polygones d'espèces successives. Il y a $\frac{n-1}{2}$ espèces de polygones de n côtés (ensemble de deux segments). Les angles saillants d'un polygone d'espèce e sont les sommets des angles rentrants du polygone d'espèce $e + 1$ provenant du même polygone convexe. Soit $S_{n,p}$ la somme des angles saillants d'un polygone de n côtés d'espèce p, on a

$$S_{n,p+1} - S_{n,p} = 4 \text{ droits},$$
$$S_{n,p} = 2(n - 2p) \text{ droits}.$$

La somme des angles extérieurs est égale à $4p$ angles droits.

Polygones réguliers égrédients. La différence entre un angle rentrant et un angle saillant du polygone régulier ne dépend que de la nature et non de l'espèce; elle égale $\frac{4dr}{n}$. L'angle au centre $\alpha_{n,p}$ du polygone régulier de n côtés, espèce p, a pour valeur $\frac{2p\pi}{n}$; sa surface

$$S_{n,p} = n\,R^2_{n,p}\,\frac{\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{p}{n}\pi}{\cos\frac{p-1}{n}\pi},$$

en fonction du rayon du cercle circonscrit.

Deux classes de polygones égrédients : 1° étoilés (Poinsot) ou à périmètre continu; 2° composés, ou formés de deux ou plusieurs polygones d'un même nombre de côtés, superposés sans se confondre : polygones anétoilés, rayonnés, dentelés ou pseudo-étoilés.

Bourget (J.). — Évaluation à une unité près de la racine $m^{\text{ième}}$ d'un nombre entier, quand m est le produit des facteurs $p, q, r, \ldots$ (323-324)

$$\left(\sqrt[pqr\ldots]{A}\right) = \left(\sqrt[p]{\sqrt[q]{\sqrt[r]{\ldots A}}}\right).$$

Cochez (J.). — Décomposition d'une fraction en une somme de fractions simples. (332-335).

Démonstration classique par les coefficients indéterminés.

Morel (A.). — Théorème d'Yvon Villarceau. (335-336).

Construction de la courbe d'intersection du plan bitangent au tore et démonstration par les méthodes de la Géométrie descriptive.

Dostor. — Règle mnémonique pour établir la théorie des signes en Trigonométrie. (357-361).

Comptes rendus d'examens aux écoles du Gouvernement, aux Con-

cours des Facultés et aux Concours académiques (4e catégorie). (20-27, 49-51, 51-53, 53-56, 81-84, 114-118, 138-148, 148-151, 171-186, 199-204, 205-213, 238-249, 266-284, 310-311, 315-319, 337-346, 361-368).

Examens anglais : (121-122). *Belges* (183).

Questions proposées. — (30-32, 59-62, 95-96, 126-127, 223-224, 255-256, 288, 319-320, 352, 382-384).

Solutions de questions proposées. — (59-62, 88-95, 122-126, 154-158).

Bergeron. — Le plus grand quadrilatère inscrit dans la demi-circonférence est la moitié de l'hexagone régulier inscrit. (190-192, 215-223, 249-255, 284-287, 311-315, 349-352, 372-382).

Le cadre d'un compte rendu ne saurait se prêter à l'analyse, même la plus succincte de ces questions; nous nous bornerons à exposer, très brièvement, quelques réflexions que nous a suggérées leur examen. Les rédacteurs, dans le choix de la solution publiée au milieu du grand nombre des similaires, simplement signalées, ne semblent pas s'être toujours suffisamment préoccupés de n'admettre à l'impression que les travaux d'élèves présentant un caractère particulier de correction et d'élégance, d'esprit de méthode qui permette de les présenter en quelque sorte comme modèle aux jeunes intelligences dont le style scientifique est à former. Il est tout à fait important, pour rendre la publication réellement utile, à notre point de vue absolument pratique, de ne jamais oublier que la concision est l'un des premiers caractères de l'élégance; que les déductions doivent être serrées et précises; que l'on doit éliminer de la solution imprimée, sous peine de la rendre diffuse, toute digression superflue qui trouvera souvent sa place dans une discussion détaillée, difficile à admettre dans le journal, mais qu'il y aurait tout au moins lieu de rejeter à la fin de la *rédaction*.

Dans les questions de Géométrie, les solutions dites *géométriques* sont à juste titre considérées comme les plus élégantes, et comme supérieures à celles qui ont le calcul pour base. Mais la méthode de déduction analytique, ou d'invention, doit être recherchée préférablement à la méthode synthétique ou d'exposition; cette dernière a toujours un certain cachet de pédantisme impuissant, alors que la virilité féconde est l'apanage de la méthode analytique.

On ne saurait trop se pénétrer d'autre part de ce sentiment, que la qualité géométrique de la solution ne consiste pas dans la forme même des expressions écrites, mais dans la conduite du raisonnement. Ainsi, par exemple, l'expression $ab \sin C$ du double de la surface du triangle est tout aussi géométrique que $AB \times CH$; elle devra fréquemment lui être préférée dans les solutions de problèmes où l'angle c se présente naturellement, s'il doit en résulter une simplification des lignes de construction. Il ne faut pas oublier en même temps que le nombre moindre de lignes géométriques entrant dans la démonstration, ou la construction définitive, est une des qualités de l'élégance, ainsi que celui, également le plus restreint, de connaissances auxquelles il est fait appel.

Il nous paraîtrait également utile que les rédacteurs, tout en choisissant parmi

les copies adressées celle qui renferme la plus grande somme de qualités, en fissent parfois l'examen critique, un journal destiné principalement à des élèves devant nécessairement se proposer pour but d'offrir à ses correspondants inexpérimentés des modèles propres à les guider dans leurs rédactions et à former leur raisonnement et leur style, et les accompagner de conseils faisant ressortir les qualités et les imperfections du modèle, le but à atteindre et les écueils à éviter.

Tome II; 1878.

Cochez. — Théorie de l'inversion. (3-8, 33-37).

Transformation des distances et des aires. — Transformation des angles; projection stéréographique.

(*M.*), professeur agrégé de l'Université. — Note sur la conversion des fractions décimales périodiques en fractions ordinaires. (9-12).

(*F.-R. A.*). — Étude sur les opérations de l'Arithmétique (*Suite.*) (12-16, 37-39, 65-68, 99-101, 129-131, 161-166, 193-197, 225-231).

Le Calcul arithmétique comporte trois familles d'opérations, comprenant chacune une opération directe (addition, multiplication, exaltation) et les deux premières une seule opération inverse (soustraction, division), tandis que la troisième en comprend deux (extraction et exponentiation). De la septième opération. Soit une progression géométrique telle que

$$\dot{\because}\ 3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96,$$

où

$$p = 3,\quad d = 96,\quad r = 2,\quad n = 6.$$

Les quatre nombres, termes extrêmes, raison, nombre des termes sont chacun fonction des trois autres. La septième opération consiste à isoler n, opération pour l'expression de laquelle M. F.-R. A propose le signe nouveau (:), d'où

$$n = 1 + \frac{d}{p}\,(\,:\,)\,r,$$

ce qui s'énoncerait $n = 1$ plus d sur p exponenté par r. Le Calcul de l'exponentiation se fait en divisant successivement par la raison, d'abord le dernier terme d, puis successivement tous les quotients obtenus, jusqu'au terme p, et en comptant le nombre de divisions opérées.

Des trois espèces de rapports, proportions et progressions. — Signes des rapports arithmétique, géométrique, algébrique. —, :, (:), qui sont aussi les symboles des proportions arithmétique, géométrique, algébrique. Signes conventionnels des progressions

: progression arithmétique ou par addition,
:: progression géométrique ou par multiplication,
::: progression algébrique ou par exaltation.

définies par les égalités

$$: d = p + r(n-1),$$
$$:: d = pr^{n-1},$$
$$::: d = p^{r^{n-1}} \quad \text{et} \quad n = 1 + \frac{d(:)p}{r}.$$

Propriétés de l'exponentiation ou des rapports algébriques. Théorèmes divers. On ne change pas la raison d'un rapport algébrique en élevant ses deux termes à la même puissance. Le rapport algébrique des puissances d'un nombre est le rapport géométrique de leurs exposants. La raison d'un rapport algébrique est inverse de celle du rapport renversé. La somme des deux rapports algébriques de conséquent commun est égale au produit des antécédents exponentié par le conséquent

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}.$$

Dans une proportion algébrique on peut permuter, soit les moyens, soit les extrêmes entre eux, soit changer les moyens en extrêmes et les extrêmes en moyens, d'où huit aspects équivalents d'une même proportion algébrique. Dans une suite de rapports algébriques égaux, on peut élever à la même puissance : 1° tous les termes; 2° les deux termes d'un rapport; 3° tous les antécédents; 4° tous les conséquents : on peut multiplier, ou diviser tous les antécédents par leurs conséquents ou réciproquement. Le produit des antécédents et celui des conséquents forment un rapport algébrique égal aux premiers

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}.$$

Résolution de l'exponentielle $a^x = b$, et calcul élémentaire des logarithmes. Développement en fraction continue de l'exposant x par une méthode analogue à celle de la recherche du plus grand commun diviseur.

L'auteur conclut à la possibilité, par l'emploi du signe de l'exponentiation, de ranger la fonction exponentielle parmi les fonctions élémentaires (non transcendantes). L'exponentiation dérive de la division de deux logarithmes, et peut servir au calcul de ceux-ci.

Morel (*A.*). — Note sur le trinôme et la fraction du second degré. (17-21).

Discussion graphique par le théorème des sécantes du cercle.

Questions d'examens et de Concours. Écoles du Gouvernement. Concours académiques. Baccalauréat. — (21-25, 43-46, 79-82, 107-109, 142-147, 171-178, 206-213, 243-251, 273-281, 303-311, 373-382).

Questions proposées. — (31-32, 63-64, 94, 160, 191-192, 224, 319-320, 352, 383-384).

Suter. — Histoire des Mathématiques. (*Suite*). (25-29, 46-50,

82-85, 137-141, 199-205, 251-253, 281-284, 311-316, 336-339).

La Science chez les Grecs. — Son importation d'Égypte. — Ses progrès jusqu'à la fondation de l'École d'Alexandrie. — Thalès et l'École Ionienne, Anaximandre, Anaximène. — Pythagore et l'École Italique, division de l'Arithmétique en ἀριθμητική, correspondant à notre théorie des nombres, et λογιστική, science pratique du calcul. — La Géométrie naissante est la représentation de connaissances arithmétiques. — Proportions et similitude; nombres polygonaux et théorie des polygones et polyèdres réguliers. — La musique à l'École pythagoricienne. — La trisection de l'angle par la quadratrice, dite de Dinostrate, inventée par Hippias d'Elis. — Hippocrate de Chios découvre de nombreux théorèmes sur les segments en recherchant la quadrature du cercle. — Sa lunule quarrable (μηνίσκος) surmontant le côté du carré.

Le manque de méthode et de liaison analytique dans les vérités est le défaut de la Géométrie de cette époque. — Antiphon et la longueur de la circonférence, que les philosophes de l'époque considèrent faussement comme moyenne arithmétique des limites de deux polygones inscrits et circonscrits du même nombre de côtés.

Astronomie pythagoricienne admettant un feu central autour duquel tournent la Lune, la Terre, le Soleil, les planètes et les étoiles dans des sphères harmoniques et concentriques. — Philolaos de Crotone. — Archytas de Tarente. — Aristarque de Samos enseigne que chaque étoile est un Soleil éclairant un monde. — Héraclide de Pont et Hikétos de Syracuse défendent l'idée de la rotation de la Terre sur un axe.

Malheureusement, les progrès de l'Astronomie sont arrêtés par les vaines spéculations philosophiques pour lesquelles on abandonne les études pratiques, *Jugement qui nous paraît un peu sévère; car nous ne croyons guère aux progrès de la Science pratique que le jugement et la discussion théorique ne viennent pas guider dans ses investigations et surtout dans le choix des résultats entremêlés d'erreurs* (1).

Les Grecs règlent le temps sur le cours de la Lune. — Année de Solon, six mois pleins de 30 jours, alternant avec 6 vides de 31, et 3 mois pleins de plus tous les huit ans. — Correction par les cycles de Méton et de Calippe.

Au ve siècle, Empédocle a des rudiments d'idées sur l'attraction. — Leucippe professe l'indestructibilité de l'atome en lequel se résolvent les corps. — Démocrite d'Abdère admet l'égalité de chute dans le vide, et invente la théorie optique de l'émission. Avec son instinct de l'immutabilité des lois naturelles, il est le précurseur de la méthode expérimentale d'invention.

Platon (Athènes, 430) considère les Mathématiques comme la base de la philosophie et la science d'éducation par excellence, fait des idées de Socrate un corps de doctrine; mais alors qu'en Mathématiques Socrate ne goûte que ce qui est immédiatement utile et applicable, Platon au contraire dédaigne le côté pratique et assigne aux Sciences un but purement idéal et spéculatif. Platon, rentrant d'Égypte et de Sicile, fonde l'Académie où ses disciples donnent le plus grand éclat à la Science jusqu'à Euclide. Malheureusement on n'a pu retrouver

---

(1) Si toutefois les spéculations dont il est question ont quelque rapport avec la logique scientifique. J. H.

que de rares fragments de leurs travaux. La conception la plus féconde de Platon est l'invention de la méthode analytique; on lui doit aussi la démonstration par l'absurde.

Ménechme, frère de Dinostrate, découvre les sections coniques qu'étudient Eratosthène et Géminus. Le plan sécant, pris perpendiculaire à l'arête, n'eut une inclinaison variable que sous Archimède, qui le premier découvrit les trois sections dans le même cône. Ménechme fait la duplication du cube par l'intersection des sections coniques; Archytas l'obtient par l'intersection d'un cylindre, d'un cône et d'un tore; il fait faire les premiers pas à la Stéréotomie. Eudoxe de Cnide étudie les proportions et les corps réguliers. — Enfin Aristée fait un traité des sections coniques qui fournit à Euclide, au dire de Pappus, les éléments de son œuvre.

Solutions. — (30-31, 50-63, 85-94, 101-105, 109-128, 147-157, 179-190, 213-223, 253-256, 284-288, 316-319, 340-351, 382-383).

Nous croyons devoir, comme dans le compte rendu du tome I, appeler l'attention toute spéciale des rédacteurs sur le choix des solutions insérées et l'utilité que présenterait parfois l'addition de quelques conseils ou observations critiques, destinés à redresser le jugement et à former le goût *artistique* des jeunes collaborateurs, dont les travaux ne sont le plus souvent que de *bonnes copies*. Prenons pour exemple, entre cent, la question 92 (p. 156).

On donne un point A, situé en dehors de la bande déterminée sur le plan par deux parallèles. On demande la position que doit prendre la perpendiculaire commune pour être vue du point A sous l'angle maximum.

La solution insérée est correcte, assurément, au point de vue de l'exactitude, mais telle que tout élève ayant convenablement suivi le cours doit pouvoir la présenter dans un examen au tableau ou une composition. Point d'imagination, ni surtout de sentiment géométrique de la question. Comme presque toujours on se dispense de penser, le choc des équations étant chargé de remplacer celui des idées. C'est ce que l'on peut appeler de la Science à l'orgue de Barbarie. Elle permet quelquefois de faire son chemin, et des professeurs qui n'ont pas trop mal réussi n'en ont jamais eu d'autre; mais elle déprave le sentiment artistique sans lequel on peut, si l'on veut, brasser des Mathématiques, mais qui seul permet d'être mathématicien. Il y avait cependant ici (et l'observation est du genre de celles dont nous aimerions à voir la rédaction émailler fréquemment cette partie de la publication); il y avait, disons-nous, à faire une application des plus simples de la méthode des maxima et minima de Roberval, enseignée au cours, et qui s'impose en quelque sorte ici.

a et b étant les distances du point A aux deux parallèles, EF la position cherchée de la perpendiculaire, ABD la perpendiculaire menée du point A sur les deux parallèles, la variation de l'angle DAE doit être égale à celle de l'angle DAF, et par suite

$$\frac{a}{(\mathrm{EA})^2} = \frac{b}{(\mathrm{FA})^2} = \frac{1}{l}.$$

Les perpendiculaires FG à FA, et EG à EA ont donc leur point G de rencontre sur ABD à une distance AG = l = $a + b$ (par symétrie). Donc, si du point O,

milieu de BD, on décrit un cercle passant en A, il coupera les deux parallèles aux pieds cherchés de la perpendiculaire commune sous-tendant l'angle maximum, vue du point A.

x étant la distance du point A à cette perpendiculaire commune, on a encore

$$x^2 = ab;$$

ce qui donne la solution de l'auteur.

Nous avons, à dessein, conservé les notations de la solution; cela nous fournira l'occasion d'ajouter qu'il ne serait pas inutile de faire remarquer aux élèves que, bien que le choix des lettres d'une figure soit arbitraire, un bon choix, résultant d'une certaine harmonie de correspondance entre les lettres similaires et les parties de la figure en relations analogues, est loin de rester indifférent à la facilité de lecture et au bon aspect de la rédaction.

Hoüel (J.). — Remarques sur l'enseignement de la Trigonométrie. (39-42, 74-79).

M. Hoüel remarque combien il serait avantageux, au point de vue de la généralité et de la clarté, de définir les lignes trigonométriques au point de vue des coordonnées polaires. Les règles des signes découlent immédiatement de la notion du rayon tournant dans le sens direct, ou rétrograde, sur lequel un point mobile est repéré par sa distance à l'origine, comptée elle-même dans le sens positif ou le sens négatif. L'auteur s'élève aussi, avec raison, contre le déplorable emploi classique des angles auxiliaires qui, dans le but illusoire de rendre la formule calculable par logarithmes, compliquent en réalité les calculs.

De telles observations ne sauraient être trop multipliées et trop divulguées : elles font œuvre d'assainissement.

Julliard. — Note sur la droite de Simson. (68-71).

Bourget. — Sur le nombre de chiffres certains dans la racine carrée d'un nombre. (72-74).

Le nombre de chiffres certains de la racine est, en général, égal à celui des chiffres de la racine; mais égal à celui-ci diminué d'une unité si, ce nombre étant pair, la première tranche est inférieure à 25.

Burnier. — Note sur l'extraction abrégée de la racine carrée. (95-96).

Quand on connaît n chiffres d'une racine carrée, en divisant le reste par le double de la racine, on obtient $n-1$ nouveaux chiffres, et n dans le cas où le premier chiffre de la racine est supérieur à 4.

Malloisel. — Du cercle des neuf points. (97-99).

Six nouveaux points situés sur ce cercle.

Morel (*A.*). — Intersection d'une droite et d'un hyperboloïde de révolution. (105-107).

Longchamps (*de*). — Construire, avec le compas seul, le centre d'un cercle tracé. (Note.) (136-137).

L'auteur de la Note et les rédacteurs déclarent ignorer le nom de l'auteur de la solution. C'est, croyons-nous, Mascheroni.

Longchamps (*de*). — Note d'Algèbre. (197-199).

Le minimum de

$$z = \Sigma(ax - by - c)^2$$

est égal à

$$\Sigma a^2 \Sigma b^2 \Sigma c^2 - \Sigma[\Sigma a^2 (\Sigma bc)^2] + 2 \Sigma ab \Sigma bc \Sigma ca.$$

Pillet. — Des projections en Géométrie descriptive. (231-236. 265-269).

Projections obliques. — Droite, plan. — Section plane d'un polyèdre. — Intersection d'un tronc de pyramide quadrangulaire à bases parallèles et d'un cylindre. — Application aux ombres.

Projections coniques. — Point, droite, plan. — Applications. — Intersection d'un octaèdre régulier et d'un cône. — Ombres au flambleau.

Dostor (*G.*). — Détermination du chiffre terminant les puissances successives des nombres entiers. (236-238).

Les derniers ehiffres se reproduisent par période de puissances dont l'exposant augmente de quatre unités, et ne dépendent que du dernier chiffre de la première puissance. Tableau des derniers chiffres.

Ocagne (*M. d'*). — Note sur le volume du tronc de pyramide. (238-240).

Généralisé du tronc triangulaire pour le tronc quelconque; directement pour le quadrangulaire.

Fajon. — Cas de constance de la fonction

$$y = \frac{ax^2 - bx + c}{a'x^2 - b'x + c'}.$$

(240-243).

Morel (*A.*). — Théorie des axes radicaux. (257-265; 289-294; 321-325; 353-357).

I. Puissance d'un point. — Puissance totale d'un point par rapport à un système et puissance intérieure du système. — Théorème de Steiner. — Le lieu des points dont les projections sur un système de droites forment un polygone de surface constante est un cercle. — Puissance d'un point par rapport au cercle. — Cercle imaginaire.

II. Axes radicaux des cercles réels ou imaginaires. — Cercles orthogonaux. — Le cercle orthogonal de trois cercles est le point de concours des systèmes concourants des trois polaires du même point, et de leur pôle commun par rapport aux trois cercles.

III. Distances circulaires, ou rapport de la puissance au diamètre. — Le lieu des points à distances circulaires proportionnelles par rapport à deux cercles est un cercle de même axe radical divisant leur angle en deux autres dont les sinus ont la même proportion que les distances circulaires correspondantes. — Diverses expressions des rapports de deux distances circulaires d'un même point. — Angle des tangentes communes à deux cercles, des cercles avec l'axe radical. — Longueurs des divers segments des tangentes communes.

IV. Système des cercles passant par deux points réels. — Les cercles orthogonaux à ceux du système forment un système conjugué. — Points limites. — Les polaires d'un même point par rapport à tous les cercles du système sont concourantes.

V. Système de trois cercles. — Centre et cercle radical.

VI. De l'inversion des systèmes de cercles. — Figures anallagmatiques et cercle de reproduction. — Inversion des cercles d'axe radical commun. — Un cercle mobile qui coupe deux cercles du système sous un angle constant conserve une inclinaison constante sur tout cercle du système. — Tout cercle également incliné sur deux cercles est orthogonal à leur cercle bissecteur.

Les bissectrices circulaires d'un triangle formé d'arcs de cercle sont concourantes.

Dostor (G.). — Note d'Arithmétique. (269-271).

L'erreur commise en remplaçant la moyenne géométrique d'un nombre par sa moyenne arithmétique est inférieure au carré de la différence divisée par l'octuple du nombre moindre.

Fajon. — Démonstration des formules fondamentales de la Trigonométrie. (271-273).

Lemonnier. — Note sur la division arithmétique. (295-296).

En multipliant le complément du diviseur à la puissance de 10 immédiatement supérieure par le chiffre du quotient, et l'ajoutant au dividende, on obtient d'abord le reste; puis, à sa gauche, le chiffre du quotient, ce qui sert de contrôle.

Cotillon. — Étude sur les lignes d'égale teinte et le lavis à teintes plates. (296-298; 328-332; 365-373).

Définitions et règles générales. — Surfaces à poli mat. — Loi du produit des cosinus de Dupuis. — Lignes d'intensité nulle. — Point brillant, — Lignes d'égale teinte.

La loi idéale de Dupuis est troublée par les rugosités dont l'existence rapproche le point brillant de la partie plus éclairée. — Effets de la lumière diffuse. — Sphère étalon du modelé. — Règles de l'éclairage apparent.

Morel (*A*.). — Note d'Arithmétique. (298-303).

Limite de l'approximation admissible de certains calculs en raison de celle des données.

Nous ne saurions insister trop sérieusement sur l'excellence des études de cette nature pour former le jugement des élèves. Combien de fois n'a-t-il pas eu l'occasion d'être faussé par certains calculs *insensés* demandés à des candidats dans divers examens!

Kœhler. — Nombre de manières de décomposer un polygone en triangles par des diagonales. (325-327).

$$P_n = \frac{6.10.14\ldots(4n-10)}{3.4.5\ldots(n-1)}.$$

Ocagne (*M. d'*). — Note sur le partage des polygones quand la ligne de partage passe par un point donné sur le périmètre. (332-335).

Fajon. — Variations de la fonction

$$y = \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}.$$

(358-361).

Ocagne (*M. d'*). — Nouvelle construction de la tangente à l'ellipse. (363-365).

Données : Les sommets du grand axe et le point de contact.

Laq.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAÎTRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE [1].

2e Série. — Tome X; 1881.

Brillouin. — Intégration des équations différentielles auxquelles conduit l'étude des phénomènes d'induction dans les circuits dérivés. (9-48).

Martin (*A.*). — Sur une méthode d'autocollimation directe des objectifs astronomiques et son application à la mesure des indices de réfraction des verres qui les composent; remarques sur l'emploi du sphéromètre. (49-66).

Joubert (*J.*). — Étude sur les machines magnéto-électriques. (151-174).

Bourguet. — Développement en séries des intégrales eulériennes. (175-232).

Le travail de M. Bourguet a été analysé dans la Ire Partie du *Bulletin*, 2e sér., t. V, Ire Partie, p. 43.

Damien. — Recherches sur le pouvoir réfringent des liquides. (233-304).

Picard (*É.*). — Sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques. (305-322).

Soit $F(x, y)$ une fonction des deux variables illimitées x, y jouissant des propriétés suivantes.

Tout d'abord il existe entre quatre déterminations de la fonction une relation linéaire et homogène à coefficients constants. Dans le voisinage de toute valeur α de x et β de y, différentes entre elles et ne coïncidant avec aucun des points 0, 1 et ∞, la fonction est holomorphe par rapport à x et à y; α étant une valeur quelconque différente de 0, 1 et ∞; trois des branches de la fonction ont, dans le voisinage de $x = 0$, $y = \alpha$, les formes suivantes, linéairement indépendantes :

$$P_1(x, y), \quad P_2(x, y), \quad x^{1-\gamma} P_3(x, y).$$

(1) Voir *Bulletin*, VI, ...

λ et b_1 étant deux constantes, et P_1, P_2, P_3 étant des fonctions holomorphes dans le voisinage de $x=0$, $y=\alpha$.

Pareillement, dans le voisinage de $x=1$, on aura les déterminations

$$Q_1(x,y),\quad Q_2(x,y),\quad (x-1)^{\lambda+b_2-1}Q_3(x,y),$$

les fonctions Q étant holomorphes pour $x=1$, $y=\alpha$.

Enfin, pour $x=\dfrac{1}{x'}=\infty$, on a trois déterminations,

$$x'^{-\lambda+1}R_1(x',y),\quad x'^{-\lambda+1}R_2,\quad x'^{3-\lambda-b_1+b_2-b_3}R_3(x',y),$$

les fonctions R étant holomorphes pour $x'=0$, $y=\alpha$.

On a des déterminations analogues quand, x ayant une valeur différente de 0, 1, ∞, y prend des valeurs voisines de ces quantités; les lettres qui figurent en exposants doivent être accentuées. Enfin, pour $x=y=\alpha$, α étant différent de 0, 1, ∞, on a les déterminations linéairement indépendantes

$$A_1(x,y),\quad A_2(x,y),\quad (x-y)^{\lambda-b_3-1}A_3(x,y),$$

les fonctions A étant holomorphes dans le voisinage de $x=\alpha$, $y=\alpha$.

On suppose que λ, $\lambda-b_1$, $\lambda-b_2$, $\lambda-b_3$, $b_1-b_2-b_3$ ne sont pas des nombres entiers, que b_1 est différent de b_2; en outre, on a

$$b'_1=b_1,\quad b'_2=b_2,\quad b'_3=\lambda,\quad \lambda'=b_3.$$

La fonction $F(x,y)$ est entièrement déterminée par les conditions précédentes, c'est-à-dire que, $F(x,y)$ étant une première fonction qui satisfasse à ces conditions, toute autre fonction jouissant des mêmes propriétés s'exprimera linéairement au moyen de trois déterminations de F, linéairement indépendantes. Parmi ces déterminations, il en est une qui est holomorphe par rapport à x et y dans l'intérieur des cercles ayant pour centres respectifs $x=0$, $y=0$ et un rayon égal à l'unité.

F_1, F_2, F_3 étant trois branches distinctes de la fonction F, celle-ci satisfera évidemment aux équations linéaires simultanées suivantes :

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} r & p & q & z \\ \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & F_1 \\ \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & F_2 \\ \dfrac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} & \dfrac{\partial F_3}{\partial x} & \dfrac{\partial F_3}{\partial y} & F_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} s & p & q & z \\ \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & F_1 \\ \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & F_2 \\ \dfrac{\partial^2 F_3}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial F_3}{\partial x} & \dfrac{\partial F_3}{\partial y} & F_3 \end{vmatrix} = 0$$

Développant ces équations et étudiant la façon dont les coefficients se comportent dans le voisinage des points critiques, l'auteur arrive à montrer qu'elles peuvent s'écrire

$$(1)\quad x(x-1)(x-y)r-(\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}x+\mathrm{C})p+ay(1-y)q+(\mathrm{D}x+\mathrm{E})z=0,$$

$$(2)\quad (x-y)s=(a''x+a')p+(b''y+b')q+ez=0.$$

La détermination des coefficients va résulter maintenant de la comparaison des recherches de M. Picard et des résultats obtenus par M. Pochhammer [*Ueber hypergeometrische Functionen höheren Ordnung* (*Journal de Borchardt*, t. LXXI)], concernant les équations analogues à l'équation hypergéométrique, mais où il y a lieu de considérer les quatre points critiques a_1, a_2, a_3 et ∞ : soit une fonction d'une seule variable x ayant ces quatre points critiques telle que, entre quatre branches de la fonction, il existe une relation linéaire et homogène à coefficients constants, que dans le voisinage d'un point critique a_i on ait trois déterminations de la fonction linéairement indépendantes

$$\mathrm{P}_1(x),\quad \mathrm{P}_2(x),\quad (x-a_i)^{\lambda+b_i-1}\mathrm{P}_3(x),$$

que dans le voisinage de $x=\frac{1}{x'}=\infty$ on ait les trois déterminations

$$x'^{\lambda+1}\mathrm{R}_1(x'),\quad x'^{\lambda+1}\mathrm{R}_2(x'),\quad x'^{-3-\lambda+(b_1+b_2+b_3)}\mathrm{R}_2(x'),$$

où les fonctions R sont holomorphes pour $x'=0$, comme les fonctions P pour $x=a_i$; une telle fonction satisfera, comme l'a montré M. Pochhammer, à l'équation linéaire

$$\varphi(x)\frac{d^3\mathrm{F}}{dx^3}+\sum_{k=0}^{k=2}(-1)^{3-k}\left[(\lambda-k-1)_{3-k}\varphi^{(3-k)}(x)+(\lambda-k-1)_{2-k}\psi^{(2-k)}(x)\right]\frac{d^k\mathrm{F}}{dx^k}=0,$$

où

$$\varphi(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3),$$

$$\psi(x)=\varphi(x)\left(\frac{b_1}{x-a_1}+\frac{b_2}{x-a_2}+\frac{b_3}{x-a_3}\right),$$

et où l'on écrit

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{1.2\ldots q}=(p)_q.$$

Or, la fonction F de M. Picard, regardée comme fonction de x seule, admet les points critiques 0, 1, y, ∞, satisfait aux conditions qui viennent d'être énumérées et vérifie donc une équation linéaire du troisième ordre telle que la précédente. De même si on la considère comme une fonction de y.

Maintenant, des équations (1) et (2) on peut tirer une équation différentielle du troisième ordre, où ne figurent plus que les dérivées par rapport à x, équation qui doit être identique avec celle dont il vient d'être question, et c'est, en effet, l'identification des coefficients qui permet à l'auteur de déterminer les constantes inconnues qui figurent dans les équations (1) et (2); il parvient ainsi

aux deux équations

$$(x-y)s = (1-\lambda')p + (\lambda-1)q,$$

$$\begin{aligned}
&x(x-1)(x-y)r \\
&\quad+[(5-2\lambda-b_1-b_2-b_3)x^2-(2\lambda+b_1+b_2-4)xy-(\lambda-3-b_1-b_3)x-(\lambda+b_1-2)y]p \\
&\quad-(1-\lambda)y(1-y)q+(\lambda-1)(3-\lambda-b_1-b_2-b_3)(x-y)z=0.
\end{aligned}$$

Il reste à établir que ces deux équations ont effectivement trois solutions communes, linéairement indépendantes.

Or, l'équation linéaire du troisième ordre, où figurent les dérivées prises par rapport à x et qui se déduit, comme il a été expliqué, de l'équation générale de M. Pochhammer, admet, ainsi qu'il résulte des recherches de ce dernier, pour intégrale l'intégrale définie, analogue à celle qui vérifie l'équation hypergéométrique

$$\int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-y)^{b_3-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du,$$

g et h désignant deux quelconques des quantités o, 1, y, x et ∞, en supposant toutefois, pour que toutes ces intégrales aient un sens, que l'on a

$$b_1>0,\quad b_2>0,\quad b_3>0,\quad \lambda>0,$$
$$b_1+b_2+b_3+\lambda-3<0.$$

Cette même intégrale vérifie aussi l'équation du troisième ordre, où figurent les dérivées par rapport à y; M. Picard montre, par la substitution, qu'elle vérifie les équations (1) et (2).

Le système d'équations simultanées, ainsi obtenu par M. Picard, coïncide, par le changement des notations avec celles qu'a étudiées M. Appell (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 16 février 1880) et qui ont servi de point de départ à ses recherches sur les séries hypergéométriques à deux variables; la détermination de la fonction de M. Picard, qui est holomorphe par rapport à x, y dans l'intérieur des cercles ayant pour centres respectifs $x=0$, $y=0$ et un rayon égal à 1, n'est autre que la série hypergéométrique de M. Appell.

André (*C.*) et *Angot*. — Origine du ligament noir dans les passages de Vénus et de Mercure et moyen de l'éviter. (323).

Hioux. — Racines communes à deux équations algébriques entières. (363-390).

Étude du déterminant de M. Sylvester; formation des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de p racines communes entre deux équations algébriques qui n'ont pas de racines communes infinies ou nulles; formation de l'équation aux racines communes.

Appell. — Mémoire sur les équations différentielles linéaires. (391-424).

L'objet principal du Mémoire de M. Appell est l'étude des fonctions des intégrales d'une équation différentielle linéaire, qui jouent le même rôle que les fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique entière : l'auteur complète ainsi la série des analogies si remarquables qui existent entre les équations linéaires et les équations algébriques.

I. *Des fonctions invariantes.*

Soient np variables

$$\begin{array}{cccc} x_{11}, & x_{12}, & \ldots, & x_{1p}, \\ x_{21}, & x_{22}, & \ldots, & x_{2p}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1}, & x_{n2}, & \ldots, & x_{np}. \end{array}$$

M. Appell nomme *fonction invariante* de ces np variables une fonction algébrique entière des variables qui se reproduit, multipliée par une puissance du déterminant de la substitution, quand on fait sur les variables une substitution linéaire, telle que

$$\begin{aligned} x_{i1} &= C_{i1}y_{11} + C_{i2}y_{21} + \ldots + C_{in}y_{n1}, \\ x_{i2} &= C_{i1}y_{12} + C_{i2}y_{22} + \ldots + C_{in}y_{n2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{in} &= C_{i1}y_{1n} + C_{i2}y_{2n} + \ldots + C_{in}y_{nn}, \end{aligned}$$

où $i = 1, 2, \ldots, n$, et désigne une telle fonction par le symbole

$$I(x_{ik})_{np}.$$

Si D est le déterminant de la substitution, on aura, d'après cela,

$$I(x_{ik})_{np} = D^m I(y_{ik})_{np};$$

m est le degré de la fonction invariante.

Une fonction invariante et de degré m est homogène et de degré m par rapport aux variables d'une même ligne.

Une fonction invariante $I(x_{ik})_{np}$ dans laquelle p est moindre que n est une constante.

Une fonction invariante $I(x_{ik})_{np}$ dans laquelle $n = p$ est, à un facteur près, indépendant des variables x, est une puissance du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix}.$$

Si dans une fonction invariante $I(x^{ik})_{np}$, on remplace les variables d'une colonne par une même fonction linéaire des autres variables de la même ligne respectivement, à savoir, par exemple

$$x_{ip} = \alpha_1 x_{i1} + \alpha_2 x_{i2} + \ldots + \alpha_{p-1} x_{i,p-1},$$

où $(i = 1, 2, \ldots, n)$ la fonction devient une fonction invariante de même degré que la proposée des variables restantes $x_{ik} \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, p-1 \\ i = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$.

Les théorèmes précédents permettent de trouver la forme générale d'une fonction invariante du degré m des np variables x, en supposant $p > n$.

Soient $\Delta_{1k}, \Delta_{2k}, \ldots, \Delta_{nk}$ les déterminants obtenus, en remplaçant dans le déterminant Δ successivement les éléments de la première, de la deuxième, de la $n^{\text{ième}}$ colonne par $x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{nk}$; on aura

$$x_{ip} = \frac{1}{\Delta}(x_{i1}\Delta_{1p} + x_{i2}\Delta_{2p} + \ldots + x_{in}\Delta_{np}),$$

$$x_{i,p-1} = \frac{1}{\Delta}(x_{i1}\Delta_{1,p-1} + x_{i2}\Delta_{2,p-1} + \ldots + x_{in}\Delta_{n,p-1}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{i,n-1} = \frac{1}{\Delta}(x_{i1}\Delta_{1,n+1} + x_{i2}\Delta_{2,n+1} + \ldots + x_{in}\Delta_{n,n+1}),$$

où $i = 1, 2, \ldots, n$. Si, maintenant, dans une fonction invariante quelconque $I(x_{ik})_{np}$ de degré m, on remplace $x_{ip}, x_{i,p-1}, \ldots, x_{i,n+1}$ par les expressions précédentes, cette fonction deviendra une fonction invariante du même degré des variables restantes

$$\begin{matrix} x_{11}, & x_{12}, & \ldots, & x_{1n}, \\ x_{21}, & x_{22}, & \ldots, & x_{2n}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ x_{n1}, & x_{n2}, & \ldots, & x_{nn}, \end{matrix}$$

c'est-à-dire le produit de Δ^m par une constante qui ne peut être qu'une fonction entière des coefficients $\frac{\Delta_{ik}}{\Delta}$. En effectuant ce produit, on obtiendra la fonction $I(x_{ik})_{np}$ sous forme d'une fonction entière homogène de degré m des $n(p-n)+1$ déterminants $\Delta, \Delta_{ip}, \Delta_{i,p-1}, \ldots, \Delta_{i,n+1}$ où $i = 1, 2, \ldots, n$.

II. *Sur les équations différentielles linéaires.*

Soient

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_n y = 0$$

une équation différentielle linéaire sans second membre et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un système fondamental d'intégrales. M. Appell établit le théorème suivant :

« Une fonction algébrique entière F de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et des dérivées de ces fonctions qui se reproduit multipliée par un facteur constant différent de zéro quand on y remplace $y_1, y_2, \ldots, y_n$ par les éléments d'un autre système fondamental d'intégrales, est égale à une fonction algébrique entière des coefficients de l'équation différentielle et de leurs dérivées multipliée par une puissance de $e^{-\int a_1 dx}$. Ce théorème s'étend à un système d'équations linéaires simultanées du premier ordre, et même à des systèmes d'équations différentielles linéaires simultanées aux dérivées partielles. »

Une application simple de ce théorème consiste à former la condition néces-

saire et suffisante pour que deux équations différentielles linéaires

$$f(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n y = 0,$$

$$\varphi(y) = \frac{d^m y}{dx^m} + b_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + b_m y = 0,$$

aient une intégrale commune, et cela par un procédé entièrement analogue à l'élimination par les fonctions symétriques. Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les éléments d'un système fondamental d'intégrales de la première de ces équations; la condition cherchée est la suivante :

$$\delta = \begin{vmatrix} \varphi(y_1) & \frac{d\varphi(y_1)}{dx} & \frac{d^2\varphi(y_1)}{dx^2} & \ldots & \frac{d^n\varphi(y_1)}{dx^n} \\ \varphi(y_2) & \frac{d\varphi(y_2)}{dx} & \frac{d^2\varphi(y_2)}{dx^2} & \ldots & \frac{d^n\varphi(y_2)}{dx^n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi(y_n) & \frac{d\varphi(y_n)}{dx} & \frac{d^2\varphi(y_n)}{dx^2} & \ldots & \frac{d^n\varphi(y_n)}{dx^n} \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant δ est une fonction invariante du premier degré de

$$\begin{array}{llll} y_1, & \frac{dy_1}{dx}, & \ldots, & \frac{d^{m+n-1}y_1}{dx^{m+n-1}}, \\ y_2, & \frac{dy_2}{dx}, & \ldots, & \frac{d^{m+n-1}y_2}{dx^{m+n-1}}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n, & \frac{dy_n}{dx}, & \ldots, & \frac{d^{m+n-1}y_n}{dx^{m+n-1}}; \end{array}$$

par conséquent, ce déterminant est égal à une fonction rationnelle entière des coefficients de la première des équations différentielles linéaires et de leurs dérivées multipliées par $e^{-\int a_1 dx}$. En calculant cette fonction entière par le procédé expliqué plus haut, on obtient la condition cherchée, $\delta = 0$ en fonction entière des coefficients des deux équations et des dérivées de ces coefficients.

III. *Transformation des équations différentielles linéaires.*

Le même théorème fondamental fournit une méthode générale pour la transformation des équations différentielles linéaires.

Soit une équation différentielle

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n y = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de certaines fonctions de x considérées comme connues et des dérivées de ces fonctions. On dit que cette équation est irréductible s'il n'existe aucune autre équation différentielle d'ordre moindre que n, dont les coefficients soient des fonctions rationnelles des fonctions de x considérées comme connues et de leurs dérivées, et dont les intégrales appartiennent toutes à l'équation considérée.

Dans le cas de l'équation générale, les fonctions connues ne sont autres que les coefficients eux-mêmes, et l'équation est nécessairement irréductible.

Soit

$$\eta = f\left(y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{d^{m_1} y_1}{dx^{m_1}};\ y_2, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{d^{m_2} y_2}{dx^{m_2}};\ y_n, \frac{dy_n}{dx}, \ldots, \frac{d^{m_n} y_n}{dx^{m_n}}\right)$$

une fonction algébrique entière des intégrales $y_1, \ldots, y_n$ de l'équation proposée et de leurs dérivées, les coefficients qui figurent dans cette fonction étant des fonctions données de x; le problème général de la transformation des équations différentielles linéaires consiste à former l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la fonction η.

En remplaçant par η les y valeurs dérivées par des fonctions linéaires des éléments z d'un autre système fondamental d'intégrales et leurs dérivées, on obtiendra p termes linéairement indépendants

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p,$$

entiers par rapport aux quantités z et leurs dérivées; le nombre p sera l'ordre de l'équation différentielle linéaire cherchée, et celle-ci sera

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d^p \eta}{dx^p} & \dfrac{d^p \varphi_1}{dx^p} & \ldots & \dfrac{d^p \varphi_p}{dx^p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \eta & \varphi_1 & \ldots & \varphi_p \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre de cette équation est une fonction invariante de z_1, $z_2, \ldots, z_p$ et de leurs dérivées jusqu'à un certain ordre. On pourra donc l'exprimer en fonction des seuls coefficients de l'équation proposée.

M. Appell considère en particulier les transformations

$$\eta = A_0 \frac{d^m y_1}{dx^m} + A_1 \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} + \ldots + A_m y_1,$$

$$\eta = y_1^m,$$

$$\eta = \varphi_{k_1}(y_1, y_2, \ldots, y_n) + \varphi_{k_2}(y_1, \ldots, y_n) + \ldots + \varphi_{k_m}(y_1, \ldots, y_n),$$

où les φ sont des fonctions homogènes entières à coefficients constants de $y_1, \ldots, y_n$ d'un degré marqué par l'indice.

IV. *Sur le cas où il existe des relations algébriques entre les intégrales d'une équation différentielle linéaire.*

Cherchons la condition pour qu'il existe entre les intégrales $y_1, \ldots, y_n$ une relation de la forme

$$\varphi_{k_1}(y_1, \ldots, y_n) + \ldots + \varphi_{k_m}(y_1, \ldots, y_n) = 0,$$

où les symboles ont la même signification que précédemment. Cette relation contient un nombre N de coefficients constants; en la différentiant N − 1 fois par rapport à x, on obtient un système de N équations homogènes et du premier degré par rapport aux N coefficients constants; l'élimination de ces coef

ficients conduit à la condition cherchée

$$\text{Ⓓ} = 0.$$

Ce déterminant Ⓓ est une fonction invariante de

$$\begin{matrix} y_1, & \dfrac{dy_1}{dx}, & \ldots, & \dfrac{d^{N-1}y_1}{dx^{N-1}}, \\ y_2, & \dfrac{dy_2}{dx}, & \ldots, & \dfrac{d^{N-1}y_2}{dx^{N-1}}, \\ \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ y_n, & \dfrac{dy_n}{dx}, & \ldots, & \dfrac{d^{N-1}y_n}{dx^{N-1}}; \end{matrix}$$

on pourra donc l'exprimer en fonction des coefficients de l'équation différentielle et de leurs dérivées.

M. Appell montre ensuite comment, cette condition Ⓓ = o étant supposée remplie, on peut déterminer les coefficients constants qui figurent dans la relation. Ainsi la condition pour que, entre deux intégrales distinctes y_1, y_2 de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a\frac{dy}{dx} + by,$$

il existe une relation de la forme

$$Ay_1^2 + 2By_1y_2 + Cy_2^2 + D = 0,$$

où A, B, C, D sont des constantes, est

$$\frac{db}{dx} = 2ab.$$

Si cette condition est remplie, l'intégration se ramène aux quadratures.

Plus généralement, s'il existe entre les intégrales y_1 et y_2 une relation algébrique entière de la forme

$$\varphi_{h_1}(y_1, y_2) + \varphi_{h_2}(y_1, y_2) + \ldots + \varphi_{h_m}(y_1, y_2) = 0,$$

l'intégration se ramènera à des intégrales abéliennes dont le genre est précisément le genre de la courbe algébrique définie par l'équation précédente.

Goursat. — Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéométrique. (*Suppl.*, 1-142).

Le travail de M. Goursat a été analysé dans la Ire Partie du *Bulletin*.

JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, publié par le Conseil d'instruction de cet établissement [1].

48e Cahier. — Tome XXIX, 1880.

Laussedat. — Discours prononcé aux funérailles de M. Chasles. (IV-VIII).

Lecornu. — Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles. (1-109).

Ce travail, qui a fait l'objet d'une thèse soutenue devant la Faculté de Paris, a été analysé dans la première Partie du *Bulletin*.

Jordan. — Mémoire sur l'équivalence des formes. (110-151).

Le présent Mémoire, dit l'auteur en débutant, a pour objet d'étendre aux formes de degré supérieur au second et à coefficients complexes les belles méthodes introduites par M. Hermite dans l'étude des formes quadratiques (t. 40, 41, 47 du *Journal de Crelle*). Il est divisé en trois Sections :

Dans la première, nous nous bornons à établir quelques propositions préliminaires relatives à l'équivalence algébrique des formes.

La deuxième Section est consacrée à l'examen des formes de l'espèce suivante, déjà étudiée par M. Hermite :

$$F = \text{norme}\,(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n) + \ldots + \text{norme}\,(a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n),$$

où les variables x et les coefficients a sont des quantités complexes de la forme $\alpha + \beta i$. Nous démontrons les propositions suivantes :

1° Toute forme F du déterminant $\gtrless 0$ est équivalente à une réduite R de même espèce, où les modules des coefficients sont limités en fonction de la norme Δ du déterminant de F et du minimum μ de cette forme.

2° Les formes F à coefficients entiers et de même déterminant se répartissent en un nombre limité de classes.

3° Les substitutions linéaires à coefficients entiers qui transforment une réduite en elle-même ou en une autre réduite ont les modules de leurs coefficients limités. La limite ne dépend que du nombre des variables.

Dans la troisième Section nous appliquons ces résultats à l'étude des formes à coefficients complexes à n variables et de degré m supérieur à 2. Nous établissons les théorèmes suivants :

1° *Une forme quelconque* F *à coefficients entiers est équivalente à une ré-*

(1) Voir *Bulletin*, V_2, 110.

duite dont les coefficients ont leurs modules limites en fonction entière des modules des invariants de F.

Dans le cas particulier où F aurait des covariants identiquement nuls, la limite dépendrait également des entiers numériques qui figurent dans l'expression des coefficients de ces covariants.

2° *Les formes à coefficients entiers algébriquement équivalentes à une même forme se distribuent en un nombre limité de classes.*

Ces deux propositions sont en défaut dans quelques cas particuliers; mais ces exceptions ne peuvent se présenter que pour les formes dont le discriminant est nul.

3° *Si deux formes* F, G, *à n variables, de degré $m > 2$ et à coefficients entiers ont leur discriminant différent de zéro, le nombre des substitutions qui transforment* F *en* G *sera limité en fonction de m et de n et les modules de leurs coefficients seront limités en fonction entière des modules des coefficients de* F *et de* G.

On pourra donc, par un nombre limité d'essais, reconnaître si F et G sont équivalents, et trouver toutes les substitutions à coefficients entiers qui les transforment l'une dans l'autre.

Jordan. — Sur la réduction des substitutions linéaires. (151-161).

Toute substitution linéaire S à n variables et de déterminant D peut être mise sous la forme ETE′, E et E′ étant des substitutions à coefficients entiers et de déterminant 1, et T une substitution dont les coefficients ont leurs normes inférieures à $K_n \sqrt[n]{\Delta}$, Δ désignant la norme de D, et K_n une constante qui ne dépend que de n.

Mathieu. — Mémoire sur des intégrations relatives à l'équilibre d'élasticité. (163-206).

L'auteur détermine d'abord la fonction de Green pour un parallélépipède rectangle, sous une forme différente de celle qu'a donnée Riemann, et la fonction analogue pour un rectangle.

Il détermine ensuite une fonction V de x, y, z et de x', y', z' qui reste invariable quand on permute x, y, z avec x', y', z', qui satisfait à l'équation aux différences partielles du quatrième ordre $\Delta\Delta V = 0$ dans l'intérieur d'un parallélépipède rectangle, qui reste finie et continue ainsi que ses dérivées des trois premiers ordres, compté au point x', y', z' où son Δ se réduit à $\frac{1}{r}$, enfin qui se réduit à zéro quand le point x, y, z vient sur la surface. M. Mathieu avait déjà établi l'existence d'une telle fonction à l'intérieur d'une surface quelconque (*Journal de Liouville*, 2ᵉ série, t. XIV). Il résout aussi la question analogue dans le plan.

Il s'occupe ensuite d'une fonction V_1 de x, y, z et de x', y', z', analogue à la fonction V satisfaisant à la même équation aux différences partielles et dont le Δ est infini de la même manière au point x', y', z', mais non seulement V_1 mais

aussi $\frac{dV_1}{dn}$, s'annulent sur la surface, dn étant l'élément de normale à la surface menée intérieurement.

Les calculs sont développés dans le cas où la figure est plane et rectangulaire.

Connaissant la fonction V_1 pour un parallélépipède rectangle ou pour un rectangle, on peut résoudre le problème suivant :

« Déterminer une fonction u des coordonnées d'un point (x, y, z) qui satisfasse à l'intérieur de la figure à l'équation aux différences partielles du quatrième ordre $\Delta\Delta u = 0$, qui y soit finie et continue dans cette étendue avec ses dérivées des trois premiers ordres, en supposant qu'on connaisse u et $\frac{du}{dn}$ sur la surface ou le contour de la figure. »

Ce problème permet, en particulier, de déterminer la forme affectée par la surface médiane d'une plaque rectangulaire dont on a déformé légèrement les bords, connaissant la déformation du contour et l'inclinaison de la normale à ce contour sur sa position primitive.

Humbert (*G.*). — Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre. (207-220).

Soit l'équation

$$\Delta(x)y'' + G(x)y' + F(x)y = 0,$$

où

$$\Delta(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_p),$$

$$\frac{G(x)}{\Delta(x)} = \frac{\mu_0}{x - x_0} + \frac{\mu_1}{x - x_1} + \ldots + \frac{\mu_p}{x - x_p}.$$

En supposant que le polynôme $F(x)$ soit déterminé de façon que l'équation différentielle soit vérifiée par un polynôme de degré n, $P_n(x)$ et que toutes les quantités μ soient positives, et en posant

$$K(x) = (x - x_0)^{\mu_0}(x - x_1)^{\mu_1}\ldots(x - x_p)^{\mu_p},$$

$$I_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{K(z)}{\Delta(z)} \frac{dz}{x - z},$$

on aura la relation

$$P_n(x)(I_1 + \omega_1 I_2 + \ldots + \omega_{p-1} I_p) = \Pi_{n-1}(x) + \left(\frac{1}{x^{n+p}}\right),$$

où $\Pi_{n-1}(x)$ représente un polynôme de degré $n - 1$ et $\left(\frac{1}{x^{n+p}}\right)$ une série procédant suivant les puissances entières et positives de $\frac{1}{x}$ commençant par un terme en $\frac{1}{x^{n+p}}$, et où enfin $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{p-1}$ sont des constantes.

On en conclut l'équation

$$\sum \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{K(z)}{\Delta(z)} P_n(z)\Pi_{n+p-2}(z)\,dz = 0.$$

où $\Pi_{n+p-2}(z)$ est un polynôme quelconque, de degré $n+p-2$ au plus, et l'on déduit de là le théorème suivant :

Si les racines $x_0, x_1, \ldots, x_p$ sont réelles et rangées dans cet ordre de grandeur, si de plus $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p$ sont positifs, tout polynôme $P_n(x)$ satisfaisant à l'équation

$$\Delta(x)y'' + G(x)y' + F(x)y = 0$$

aura ses racines réelles et comprises entre x_0 et x.

Rouché (*E.*). — Note sur les équations linéaires. (221-228).

BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, pubblicato da B. BONCOMPAGNI [1].

Tome XIII; 1880.

B. Boncompagni. — Intorno ad un Trattato di Aritmetica del P. D. Smeraldo Borghetti Lucchese, canonico regolare della Congregazione del SS. Salvatore. (1-80, 121-200, 245-368).

Le Traité d'Arithmétique de Borghetti est intitulé : *Opera d'Abbaco del Reuerendo Padre, Don Smeraldo Borghetti da Lucca, canonico regolare della Congregation del Saluatore, e ordine di Sant'Agostino : nella quale s'insegna ogni sorte di ragion merchantile, con molte inuentioni, non men belle che utili. — Con priuilegio. — In Venetia,* MDXCIIII. *Appresso Francesco Barileti.* Cette édition très rare n'est mentionnée, ni par Mazzuchelli, dans son grand Ouvrage : *Gli Scrittori d'Italia*, ni par Riccardi dans sa *Biblioteca matematica italiana.* On n'en connaît que sept exemplaires, savoir : deux à la Bibliothèque communale de Ravenne, un à la Bibliothèque publique de Lucques, un à la Bibliothèque capitulaire de Trévise, un à la Bibliothèque du séminaire épiscopal de Padoue, un à la Bibliothèque ducale de Gotha, un à la Bibliothèque nationale de Paris. A propos de la mention de ce dernier exemplaire faite au Catalogue manuscrit des Ouvrages imprimés de la Bibliothèque de Paris, le prince Balthasar Boncompagni donne des renseignements précieux sur la composition de ce Catalogue, sur la personne de Jean Buvat, copiste, et sur celle de l'abbé Jourdain, secrétaire de la Bibliothèque du Roi, dont les prénoms, Jacques-Nicolas, sont ici publiés pour la première fois. La simple énumération des énormes travaux accomplis par Jean Buvat constitue un brevet d'honneur justement accordé au laborieux et modeste copiste, l'auteur des Mémoires de la Régence et le révélateur de la Conspiration de Cellamare.

---

[1] Voir *Bulletin*, VI$_2$, 195.

Selon mention faite par Carcavi, feuillet 284 du manuscrit n° 17172 du fonds latin de la Bibliothèque nationale de Paris, l'exemplaire que nous avons en France faisait partie des Livres de Mathématiques et d'Astronomie que Jean-Dominique Cassini acheta en Italie et qu'il donna généreusement à la Bibliothèque du roi Louis XIV.

D. Smeraldo Borghetti, ordonné prêtre dans la cathédrale de Vicence, le 21 décembre 1596, s'adonna entièrement aux Mathématiques, et particulièrement à l'Arithmétique et à l'Algèbre. Dans son *Opera d'Abbaco,* il résout, entre autres problèmes, celui de la duplication des grains, par case de l'échiquier; et c'est l'occasion pour le prince Boncompagni de nous montrer ce même problème fameux dans Maçoudi (943-948 de l'ère chrétienne), Léonard de Pise (1202), Alsafadi (xive siècle), Luca Pacioli (1494), Adam Riesen (1550), Buteo (1559), Clavius (1583). Dans ce savant et consciencieux Mémoire, de près de 300 pages, on rencontre une foule de renseignements bio-bibliographiques curieux et intéressants, qu'il nous est impossible même d'indiquer ici, et qu'il faut lire dans le *Bullettino.*

Narducci (*Enrico*). — Notizie di Libri relativi alle Matematiche, posseduti dalla Biblioteca Alessandrina e non citati dal conte Giovanni Maria Mazzuchelli nella parte stampata della sua opera intitolata : *Gli Scrittori d'Italia,* ecc. (369-378).

Le comte J.-M. Mazzuchelli s'était proposé de donner des Notices historiques et critiques, par ordre alphabétique des noms, sur tous les écrivains nés en Italie. De cette œuvre considérable deux volumes in-folio furent publiés; ils ne contiennent que les deux premières lettres : A et B. Outre ces deux volumes imprimés, il existe, dans quatre manuscrits conservés au Vatican, 1518 articles de la lettre C, tout prêts pour l'impression.

Dans sa Notice, M. Enrico Narducci, le vaillant bibliographe, nous apporte un utile supplément à l'œuvre, malheureusement inachevée, de Mazzuchelli, en nous indiquant les mathématiciens et philosophes omis dans les deux volumes publiés, et dont il a rencontré les ouvrages dans la bibliothèque Alessandrina qu'il dirige et qu'il connaît à fond.

Steinschneider (*Maurice*). — Notice sur les Tables astronomiques attribuées à Pierre III d'Aragon. (413-436; fr.).

M. Maurice Steinschneider, savant orientaliste et mathématicien de Berlin, a écrit sa Notice en français. Son but, dit-il modestement, est « d'attirer l'attention de ceux qui s'intéressent à l'histoire des Sciences mathématiques sur un ouvrage qui est presque échappé aux bibliographes, et de les inviter à faire les recherches spéciales qui pourront résoudre une question d'authenticité littéraire de quelque importance. » M. Rico y Sinobas, dans le tome V, Ire Partie, de son magnifique ouvrage, intitulé : *Libros del saber de Astronomia del Rey D. Alphonso X de Castilla, compilados, anotados y comentados por Don Manuel Rico y Sinobas,* Madrid, 1867, in-f°, revendique, pour le roi Alphonse X, un manuscrit astronomique qui appartient, selon toute vraisemblance, à Pierre III d'Aragon.

Le manuscrit n° 10263 du fonds latin de la Bibliothèque nationale de Paris

renferme, parmi les différentes pièces qui s'y trouvent, les *Canones super tabulas... Petri tertii.* Ces canons ont dû être écrits primitivement en catalan, ils ont été traduits en hébreu et il en existe trois versions manuscrites en cette langue. Cette pièce est précédée d'une Préface ou Prologue, en latin, de Pierre III d'Aragon. M. Rico y Sinobas a commis de singulières méprises relativement à ce Prologue et au manuscrit précité de la Bibliothèque nationale de Paris. M. Steinschneider les a mises en évidence en donnant une copie très exacte de ce prologue, faite par M. Marre, une transcription du texte latin faite par lui, et la version hébraïque de ce même prologue, d'après un fac-simile tiré du manuscrit n° 379 du Vatican par les soins du prince Balthasar Boncompagni.

Henry (*Ch.*). — Supplément au Travail intitulé : *Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat*, suivies de fragments inédits de Bachet et de Malebranche. (437-470).

Ce supplément renferme un grand nombre de corrections, typographiques et autres, au Mémoire publié précédemment dans le *Bullettino*. Il ajoute aux pièces déjà produites, et relatives à Fermat, trois documents officiels dont les originaux sont conservés aux archives de l'ancien Parlement de Toulouse : 1° « Lettres de provision de l'estat et office de conseiller aux requestes en faveur de Pierre Fermat, avocat (du 22 janvier 1631) »; 2° « Lettre de don et octroy de l'office de conseiller lay en la cour du Parlement de Toulouse, du 30 décembre 1637 »; 3° Trois arrêts dont Fermat a été le rapporteur en 1641 et 1645.

Quant aux additions concernant Malebranche et ses prétendus essais sur la théorie des nombres, elles ne sont pas de nature à modifier l'opinion de ceux qui nient formellement que ces fragments de correspondance sur la théorie des nombres soient de Malebranche; elles ne sauraient justifier, à notre avis, les conclusions de M. Ch. Henry, à savoir que « les assertions du rédacteur de l'inventaire (des mss. de l'Oratoire) ont une autorité considérable, et qu'il faut attribuer à Malebranche toutes les pièces qui n'ont pas une origine certaine et indiscutable. » Nous n'avons, là-dessus, qu'un mot à dire : c'est que l'inventaire sur lequel M. Ch. Henry s'est appuyé n'a ni la force ni la valeur qu'il lui attribue, et, selon les paroles de l'éminent Directeur de la Bibliothèque nationale, l'autorité de ce Catalogue, dont l'auteur est inconnu, ne saurait être acceptée que sous bénéfice d'inventaire.

Govi (*Gilberto*). — Nuovo documento relativo alla invenzione dei cannochiali binocoli, con illustrazioni. (471-480).

Presque tous les écrivains de l'histoire des Sciences attribuent au P. Schyrl, capucin de Bohême, né vers 1597, mort à Ravenne en 1660, l'invention des lunettes d'approche binoculaires. C'est dans la Ire Partie de l'Ouvrage publié à Anvers, en 1645, sous le titre bizarre d'*Oculus Enoch et Eliæ sive radius sidereomysticus*, qu'il traite, p. 336-356, de la lunette d'approche binoculaire. Cette invention n'appartient pas au capucin Schyrl, mais bien à un opticien de Paris, du nom de Chorez, qui en 1625 vendait des binocles dans l'île Notre-Dame, à l'enseigne du Compas. C'est ce qui résulte d'une lettre imprimée, trouvée en septembre 1880 par M. Gilberto Govi, le savant physicien italien, dans

le manuscrit n° 9531 du fonds français, correspondance de Peiresc. La pièce est intitulée : *Les admirables Lunettes d'approche reduites en petit volume auec leur vray usage et leur utilitez preferable aux grandes, et le moyen de les acomoder à l'endroit des deux yeux, le tout mis en pratique, ainsi qu'elles sont représentées par ces figures suiuantes, et dédié au roy, l'an* 1625, par D. Chorez. » Cette lettre est adressée au roi; elle commence ainsi : « Sire, il y a près de cinq ans que je reçeu l'honneur de presenter à vostre Maiesté les prémices de mon travail, en ce qui est communement appelé Lunettes d'approche, etc. » Les avis et directions pratiques formulés par Chorez dans cette sorte de lettre-manifeste sont très utiles, selon M. Gilberto Govi qui a rendu justice à l'habile opticien et l'a retiré de l'injuste oubli dans lequel il était tombé.

The Edinburgh Review (n° 311, July 1880). — I Precursori inglesi del Newton. — Traduzione dall'inglese del Prof. Antonio Favaro.

Le XVII[e] siècle doit être considéré comme le plus mémorable dans l'histoire de la Science en Angleterre; en effet, selon l'observation faite par l'auteur anonyme de cet article de l'*Edinburgh Review*, les Anglais n'étaient encore, au commencement de ce siècle, que des disciples, et vers la fin de ce même siècle ils étaient reconnus comme les maîtres de l'Europe savante, et Isaac Newton comme l'arbitre de la Science. Parmi les personnages les plus marquants dont on retrace la vie et les travaux dans ce Mémoire, traduit par le D[r] Favaro, il faut citer Robert Recorde, Jérémie Horrocks et surtout Robert Hooke.

Robert Recorde, mort en 1588, fut, paraît-il le premier Anglais qui ait écrit sur l'Algèbre ou la *Cossike practice*, comme il l'appelait. Ce serait lui qui aurait introduit cette science en Angleterre avec son Livre intitulé : *The whetstone of witte,* c'est-à-dire « la pierre à aiguiser du jugement ». Jérémie Horrocks fut un astronome distingué, mais il passa comme un météore et mourut dans sa vingt-deuxième année.

Robert Hooke, né dans l'île de Wight le 18 juillet 1635, mort le 3 mai 1703, fut l'un des premiers membres de la Société Royale de Londres et l'un des plus féconds inventeurs de machines mécaniques. Il inventa un ressort qui régularise le mouvement du balancier dans les horloges, et perfectionna les instruments astronomiques. Il fut peut-être le premier à entrevoir la merveilleuse découverte du téléphone. Toute sa vie peut être résumée en ces deux mots : expériences et controverses. On lui reproche d'avoir contesté à Newton ses plus belles découvertes. Les principaux Ouvrages qu'il ait laissés sont les suivants : *Méthode pour mesurer la Terre. — Mycographie. — Traduction des hélioscopes. — Lectiones Cutterianæ.* — Cette Notice contient un tableau saisissant du caractère inquiet, jaloux, égoïste et personnel, de l'esprit étroit, des sentiments sordides d'un homme qui ne mérita pas le titre de vrai savant, car il n'aima pas la Science pour elle, mais seulement pour lui-même. Robert Hooke voulut apposer sa « marque de fabrique » sur toute pensée scientifique; mais il fut puni par où il avait péché : de toutes ses inventions, à peine y en a-t-il une qui porte aujourd'hui son nom, et ses travaux, repris, poursuivis, améliorés, terminés par ses héritiers intellectuels, devinrent autant de titres d'honneur pour ceux-ci devant la postérité, tandis que toutes ses réclamations de priorité restèrent vaines ou mêmes ignorées.

L'écrivain anonyme de l'*Edinburgh Review* attribue à deux hommes d'un génie singulier, à deux Italiens, Alberti et Léonard de Vinci, l'honneur insigne d'avoir ouvert la voie de l'étude et du culte de la nature, entraînant à leur suite astronomes, anatomistes, médecins et botanistes de l'Europe moderne.

Marre (Aristide). — Notice sur Nicolas Chuquet et son Triparty en la science des Nombres. (555-592).

Nicolas Chuquet, Parisien, bachelier en médecine à Lyon, composa en l'année 1484 son *Triparty en la science des nombres.* Cet Ouvrage renferme le plus ancien Traité d'Algèbre, écrit en français, que l'on connaisse aujourd'hui. Il y a plus de quarante ans que Michel Chasles, dans une Communication à l'Institut de France, faisait ressortir l'importance, au point de vue de l'histoire des Sciences mathématiques, d'un Ouvrage in-4° publié à Lyon, en l'année 1520, sous le titre de : *Larismetique nouuellement composée par maistre Estienne de la Roche, dict Villefranche, natif de Lyon.* Pour la première fois, il faisait à l'occasion de ce Livre la remarque singulière que voici, et qui plus tard devait porter ses fruits : « L'auteur y cite le travail d'Algèbre de maître Nicolas Chuquet, Parisien, autre Ouvrage d'un auteur français, antérieur à 1520. Peut-être la notation des exposants s'y trouvait-elle déjà. Il est à désirer, dans l'intérêt de l'histoire, que cet Ouvrage ne soit pas entièrement perdu. » (*Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences,* t. XII, p. 752, séance du mercredi 5 mai 1841).

L'ouvrage de Nicolas Chuquet existe sous le n° 1346 du fonds français des manuscrits de la Bibliothèque nationale de Paris; il contient en effet, comme l'avait supposé l'illustre géomètre, la notation des exposants longtemps attribuée à Descartes, et bien d'autres points encore qui intéressent l'histoire de l'Arithmétique et de l'Algèbre. S'il est resté manuscrit pendant quatre cents ans, c'est vraisemblablement à Estienne de la Roche lui-même qu'il faut en faire remonter la première cause, ainsi que le montre la IIe Partie de la Notice de M. Aristide Marre, intitulée : *Estienne de la Roche et son Œuvre par rapport au Triparty de Nicolas Chuquet* (*voyez* pages 569-580 du *Bullettino*).

Chuquet (Nicolas) Parisien. — Le *Triparty en la science des nombres,* par maistre Nicolas Chuquet Parisien, d'après le manuscrit, fonds français, n° 1346 de la Bibliothèque nationale de Paris. (593-659 et 693-814).

Ainsi que l'indique son nom, l'Ouvrage de Nicolas Chuquet comprend trois Parties distinctes. La première Partie traite des nombres entiers, des nombres routz (fractions), des progressions, des nombres parfaitz, des nombres proporcionalz, et de leurs proprietez, des rigles de troys, de une posicion, de deux posicions, de apposicion et remocion, de la rigle des nombres moyens. La seconde Partie traite des racines, racines simples, racines composées, racines lyées. Elle donne la règle des signes en ces termes : « qui multiplie plus par plus et moins par moins il en vient plus. Et qui multiplie plus par moins *Vel e contr.*, il en vient toujours moins. » La « tierce et derreniere Partie » est exclusivement consacrée à l'Algèbre que Nicolas Chuquet dénomme : la *Rigle des Premiers.*

Il ne nous appartient pas de nous glorifier de la publication de l'Œuvre de

Nicolas Chuquet, que l'on doit au prince Balthasar Boncompagni; mais il nous sera permis d'insérer ici comme témoignage irrécusable de l'intérêt qu'elle peut offrir la Lettre écrite le 4 novembre 1881 par le savant professeur d'Astronomie et directeur de l'Observatoire de Zurich au prince Balthasar Boncompagni, Lettre dont une copie nous fut immédiatement et courtoisement transmise par ordre du prince :

« Mon cher Monsieur,

» La Notice de M. Aristide Marre sur le *Triparty* de Chuquet, que vous avez insérée dans les Cahiers de septembre à décembre 1880 de votre *Bulletin,* est de la dernière importance pour l'histoire des Mathématiques.

» Si vous en avez fait faire un tirage à part, je serais très heureux si vous en vouliez doter ma Bibliothèque d'un exemplaire. »

Votre très dévoué.

R. Wolf.

Zurich, 1881, XI, 4.

Boncompagni (*D. Balthasar*). — Michel Chasles.

Michel Chasles professait une haute estime pour le prince Boncompagni, il lui était reconnaissant des services qu'il ne cesse de rendre à la Science; de son côté le prince Boncompagni avait une sorte d'admiration respectueuse pour son ami, l'illustre géomètre que la France a perdu le 18 décembre 1880. MM. Bertrand (Joseph), Bouquet, J.-B. Dumas et Rolland, membres de l'Académie des Sciences, et M. le colonel Laussedat, directeur des Études à l'École Polytechnique, ont prononcé sur la tombe de Michel Chasles des discours qui ont fait connaître l'homme et le savant. Le prince Boncompagni a voulu accomplir son devoir en consacrant dans son *Bullettino* une Notice nécrologique, encadrée de noir, à la mémoire de Michel Chasles. Ce sont les seules pages qu'on trouve ornées de ce signe de deuil dans les treize Tomes, déjà publiés, de cet important Recueil périodique. Cette Notice, après celles qu'on a déjà publiées tant en France que dans les pays étrangers, renferme sur les travaux du célèbre mathématicien un ensemble de renseignements bibliographiques du plus grand intérêt et de la plus parfaite exactitude. Un noble hommage y est rendu à cette École Polytechnique de Paris, qui, dans les vingt premières années de son existence, donna aux Sciences mathématiques, astronomiques et physiques, Arago, Becquerel, Binet, Biot, Brianchon, Cauchy, Chasles, Fresnel, Gay-Lussac, Malus, Plana, Poinsot, Poisson, etc.

Indépendamment des travaux, Mémoires et Notices indiqués ci-dessus, le tome XIII du *Bullettino di bibliografia e di storia delle Scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni* renferme, sous le titre : *Annunzi di recenti pubblicazioni,* un précieux répertoire des travaux mathématiques et physiques publiés récemment, un Catalogue analytique consciencieux et détaillé, qui occupe les pages 81-120, 201-244, 379-412, 515-554, 660-692, 828-868, du Tome XIII, auquel il ne manque plus, pour être entièrement complet, que l'*Index* par ordre alphabétique des noms d'auteurs.

A. M.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHT (1).

Tome XI; 1880.

Gilles. — Directions dangereuses en Mathématiques. (5-24).

La plupart des objections que présente l'auteur contre certaines conceptions modernes seraient immédiatement éclaircies, si l'on se plaçait au vrai point de vue d'après lequel les Mathématiques n'ont pas pour objet l'étude des êtres réels, mais seulement les opérations qui servent à la transformation de ces êtres. Un être peut ne pas exister, sans pour cela être absurde; une opération peut toujours être conçue, tant qu'elle n'implique pas contradiction. Si cette distinction était mieux observée, on ne verrait plus ces polémiques acharnées contre la « Géométrie non euclidienne », qui rappellent involontairement les combats du chevalier de la Manche contre les moulins à vent. La réalité des conceptions mathématiques est tout à fait étrangère à leur étude, et, d'ailleurs, ce qui était hier *imaginaire* peut devenir *réel* aujourd'hui ; exemple : la racine carrée de — 1, qui désigne une opération *très réelle*, comme on le reconnaît universellement maintenant.

Günther (*S.*). — Compte rendu de la section des Sciences mathématiques et physiques du 34e Congrès des philologues et des professeurs allemands à Trèves. (66-73).

Reuschle. — Développement génétique des théorèmes relatifs aux racines et aux logarithmes, déduits des propriétés des puissances, et leur appréciation au point de vue de l'enseignement.

Günther (*S.*). — Résolution importante au point de vue didactique des équations trinômes.

Heilermann. — Sur le troisième arc-en-ciel.

Bauer (*K.-L.*). — Sur la manière de traiter la théorie du mouvement uniformément accéléré. (85-100).

Stolzenburg. — Une erreur dans les Traités de Physique. (101-102).

C étant la vitesse de la lumière d'un astre et c la vitesse de la Terre dans son orbite autour du Soleil, si l'on désigne par α l'*angle d'aberration*, c'est-à-dire

(1) Voir *Bulletin*, III, 233.

la différence entre la position réelle et la position apparente de l'étoile vue de la Terre, le maximum de α, d'après les observations de Bradley, est donné par l'équation

$$\sin\alpha = \frac{c}{C},$$

d'où résulte C

$$C = \frac{c}{\sin\alpha},$$

et non $C = \frac{c}{\tang\alpha}$, comme l'indiquent à tort les Traités de Cosmographie.

Reidt (*F.*) et *Weinmeister* (*I.*). — Sur la définition des parallèles. (111-114).

M. Reidt définit deux parallèles comme étant des droites qui n'ont aucun point commun, même à l'infini. M. Weinmeister leur attribue un point commun à l'infini. Nous avouons ignorer ce qui se passe à de pareilles distances et nous croyons que les deux géomètres feraient mieux de se mettre d'accord, en admettant que les choses se passent, à distance finie, comme si les parallèles ne devaient jamais se rencontrer, et que cette situation mutuelle est la limite vers laquelle, la situation de deux droites, l'une fixe, l'autre mobile autour d'un point fixe et rencontrant la première en un point de plus en plus éloigné.

PROGRAMMES SCOLAIRES des établissements d'enseignement secondaire du royaume de Bavière pour l'année 1879. (148-153).

Röllinger (*G.*), Augsbourg. — Distribution de la chaleur solaire à la surface de la Terre. (66 p.).

Nägelsbach (*H.*), Erlangen. — Problème de la théorie des combinaisons. (24 p.).

Eilles (*Jos.*), Landshut. — Deux et trois courbes du second ordre dans une situation générale. (92 p.).

Maurer (*G.*), Münnerstadt. — Théorèmes sur les séries. (77 p.).

Nachreiner (*V.*), Spire. — Représentation l'une sur l'autre de deux surfaces courbes. (32 p.).

Walter (*E.*), Ratisbonne. — Le choc direct et central des corps élastiques ou non élastiques. (10 p.).

Ritz (*J.*), Munich. — Observations et calculs sur la réfraction de la lumière homocentrique sur *n* plans parallèles. (44 p., 4 Pl.).

Mang. — Compte rendu de la section de l'enseignement des Sciences mathématiques et naturelles au Congrès des Naturalistes et des Médecins à Baden-Baden, septembre 1879. (157-165).

Mang. — Sur la méthode d'enseignement de la Géographie mathématique au point de vue de la représentation visible.

Bauer (*K.-L.*). — Sur l'exposition de la théorie des miroirs et des lentilles sphériques. — Sur le calcul élémentaire du rapport des deux chaleurs spécifiques des gaz.

Lips. — Sur l'exposition élémentaire et sur l'utilité des déterminants dans les écoles supérieures.

Diekmann (*Jos.*). — Les types fondamentaux des équations résolubles du second degré à deux inconnues. (173-183).

L'auteur établit les trois types suivants d'équations résolubles :

$$(1)\quad \begin{cases} ax^2 + 2bxy + cy^2 - 2dx + 2ey + f = 0, \\ \mu ax^2 + 2\mu bxy - c_1y^2 + 2\mu dx + 2e_1y + f_1 = 0; \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} ax^2 - 2bxy + cy^2 - 2dx + 2ey + f = 0, \\ ax^2 - 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f_1 = 0; \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} a_1x^2 + 2\mu bxy + \mu cy^2 + 2d_1x + 2\mu ey + f_1 = 0, \\ a_1x^2 + 2b_1xy - c_1y^2 + 2\mu dx + 2\mu ey + \mu f = 0. \end{cases}$$

Schlegel (*V.*). — Statistique des Traités de Sciences mathématiques et naturelles dans les Écoles supérieures de Prusse. (184-187).

Hoffmann (*J.-C.-V.*). — Tableau général des types de calcul usités. Contribution à l'orthographe mathématique. (187-196).

On n'a pas d'idée, dans notre pays, de la diversité des notations arithmétiques et algébriques qui sont concurremment en usage dans les écoles d'Allemagne. En parcourant le tableau qu'en donne le savant rédacteur du *Zeitschrift*, on est étonné de voir que, dans un pays où les Mathématiques élevées sont cultivées à un si haut degré et dont les grands géomètres se sont montrés généralement de grands artistes dans le choix des notations, on tolère dans l'enseignement élémentaire des manières d'écrire barbares et ambiguës, donnant lieu à toute sorte d'interprétations. La plupart de ces négligences consistent en économies mal entendues de parenthèses, ou dans l'emploi inopportun du signe : pour la division.

Emsmann (*H.*). — Sur le système de coordonnées à quatre axes. (253-261).

Schlömilch (*O.*). — Sur les calculs d'amortissement et d'intérêt. (262-264).

Schaewen (von). — Sur la résolution des équations trigonométriques. (264-267).

Schlegel (V.). — Remarques sur l'article de M. Gilles au commencement de ce Volume. (274-278).

Défense des idées de la Géométrie moderne contre les objections de M. Gilles.

Gilles. — Réfutation des remarques de M. V. Schlegel. (278-281).

Pick (Ad.-Jos.). — Démonstration élémentaire de la formule de la déviation vers l'est des corps tombant librement. (337-342).

Soient h la hauteur de la chute, g l'intensité de la pesanteur, φ la latitude, w la vitesse angulaire de la Terre, x la déviation vers l'est. L'auteur établit la formule

$$x = \frac{2}{3} wh \sqrt{\frac{2h}{g}} \cos\varphi.$$

Hoffmann (J.-C.-V.). — Les déterminants ou leur suppression. (343-360).

L'auteur présente dans cet article des considérations sur la manière d'introduire les déterminants dans l'enseignement élémentaire, en s'élevant du simple au composé. Il passe ensuite en revue les principaux Traités qui ont paru en Allemagne sur cette matière, et signale, comme les plus propres à être mis entre les mains des commençants, ceux de Studnička et de Reidt. Comme Traités complets il indique le Traité classique de Baltzer, les Ouvrages plus ou moins étendus de Günther, de Mansion (traduction allemande), de Dölp, etc.

M. Hoffmann attribue à l'emploi des mauvaises méthodes dans les écoles élémentaires d'Autriche le *veto* dont cette théorie a été frappée dans ce pays, et devant lequel n'a pas trouvé grâce l'excellent Livre de M. Studnička.

Schlömilch (O.). — Sur les moyennes arithmétiques, géométriques et harmoniques d'un nombre quelconque de valeurs positives. (361-362).

La moyenne arithmétique est plus grande que la moyenne géométrique, et celle-ci plus grande que la moyenne harmonique.

Günther (S.). — Les lignes remarquables dans le triangle sphérique. (421-427).

Expressions de l'arc bissecteur d'un côté ou d'un angle; arc mené du sommet perpendiculairement à la base, etc. Pour cet arc perpendiculaire, on trouve la formule

$$\sin\omega = 2\sqrt{\frac{\sin a \sin b \sin s \sin(s-c)}{\sin^2 a + \sin^2 b - 2\sin a \sin b \cos c}}.$$

L'auteur indique le moyen de ramener le dénominateur à la forme monôme au moyen d'un angle auxiliaire. Il serait facile de montrer que cette simplification est illusoire, comme dans presque tous les cas analogues.

Schmitz (*Alf.*). — Remarque sur l'emploi de la méthode française pour la résolution des équations linéaires. (428-431).

Étant données les équations

$$x + 3y - 5z + 3u = 34,$$
$$x + 2y + 2z + u = 13,$$
$$x + 2y + 5z - 4u = 36,$$
$$x + 3y + 8z + 5u = 51,$$

si on les ajoute après avoir respectivement multiplié par les facteurs 1, α, β, γ, et qu'on égale à zéro les coefficients de x, y, z, on trouve des équations en α, β, γ contradictoires entre elles, bien que le système proposé soit résoluble et déterminé. L'auteur explique ce paradoxe par la considération des déterminants, et parvient à cette conclusion :

« Si d'un système d'équations on peut déduire deux ou plusieurs équations dans lesquelles deux ou plusieurs inconnues aient respectivement les mêmes coefficients, la *méthode française* n'est pas applicable à ce système. »

Killing (*W.*). — Nouvelles remarques sur l'article de M. Gilles. (435-436).

Gilles. — Réponse aux nouvelles remarques. (436).

Scheffler. — Vues erronées sur l'espace à quatre dimensions. (437-440).

Extrait de l'Ouvrage intitulé : *Die polydimensionalen Grössen und die vollkommenen Primzahlen.*

Tome XII ; 1881.

Reidt. — Petites remarques sur la planimétrie. (8-17).

1. Sur les angles formés par deux parallèles coupées par une sécante, et dont la nomenclature est encore indécise et incomplète. — 2. Sur le classement des quadrilatères. — 3 et 4. Des démonstrations par superposition (*Congruenz*), et démonstrations analogues des cas de similitude.

Fleischhauer (*O.*). — Les principaux écueils du calcul des intérêts. (18-29).

Schlömilch (*O.*). — Note sur les séries conditionnellement convergentes. (30-31).

Müller. — La quatrième dimension de l'espace. (40-41).

Réfutation de la preuve tirée de l'existence de la fonction d'ordre supérieur formée par les exponentielles successives, et sur laquelle on a cru pouvoir fonder l'existence de la quatrième dimension.

COMPTE RENDU du Congrès de philologues et de professeurs tenu à Stettin, en septembre 1880. (79-85).

Nous remarquons les questions suivantes, traitées dans cette assemblée :

1. Comparaison entre la méthode algébrique et la méthode purement géométrique pour la résolution des problèmes de Géométrie élémentaire.

2. Avantages et inconvénients de l'introduction de l'étude des déterminants dans l'enseignement des Gymnases. A une grande majorité, l'assemblée s'est prononcée contre cette introduction, dont les avantages ne se font sentir que lorsqu'on s'occupe d'applications générales, auxquelles ne donne pas lieu l'enseignement élémentaire donné dans les Gymnases.

Dieckmann (*J.*). — Les déterminants devant la Section mathématique et physique du 35e Congrès de philologues et de professeurs tenu à Stettin. (95-99).

Réclamation contre la décision du Congrès.

Godt. — Remarques critiques sur l'article du Dr Pick (t. XI, p. 337) (1). (100-104).

Pick. — Observations sur l'article précédent. (104-105).

Schumann. — Détermination élémentaire de la déformation dans la projection stéréographique polaire. (163-164).

Ernst (*A.*). — Construction des tangentes à l'ellipse et détermination de leurs points de contact, connaissant les diamètres conjugués de la courbe. (179-189, 251-254).

Stammer. — Sur l'enseignement de la théorie des combinaisons. (190-192).

---

(1) *Voir* plus haut, p. 287.

Erler. — Réfutation de l'article du Dr Dieckmann. (193-196).

Voir plus haut, p. 286.

Hoppe. — Sur les parallèles aux courbes fermées. (235-236).

Durège. — Sur certains phénomènes spéciaux ayant lieu à l'intérieur d'un espace à quatre dimensions. (236-237).

Kleinstück (O.). — Le paradoxe hydrostatique. (255).

Strack (O.). — Sur l'orthographe mathématique. (256-260).

L'auteur conseille, avec grande raison, de ne pas trop économiser les parenthèses dans les formules. Il considère la notation ${a_b}^c$ comme équivalente à $(a^b)^c$: cette convention est-elle bien établie, et n'y aurait-il pas danger de confusion avec la notation $a^{(b^c)}$?

Emsmann (H.). — Réponse aux remarques de M. Müller (p. 40 de ce Volume) (¹). (260-262).

Hauck (G.). — Le calcul graphique, son développement depuis Culmann et ses rapports avec l'École. (333-355).

Le premier Ouvrage sur cette branche du calcul est celui de Cousinery : *Le calcul par le trait,* publié à Paris en 1838. Cet Ouvrage était presque entièrement oublié quand parut, près de trente ans plus tard, la *Statique graphique* de Culmann (²). L'auteur de cet article présente un résumé intéressant sur ce remarquable Livre et sur les publications des auteurs contemporains sur le même sujet. Il examine, en terminant, la question de l'introduction de la *Statique graphique* dans les écoles; cette introduction ne lui paraît pas désirable.

Schmitz (A.). — La manière d'écrire $a : b \times c$ est-elle incorrecte? (356-357).

La formule ainsi présentée est-elle susceptible de plus d'une interprétation? Existe-t-il une convention universellement adoptée qui fasse cesser le doute? Poser ces questions, c'est en même temps les résoudre. Mais nous sommes profondément surpris de les voir poser dans un pays où les études pédagogiques sont cultivées avec autant de soin qu'en Allemagne.

Schlömilch (O.). — Théorème de perspective, avec son application pratique. (363-364).

(¹) *Voir* ci-dessus, p. 289.

(²) *Die graphische Statik*, Zürich, 1866. — *Le même*, 2e édit., t. Ier, 1875.

Günther (*S.*). — Analyse de l'Ouvrage de M. Cantor : (*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Bd. I) (387-397, 476-481).

Les études mathématiques à l'Université de Tokio (Japon), pendant l'année 2539-2540 (1879-1880). (400-402).

Voici quelques-unes des questions de Calcul infinitésimal et de Géométrie analytique traitées par les élèves dans cette année scolaire 2539-2540 :

Conditions du maximum ou du minimum d'une fonction d'une variable. Exemple : $y = m\sin(x-a)\cos x$.

Maximum et minimum de y, pour $y^3 + x^3 - 3axy = 0$.

Asymptotes. Exemple : Trouver celles de la courbe $y^4 - x^4 + 2bx^2y = 0$.

Solutions de l'équation différentielle $x^3\,dy - x^2y\,dx + y^3\,dx - xy^2\,dy = 0$.

Connaissant les coordonnées des sommets d'un triangle, trouver son aire.

Démontrer que l'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{a} = 0$ représente une parabole tangente aux axes, etc.

Diekmann (*J.*). — Sur la question des déterminants. (413-417).

Erler. — Courte réponse. (417).

Hahn (*J.*). — Sur les remarques de M. Schmitz au sujet de l'application de la *méthode française* à la résolution des équations linéaires. (417-419).

Voir plus haut, p. 288.

Schmitz. — Réponse. (419-421).

Hahn (*J.*). — Remarque finale. (421-422).

Fleischhauer (*O.*). — Emploi illégitime de la vie probable dans les calculs d'intérêt. (422-423).

Schlömilch (*O.*). — Sur la notation des coefficients binomiaux. (423-424).

Roth (*Fr.*). — Sur la Note de Stammer au sujet de la théorie des combinaisons. (424-425).

Voir plus haut, p. 289.

Diekmann (*J.*). — Sur les déterminants. (425-427).

L'auteur combat une assertion de M. Bardey au sujet de l'usage des déterminants pour la résolution des équations numériques du premier degré, et donne un exemple d'un algorithme très simple pour effectuer cette résolution.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME VI.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME VI ; 1882. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Années 1878-1879. — 243-251.

Nouvelle Correspondance mathématique, rédigée par M. E. CATALAN. T. V-VI;

Nouvelles Annales de Mathématiques, rédigées par MM. GERONO et CH. BRISSE. T. XX, 2e semestre; 1881. — 151-159.

Proceedings of the London Mathematical Society. T. IX-X; 1877-1879. — 205-221.

The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. T. XVI; 1879. — 48-58.

Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben von Dr. O. SCHLÖMILCH, Dr. E. KAHL und Dr. M. CANTOR. T. XXVI; 1881. — 139-148.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. T. XI-XII; 1880-1881. — 284-292.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME VI.

